

GAUSS-FÜGGVÉNY KEVERÉKEK NUMERIKUS FELBONTÁSÁRA SZOLGÁLÓ EGYIK ELJÁRÁS JAVÍTÁSÁRÓL

Írta: MEDGYESSY PÁL és VARGA LÁSZLÓ

1.

Legyen az $f(x)$ függvény

$$(1.1) \quad f(x) = \sum_{k=1}^N p_k \frac{e^{-\frac{(x-\alpha_k)^2}{4\beta_k}}}{\sqrt{4\pi\beta_k}}$$

($p_k > 0$, $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_N$, $(\alpha_i, \beta_i) \neq (\alpha_l, \beta_l)$; $i, l = 1, 2, \dots, N$; $i \neq l$) alakú. Ekkor az $f(x)$ függvényt az $\exp[-(x-\alpha_k)^2/4\beta_k]/\sqrt{4\pi\beta_k} \equiv f_k(x)$ normális sűrűségfüggvény-komponensek p_k súlyokkal vett keverékének nevezzük. ([1]-ben a „szuperpozíció” elnevezést használtuk.)¹

Legyen adott $f(x)$ grafikonja. Egy olyan numerikus eljárást, mely az N , p_k , α_k , β_k paraméterek (vagy egy részük) értékének az adott grafikon segítségével történő közelítő meghatározására szolgál, a keverék felbontásának nevezzük.

A leggyakoribb ilyen eljárás a következő (vö. [1]). $f(x)$ adott értékeinek felhasználásával előállítjuk az

$$(1.2) \quad f(x; \lambda) = \sum_{k=1}^N p_k \frac{e^{-\frac{(x-\alpha_k)^2}{4(\beta_k-\lambda)}}}{\sqrt{4\pi(\beta_k-\lambda)}} \quad (0 < \lambda < \beta_1)$$

ún. *tesztfüggvény* valamilyen jó közelítésének grafikonját, vigyázva arra, hogy $0 < \lambda < \beta_1$ fennálljon. $f(x; \lambda)$ ismét normális sűrűségfüggvények keveréke, de benne az $\exp[-(x-\alpha_k)^2/4(\beta_k-\lambda)]/\sqrt{4\pi(\beta_k-\lambda)} \equiv f_k(x; \lambda)$ komponensek szórásai kisebbek, mint az $f(x)$ keverékben, így azután remélhető, hogy $f(x; \lambda)$ említett közelítésének grafikonjában az α_k helyeken csúcsok fognak mutatkozni. A különvált csúcsokból a komponensek számára, azok maximumhelyére stb. következtethetünk — és ezzel elvileg elértük $f(x)$ felbontását.

A fő feladat tehát $f(x; \lambda)$ említett közelítésének előállítása. Erre számos módszer dolgoztak ki (vö. [2]), ezek végrehajtásakor azonban belépnek az $f(x)$ függvény mérési hibái is.² A hibák jelentkezését úgy fogjuk fel, mintha az $f(x)$ függvényre valamilyen, tágabb értelemben stacionárius sztochasztikus folyamatnak feltételezett $\xi(x)$ zaj egy $z(x)$ realizációja rakódott volna rá, vagyis abból indulunk ki, hogy $f(x)$ helyett az $f(x) + z(x)$ függvény értékei állnak rendelkezésünkre (ezeket mérjük le az adott grafikonról).

¹ Megjegyezzük, hogy meggondolásaink számos más keveréktípus (pl. ún. stabilis sűrűségfüggvények keveréke) esetén is érvényesek. Szemléletesebbnek látszott azonban a gyakorlatban legfontosabb (1.1) típuson mutatni be őket.

² Az itteni problémák felvethetők akkor is, ha $f(x)$ csak *közelítőleg* (1.1) alakú, ti. az eltérés beleolvasztható az említett hibákba.

Sajnos, az említett módszerek nagyon érzékenyek a zajra, ezért szükség van olyan numerikus eljárásra, amely $f(x; \lambda)$ közelítését az $f(x) + z(x)$ értékek alapján előállítja, de a zajra kevésbé érzékeny.

Egy ilyen eljárással foglalkozunk ebben a dolgozatban.

2.

Az $f(x; \lambda)$ függvény könnyen kifejezhető $f(x)$ Fourier-transzformáltjával; ti. fennáll (lásd [1], 80. o.), hogy

$$\begin{aligned} f(x; \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega} e^{\lambda\omega^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega y} dy \right) d\omega = \\ (2.1) \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega} e^{\lambda\omega^2} F(\omega) d\omega \quad (0 < \lambda < \beta_1), \end{aligned}$$

ahol $F(\omega)$ -val $f(x)$ Fourier-transzformáltját jelöltük.

Nézzük a valóságos helyzetet: a Fourier-transzformációt az $f(x)$ függvény helyett az $f^*(x) = f(x) + z(x)$ függvényen hajtjuk végre, vagyis — az elektronika nyelvén szólva — előállítjuk annak *spektrumát*. Míg $f(x)$ spektruma „gyorsan” csökken, a zaj spektruma hozzá képest többnyire csak lassan változik. Ha tehát egy jól megválasztott „szűrőt” alkalmazunk — az elektronikában szokásos értelemben és módon — és a (2.1)-ben szereplő második lépést — szorzás $\exp(\lambda\omega^2)$ -tel, és inverz Fourier-transzformáció — a megszárt spektrumon hajtjuk végre, okvetlenül a zaj zavaró hatásának bizonyos fokú kiküszöbölésével kapjuk meg $f(x; \lambda)$ egy közelítését.

A mondottak analitikus formában a következőt jelentik:

Legyen az említett szűrő $D(\omega)$. Jelölje $f^*(x)$ Fourier-transzformáltját $F^*(\omega)$. Ekkor (formálisan) $F^*(\omega) = F(\omega) + Z(\omega)$, ahol $Z(\omega)$ $z(x)$ Fourier-transzformáltja. $f(x; \lambda)$ említett közelítése

$$(2.2) \quad f^*(x; \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega} e^{\lambda\omega^2} D(\omega) F^*(\omega) d\omega \quad (0 < \lambda < \beta_1).$$

Ha az $\exp(\lambda\omega^2) \cdot D(\omega)$ szorzatnak létezik az inverz Fourier-transzformáltja,

$$(2.3) \quad M(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega} e^{\lambda\omega^2} D(\omega) d\omega,$$

(2.2) a következő alakban is felírható:

$$(2.4) \quad f^*(x; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} M(x-t) f^*(t) dt. ^3$$

³ Ennek egy speciális esete vázlatosan [1] 181. oldalán is megtalálható már.

(2. 4) folytán a feladat ilyen megfogalmazásban szerves kapcsolatba került a [3] dolgozat eredményeivel. Abban arról van szó, hogyan állítható elő bizonyos keverékek esetében (1. 2)-höz hasonló tulajdonságú tesztfüggvény egyetlen konvolúciós integrál alakjában, azon megkötés mellett, hogy a felbontandó keverék, illetve tesztfüggvény komponensei egyaránt *egycsúcsú sűrűségfüggvények*.

Mi most a feladatot a (2. 2) formula szerint kívánjuk megoldani, és a továbbiakban az erre alkalmas numerikus módszer, valamint a szűrő megválasztásával foglalkozunk.

3.

Legyenek az $f^*(x)$ függvény értékei ekvidisztans x_k értékeknél adottak ($x_k = x_0 + k\Delta x$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Ismeretes (lásd pl. [4]), hogy minden olyan $g(x)$ -re, amelynek *Fourier*-transzformáltja, $G(\omega)$, zérus minden $|\omega| > \pi/\Delta x$ esetén, a trapézformula a $-\pi/\Delta x \leq \omega \leq \pi/\Delta x$ intervallumban $G(\omega)$ pontos értékét szolgáltatja, azaz

$$(3. 1) \quad G(\omega) = \Delta x \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(x_k) e^{i\omega(x_0 + k\Delta x)} \quad (-\pi/\Delta x \leq \omega \leq \pi/\Delta x).$$

A mi esetünkben $F^*(\omega)$ első része, $F(\omega)$ ugyan nem tűnik el egy $-\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0$ intervallumon kívül, de ω növekedésével elég rohamosan csökken, ugyanis

$$(3. 2) \quad F(\omega) = \sum_{k=1}^N p_k e^{i\alpha_k \omega - \beta_k \omega^2}$$

és így például $\Delta x = \sqrt{2\beta_1}$ esetén $|\omega| \leq \pi/\Delta x$ -nél az 1-es indexű komponens spektrumának első eltolásából ($k = \pm 1$) adódó járuléka kisebb, mint $\exp(-4, 9) \approx 10^{-2}$, ezért $F^*(\omega)$ kiszámítására alkalmas numerikus módszernek látszik a trapézformula. Megállapodunk abban, hogy a (2. 2) integrált is ugyanilyen trapézformulával számítjuk ki közelítőleg. Az előbbieket alapján elfogadható, hogy esetünkben a trapézformulában felhasználandó $f^*(x)$ értékeknek nem kell túl sűrűn elhelyezkedniök.

Már $F^*(\omega)$ kiszámításakor két hibaforrás fogja azt $F(\omega)$ -től különbözővé tenni. Az egyik hiba abból származik, hogy az $f^*(x)$ értékek a $z(x)$ zajjal terheltek, a másik hiba pedig abból adódik, hogy a trapézformulát csak véges tagszámmal alkalmazhatjuk. Az utóbbi hibával itt nem kívánunk külön foglalkozni. Feltételezzük, hogy az $f^*(x)$ függvény értékei abból az intervallumból valók, amelyben még a zaj nem „dominál” a függvényértékekhez viszonyítva.

Vizsgáljuk meg ezután a zaj kiszűrésének kérdését.

Mindenekelőtt nyilvánvaló, hogy minél kisebb frekvenciáknál levágó szűrőt alkalmazunk; így nagyobb részét fogjuk a zajnak kiszűrni. Viszont $f(x; \lambda)$ jó közelítéssel való előállításához — különösen ha λ megközelíti β_1 -et — fel kell használni $f(x; \lambda)$ spektrumának elég nagy frekvenciák tartományába eső részét is. A helyes szűrő megválasztása tehát kompromisszum eredménye lehet csak a hasznos jel egy részének kiszűrése folytán behozott hiba és a zaj megmaradó részétől származó hiba között.

Mivel lineáris transzformációk alkalmazásáról van szó, vizsgáljuk meg az említett hibák hatását külön-külön. Vizsgáljuk meg először a szűrő hatását a hasznos

jel $(f(x))$ szempontjából. Tekintsük a legegyszerűbb egyparaméteres szűrőseretet:

$$(3.3) \quad D(\omega) \equiv D(\omega, \omega_0) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Elég a szűrő hatását egy tetszőleges normális sűrűségfüggvény-komponens $(f_k(x))$ esetén vizsgálni, mivel a keverékben az egyes komponensekben mutatkozó hibák egyszerűen összeadódnak. Tételezzük fel, hogy az $f_k(x)$ k -adik komponens esetében alkalmazzuk a (3. 3) típusú szűrőt, vagyis tekintsük az ekkor kapott $f^*(x; \lambda)$ k -adik komponensét, az

$$\hat{f}_k(x; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} M(x-t)f_k(t) dt \quad (0 < \lambda < \beta_1)$$

függvényt ($k=1, 2, \dots, N$). Először is megmutatjuk, hogy $D(\omega, \omega_0)$ alkalmazása esetén az $\hat{f}_k(x; \lambda)$ komponensek — a paraméterek bizonyos értékei mellett — nem maradnak (egysúcsú) sűrűségfüggvények.

Állításunk a következőképpen látható be. $\hat{f}_k(x; \lambda)$ az alábbi függvény:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \hat{f}_k(x; \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{-ix\omega} e^{\lambda\omega^2} e^{i\alpha_k\omega - \beta_k\omega^2} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} e^{-(\beta_k - \lambda)\omega^2} \cos(x - \alpha_k)\omega d\omega. \end{aligned}$$

A (3. 4) függvény α_k körül szimmetrikus; elég vizsgálni $(\beta_k - \lambda = A_k$ jelölés mellett) az

$$(3.5) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} e^{-A_k\omega^2} \cos x\omega d\omega = I(x, A_k, \omega_0)$$

integrált. Nyilvánvaló, hogy $I(0, A_k, \omega_0) > 0$. Legyen $x = 3\pi/2\omega_0$, akkor

$$(3.6) \quad \begin{aligned} I\left(\frac{3\pi}{2\omega_0}, A_k, \omega_0\right) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\omega_0}{3}} e^{-A_k\omega^2} \cos \frac{3\pi\omega}{2\omega_0} d\omega + \\ &+ \int_{\frac{\omega_0}{3}}^{\omega_0} e^{-A_k\omega^2} \cos \frac{3\pi\omega}{2\omega_0} d\omega \equiv \frac{2\omega_0}{3\pi^2} - \frac{4\omega_0 e^{-A_k\omega_0^2}}{3\pi^2} \end{aligned}$$

és ez negatív, ha $1 - 2 \exp(-A_k\omega_0^2) < 0$, vagyis az ezt az egyenlőtlenséget kielégítő (A_k, ω_0) párokra $I\left(\frac{3\pi}{2\omega_0}, A_k, \omega_0\right) < 0$. A Riemann-lemma értelmében $\lim_{x \rightarrow \infty} I(x, A_k, \omega_0) = 0$; az említett (A_k, ω_0) párok esetében a vizsgált integrál pozitív értékekből negatívba megy át és ezután tart (esetleg újabb jelváltásokkal) zérushoz.

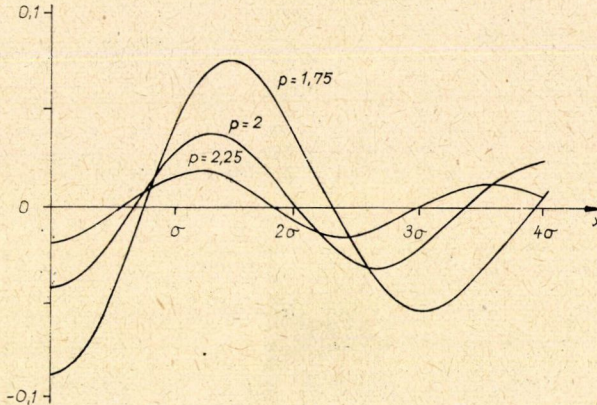
Az elmondottak felfoghatók úgy, hogy az ideális $(z(x) \equiv 0)$ $f_k(x; \lambda)$ teszt-függvény-komponensre egy hullámos torzító függvény rakódik rá, ugyanis

$$(3.7) \quad f_k(x; \lambda) - \hat{f}_k(x; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} e^{-(\beta_k - \lambda)\omega^2} \cos(x - \alpha_k)\omega d\omega.$$

Ennek a torzításnak $f_k(x; \lambda)$ -hoz viszonyított értékét ábrázoltuk az 1. ábrán néhány paraméterérték mellett.

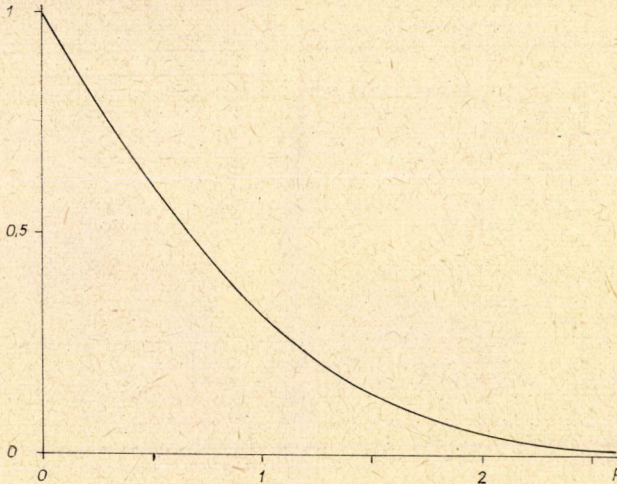
A torzítás x -től független felső korlátja könnyen megadható, ugyanis

$$(3.8) \quad |f_k(x; \lambda) - \hat{f}_k(x; \lambda)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} e^{-(\beta_k - \lambda)\omega^2} d\omega.$$



1. ábra. Az $[f_k(x; \lambda) - \hat{f}_k(x; \lambda)] / f_k(x; \lambda)$ relatív torzítás ábrája
 $p = \omega_0 \sigma$, $\sigma = \sqrt{2(\beta_k - \lambda)}$ jelölés mellett

A 2. ábrán ennek a hibakorlátnak az $\omega_0 = \infty$ -re normált értékét ábrázoltuk, mint $\omega_0 \sqrt{2(\beta_k - \lambda)}$ függvényét, $x = \alpha_k$ -ra. Más szavakkal: a hibátlan függvény csúcserővel elosztott hibakorlátot mutatja a 2. ábra.



2. ábra. Az $[f_k(\alpha_k; \lambda) - \hat{f}_k(\alpha_k; \lambda)] / f_k(\alpha_k; \lambda)$ relatív hibakorlát ábrája
 $p = \omega_0 \sqrt{2(\beta_k - \lambda)}$ függvényében

Megemlítjük csupán, hogy más szokásos szűrők hatásának vizsgálatával is foglalkoztunk. A fokozatosan levágó szűrők előnye abban mutatkozik meg, hogy a keletkező mellékcsúcsok nagysága kisebb, de ennek az az ára, hogy a főcsúcs jobban széthúzódik, „túszerűsége” romlik. Így tehát esetünkben a (2. 3) szűrő használata látszik legjobbnak.

Lássuk ezek után a zajból származó hibát. Tegyük fel, hogy $\xi(x)$ valamilyen, tágabb értelemben stacionárius sztochasztikus folyamat. A (2. 2), ill. (2. 4) transzformáció $z(x)$ -et egy másik, tágabb értelemben stacionárius sztochasztikus folyamat — jelben $\xi(x; \lambda)$ — egy realizációjába viszi át. Mérjük mármint az ebből származó torzulást $\sqrt{D^2[\xi(x; \lambda)]}$ -val, azaz a folyamat szórásával. Könnyen belátható (lásd pl. [5], 275. o.), hogy ha

$$(3.9) \quad \mu(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} M(x) e^{i\omega x} dx$$

és $\xi(x)$ autokorrelációs függvényéhez, $R(\tau)$ -hoz az

$$(3.10) \quad R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega} \varphi(\omega) d\omega$$

összefüggéssel értelmezett $\varphi(\omega)$ spektrális sűrűségfüggvény tartozik, akkor

$$(3.11) \quad D^2[\xi(x; \lambda)] = \int_{-\infty}^{\infty} |\mu(-\omega)|^2 \varphi(\omega) d\omega,$$

ahol a (3. 3) szűrő esetén

$$\mu(\omega) = \begin{cases} e^{i\lambda\omega^2}, & (-\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0) \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

azaz

$$(3.12) \quad D^2[\xi(x; \lambda)] = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{2i\lambda\omega^2} \varphi(\omega) d\omega.$$

Ha (2. 2) Fourier-transzformáltjait trapéz-formulával számítjuk ki, $\xi(x; \lambda)$ helyett valamilyen $\bar{\xi}(x; \lambda)$ fog fellépni, $D^2[\bar{\xi}(x; \lambda)]$ azonban kis Δx -re jó közelítéssel (3. 12) alakú lesz, alkalmasan megválasztott $\varphi(\omega)$ mellett.

Igen gyakran előforduló eset az, amidőn az x_k ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) helyekhez tartozó $\xi(x_k) = \xi_k$ értékek egymástól független valószínűségi változóknak tekinthetők nulla várható értékkel és ismert σ szórással. Belátható, hogy az említett numerikus módszer alkalmazásakor fellépő $\bar{\xi}(x; \lambda)$ szórásnégyzete ebben az esetben a

$$(3.13) \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} \sigma^2 \Delta x, & (-\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

spektrális sűrűségfüggvénnyel írható fel, azaz

$$(3.14) \quad D^2[\bar{\xi}(x; \lambda)] \approx 2\sigma^2 \Delta x \int_0^{\omega_0} e^{2i\lambda\omega^2} d\omega = \frac{\sigma^2 \Delta x}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{\omega_0 \sqrt{2\lambda}} e^{iu^2} du.$$

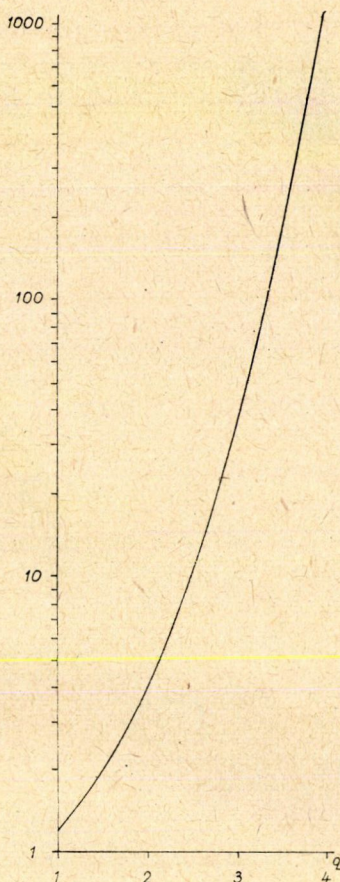
Ez a formula azt mutatja, hogy minél nagyobb λ -t választunk (azaz λ -val megközelítjük β_1 -et), annál kisebb Δx -et kell választani (azaz sűrűn kell kimérni a függvényt) a zajból származó hiba csökkentése végett.

Végül írjuk fel az előjáróban említett kétféle hiba együttes torzítását, $E(x; \lambda)$ -t. (3. 7) és (3. 12) figyelembevételével:

$$(3. 15) \quad E(x; \lambda) = \\ = \sum_{k=1}^N \frac{p_k}{\pi} \left\{ \int_{\omega_0}^{\infty} e^{-(\beta_k - \lambda)\omega^2} \cos(x - \alpha_k)\omega d\omega \right\} + \\ + \sqrt{2 \int_0^{\omega_0} e^{2\lambda\omega^2} \varphi(\omega) d\omega}.$$

A helyes szűrő megválasztása tehát olyan ω_0 érték megválasztását jelenti, amelyre $\max |E(x; \lambda)|$ minimum.

Ez a szélsőérték-keresés bonyolultnak látszik, mivel a minimalizálandó függvény a keresett paraméterektől függ. Erre azonban általában nincs is szükség, ha az $F^*(\omega)$, ill. $F^*(\omega)e^{\lambda\omega^2}$ spektrumot felrajzoljuk. A spektrum alapján többnyire elegendő egyértelmű ω_0 megválasztása adott $\varphi(\omega)$ és λ esetén. A (3. 15)-ös formulának akkor vesszük hasznát, ha előzetes becslés alapján méréstervezést kívánunk végezni. Ez úgy jelentkezik, hogy λ -t növelni kívánjuk, és a növekvő első hiba ellensúlyozására a második hibát kívánjuk csökkenteni. Ez a feladat általában grafikonok segítségével egyszerűen elvégezhető. Ehhez kívánunk segítséget nyújtani a (3. 14) szerinti szórás $\omega_0 \sqrt{2\lambda}$ -tól való függésének ábrázolásával a 3. ábrán.



3. ábra. $\sqrt{D^2[\xi(x; \lambda)]} \sqrt{2\lambda/s^2 \Delta x}$ ábrája $q = \omega_0 \sqrt{2\lambda}$ függvényében

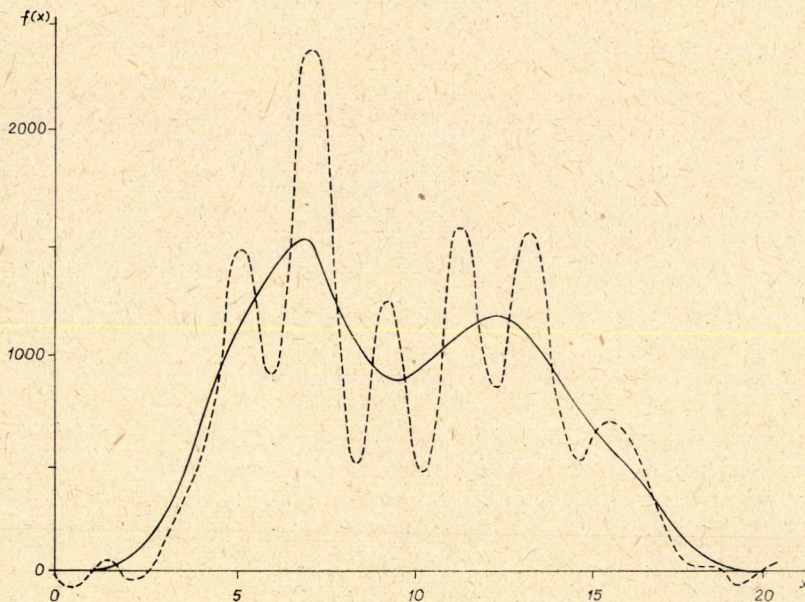
4.

A következőkben az ismertetett módszert egy példán kívánjuk szemléltetni. Szándékosan nem választottunk gyakorlati példát, mert a szemléltetésnél szükségesnek tartjuk, hogy pontosan ismerjük a vizsgálandó keveréket.

A 4. ábrán folytonos vonallal a következő függvényt ábrázoltuk:

$$(4. 1) \quad f(x) = 1000 e^{\frac{-(x-5)^2}{4}} + 1000 e^{\frac{-(x-7)^2}{2}} + 500 e^{\frac{-(x-8,75)^2}{2}} + \\ + 1000 e^{\frac{-(x-11,25)^2}{4}} + 500 e^{\frac{-(x-13,25)^2}{2}} + 500 e^{\frac{-(x-15,25)^2}{4}}.$$

Az $f(x)$ függvény értékeit $x_k = k \cdot 0,25$ $k = 0, 1, 2, \dots, 80$ helyeken egész értékek megtartásával vettük fel. A $\xi(x_k) = \xi_k$ változók legyenek egymástól függetlenek, egyenletes eloszlásúak közös $\sigma^2 = 1/12$ szórásnégyzettel. $2\lambda \approx 1$ esetén $\omega_0 = 3,7$ -nél



4. ábra. A (4. 1)-es formula szerint összetett keverék (folytonos vonal) felbontása. A tesztfüggvény (szaggatott vonal) az $\omega_0 = 3,7$, $2\lambda = 0,75$ paraméterértékekhez tartozik

a zajtól származó hiba a 3. ábra szerint $\sqrt{300/50} \approx 2,5$. A második ábra szerint: ha $\omega_0 \sqrt{2(\beta_k - \lambda)} = 1,85$, akkor a komponensenként fellépő relatív hiba kb. 6%. Ezt elfogadhatónak tartottuk, és így $\omega_0 = 3,7$, $2\lambda = 0,75$ paraméterértékek mellett hajtottuk végre a (2. 2) transzformációt. Az eredményül kapott görbét a 4. ábrán szaggatott vonallal ábrázoltuk. Az ábra szélén látszik egy kb. 50 egység nagyságú negatív hullám, amely az $\omega_0 \sqrt{2(\beta_k - \lambda)} \approx 1,85$ választás miatt várható is volt. A 4. ábra alkalmas ebben a rendkívül zsúfolt keverékben levő komponensek számának meghatározására, sőt alkalmas esetleges paraméter-megállapító iterációs eljáráshoz szükséges kezdőértékek meghatározására is.

IRODALOM

- [1] MEDGYESSY P.: *Decomposition of superpositions of distribution functions*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961.
- [2] MEDGYESSY P.: Egy konvolúciós típusú integrálegyenlet numerikus megoldása és ennek felhasználása Gauss-függvény szuperpozíciók felbontására. *MTA III. Oszt. Közl.* 16 (1966) 47—64.
- [3] MEDGYESSY P.: Sűrűségfüggvény—szuperpozíciók felbontásának egy lényegileg új módszeréről. *MTA III. Oszt. Közl.* 17 (1967) 365—372.
- [4] BLACKMAN, R. B. and TUKEY, J. W.: *The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering*. Dover, New York, 1958.
- [5] ГИХМАН, И. И. — СКОРОХОД, А. В.: *Введение в теорию случайных процессов*. Изд. „Наука”, Москва, 1965.

(Beérkezett: 1967. szeptember 12.)

ON THE IMPROVING OF A METHOD FOR THE NUMERICAL DECOMPOSITION OF MIXTURES OF GAUSSIAN FUNCTIONS

by

PÁL MEDGYESSY and LÁSZLÓ VARGA

Summary

In certain cases the unknown parameters of the mixture (1. 1) can be determined approximately by means of the graph of the test function (1. 2) (depending on the arbitrary parameter λ), as the peaks of the latter one may appear more separated than those of (1. 1). A numerical approximation of (1. 2) based on the graph of (1. 1) is obtained by evaluating the integral (2. 1) by applying twice the trapezoidal rule. However, this procedure is very sensitive to the noise superposed on (1. 1). In order to diminish the influence of the noise the authors apply a cut-off filter (3. 3) to the *Fourier* transform of (1. 1) (+ noise), then the new test function (2. 2) is to be applied (and computed numerically) instead of (1. 2). The authors consider also problems of optimizing the filter (3. 3); the relevant results are illustrated by the Figures 1—3. In practice the optimal cut-off will be determined by successive trials (by considering the corresponding graphs of (2. 2)). In Fig. 4. optimal decomposition of the mixture (4. 1), obtained by the mentioned procedure, is shown.