HOMOCSOPORTOK (m, n)-IDEÁLJAIRÓL

Írta: LAJOS SÁNDOR

Egy H félcsoportot THIERRIN [5] nyomán *homocsoportnak* nevezünk, ha H-nak létezik olyan e idempotens eleme, amely felcserélhető H-nak valamennyi elemével, továbbá mindegyik $h \in H$ elemhez van olyan $h' \in H$ elem, amely kielégíti a

$$hh' = e$$

összefüggést.[1] A mondott tulajdonságokkal rendelkező e idempotens elem egyértelműen meghatározott. Ha ugyanis e és f is ilyen tulajdonságú idempotens eleme a H félcsoportnak, akkor az előbbiek szerint van olyan e' és f' elem a H-ban, hogy

$$ee' = f \quad \text{és} \quad ff' = e.$$

De ebből következik, hogy

$$f = ee' = e^2e' = ef$$

és

$$e = ff' = f^2f' = fe.$$

Minthogy e a H félcsoport valamennyi elemével felcserélhető,

$$ef = fe.$$

Tehát

$$e = f.$$

Megmutatjuk, hogy a H félcsoportban az $xe = ex$ alakú elemek G halmaza, ahol x befutja H elemeit, részcsoportot alkot.

Csakugyan, ha $x, y, z \in H$, akkor

$$xe \cdot ye = xy \cdot e^2 = xye,$$

vagyis a G halmaz zárt. e a G-nek neutrális eleme, mivel

$$e \cdot xe = xe \cdot e = xe^2 = xe.$$

A $he \in G$ elem jobb oldali inverzét a homocsoport definíciója szerint létező h' elemmel képezhetjük:

$$he \cdot h'e = hh'e^2 = e.$$

[1] A félcsoportok algebrai elméletének alapvető fogalmaira nézve CLIFFORD és PRESTON [1] könyveire utalunk. A homocsoportok néhány jól ismert tulajdonságára emlékeztetünk a dolgozat első felében.

Ez *a* $G=He$ *részcsoport a* H *homocsoportnak homomorf képe.* Az $x \to xe$ leképezés homomorfizmus, mivel az $xy=z$ relációt kielégítő $x, y, z \in H$ elemekre fennáll, hogy

$$xe \cdot ye = xy \cdot e = ze,$$

vagyis a leképezés műveletttartó.

A $G=He$ csoport a H homocsoportnak kétoldali ideálja, ugyanis

$$xe \cdot y = xy \cdot e \in G$$

és

$$y \cdot xe = yx \cdot e \in G$$

tetszőleges $y \in H$ elemre nézve.

Ha I a H homocsoportnak tetszőleges kétoldali ideálja, akkor nyilván fennáll az

$$IG \subseteqq I \cap G$$

tartalmazási reláció. Ezért I és G közös része nem üres. Megmutatjuk, hogy I és G közös része egyenlő G-vel. IG ugyanis kétoldali ideálja G-nek, de csoportnak nincsen valódi ideálja, így $IG=G$. Tehát

$$G = IG \subseteqq I \cap G \subseteqq G,$$

ahonnan következik, hogy

$$G = I \cap G.$$

G tehát olyan kétoldali ideálja a H homocsoportnak, amely része a H mindegyik kétoldali ideáljának. Az ilyen tulajdonságú ideált *univerzálisan minimális ideálnak* szokás nevezni (lásd [1]).

Megmutatjuk, hogy ha egy F félcsoportnak van olyan G részcsoportja, amely egyszersmind kétoldali ideálja is F-nek, akkor F homocsoport.

Legyen e a G csoport egységeleme. Akkor F-nek bármely a elemére $ae \in G$ és $ea \in G$, mivel G kétoldali ideálja F-nek. De akkor

$$ae = e(ae) = (ea)e = ea,$$

tehát az e idempotents elem felcserélhető F-nek bármelyik a elemével. A homocsoport definíciójában szereplő h' elem pedig:

$$h' = ea' = a'e,$$

ahol a' az ae elem G-beli inverze. Valóban, ez kielégíti a

$$h'a = ah' = e$$

összefüggést.

Azt nyertük tehát, hogy *egy F félcsoport akkor és csakis akkor lesz homocsoport, ha van olyan részcsoportja, amely kétoldali ideálja F-nek.* Ennek az eredménynek következménye, hogy például minden zéróelemes félcsoport homocsoport.

A homocsoportok (m, n)-ideáljaival kapcsolatban bebizonyítjuk a következő tételeket.[2]

[2] Az (m, n)-ideál definíciójára és fontosabb tulajdonságaira nézve a [2, 3, 4] dolgozatokra utalunk.

1. TÉTEL. *Homocsoportnak bármely (m, n)-ideálja maga is homocsoport.*

Bizonyítás. Legyen H egy homocsoport, amelynek G a csoportideálja, A pedig legyen H-nak tetszőleges (m, n)-ideálja. Akkor

$$A^m G A^n \subseteqq A^m H A^n \subseteqq A$$

és

$$A^m G A^n \subseteqq G,$$

mivel G kétoldali ideálja H-nak. Így azt kaptuk, hogy

$$A^m G A^n \subseteqq A \cap G,$$

tehát A és G közös része nem üres. Másrészt $A \cap G$, mint részfélcsoport és (m, n)-ideál közös része, (m, n)-ideálja G-nek (lásd [3], 4. 1. tétel), de csoportnak nincsen valódi (m, n)-ideálja, ennél fogva

$$A \cap G = G.$$

Tehát az A (m, n)-ideál tartalmazza G-t, ami nyilván A-nak is olyan részcsoportja, amely egyszersmind kétoldali ideál is. Így az A (m, n)-ideál csakugyan homocsoport.

Korollárium. *Homocsoportnak bármely bal oldali (jobb-, ill. kétoldali) ideálja maga is homocsoport.*

2. TÉTEL. *Egy homocsoport csoportideálja a homocsoportnak univerzálisan minimális (m, n)-ideálja.*

Bizonyítás. Legyen H egy homocsoport, G a csoportideálja. Akkor G nyilván (m, n)-ideálja H-nak tetszőleges nemnegatív egészekből álló m, n számpárra. Legyen A valamely (m, n)-ideálja H-nak. Azt kell bizonyítanunk, hogy G benne van A-ban. Mivel $G \subseteqq H$ és A (m, n)-ideálja H-nak,

$$A^m G A^n \subseteqq A^m H A^n \subseteqq A.$$

Másrészt könnyű belátni, hogy az $A^m G A^n$ halmaz (m, n)-ideálja G-nek. De $A^m G A$ nem üres, s csoportnak nincsen valódi (m, n)-ideálja (lásd [3]), így kapjuk, hogy

$$A^m G A^n = G.$$

Tehát a G csoportideál valóban része a H homocsoport bármely A (m, n)-ideáljának, vagyis G csakugyan univerzálisan minimális (m, n)-ideálja H-nak. Ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

Korollárium. *Bármely H homocsoport G csoportideálja a H-nak univerzálisan minimális bal oldali (jobb-, ill. kétoldali) ideálja.*

3. TÉTEL. *Homocsoport összes* $(1, 1)$-*ideáljának halmaza a komplexus szorzásra nézve homocsoport.*

Bizonyítás. A [3] dolgozat 1. 12. korolláriuma szerint egy félcsoport bármely két $(1, 1)$-ideáljának a szorzata ismét $(1, 1)$-ideálja a félcsoportnak. Így egy H homocsoport összes $(1, 1)$-ideáljának a halmaza is félcsoport a részhalmazok szorzására nézve. Jelöljük ezt a félcsoportot H_1-gyel. Megmutatjuk, hogy H_1 homocsoport.

Nyilvánvaló, hogy G, a H csoportideálja (1, 1)-ideálja H-nak, vagyis $G \in H_1$. Legyen A a H_1-nek valamely eleme. Akkor

$$GA \subseteqq G$$

és a GA szorzat (1, 1)-ideálja G-nek, de a G csoport nem tartalmaz valódi (1, 1)-ideált, tehát

$$GA = G.$$

Hasonló módon igazolható, hogy

$$AG = G$$

bármely $A \in H_1$ elemre. Így G a H_1 félcsoportnak zéruseleme, tehát a H_1 félcsoport valóban homocsoport. Ezzel a 3. tételt bizonyítottuk.

IRODALOM

[1] A. H. CLIFFORD és G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups* I—II, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1961; 1967.
[2] S. LAJOS, On (m, n)-ideals of semigroups, *Second Hungarian Math. Congress* I (1960), 42—44.
[3] LAJOS S.: A félcsoportok ideálelméletéhez I—II. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl.* **11** (1961), 57—66; és **14** (1964), 293—299.
[4] S. LAJOS, Generalized ideals in semigroups, *Acta Sci. Math.* **22** (1961), 217—222.
[5] G. THIERRIN, Sur les homogroupes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **234** (1952), 1519—1521.

(Beérkezett: 1967. XI. 15.)

ON (m, n)-IDEALS IN HOMOGROUPS

By

S. LAJOS

Summary

In this paper the author proves the following results.

THEOREM 1. *Any (m, n)-ideal of a homogroup H is also a homogroup.*

COROLLARY. *Any left (right, two-sided) ideal of a homogroup is also a homogroup.*

THEOREM 2. *Let H be a homogroup, G be the group-ideal of H. Then G is the universally minimal (m, n)-ideal of H.*

COROLLARY. *The group-ideal of a homogroup H is the universally minimal left (right, two-sided) ideal of H.*

The definition of the universally minimal (m, n)-ideal is analogous to that of universally minimal left ideal (see [1]).

THEOREM 3. *The set of all (1, 1)-ideals of a homogroup is a homogroup under the multiplication of subsets.*