DIMENZIÓ ÉS KONVEXITÁS, IV.*

Írta: DEÁK ERVIN

A IV. FEJEZET RÉSZLETES TARTALOMJEGYZÉKE

BEVEZETŐ MEGJEGYZÉSEK

E dolgozat 0. §-ának végén (I. rész, 195. oldal) már ismertettük a 18. §-ban követendő célokat és módszereket. Ezt azonban most ki kell egészítenünk a következő megjegyzéssel:

Az I. és a II. rész kéziratának (egyidejű), ill. a jelen IV. rész kéziratának elkészültét több mint egy év választotta el egymástól. Ez idő alatt jó néhány olyan új eredményt sikerült elérnünk e dolgozat I., II. és III. fejezetének témakörében egyaránt, amely egyrészt — sokkal általánosabb vagy élesebb lévén — egyes, az előző részekben közölt és bebizonyított tételeket szinte „feleslegessé" tesz, másrészt lehetségessé — sőt szükségessé is — teszi a dolgozatot lezáró probléma-gyűjtemény lényegesen más megfogalmazását, mint ahogyan azt eredetileg terveztük. Ez részben gazdagodást jelent, amennyiben több eredményt, példát, alaposabban indikált problémákat közölhetünk, továbbá sokkal szélesebb területen mozgunk (pl. a dimenzióelméleti vonatkozású témáknál már nem maradunk főleg a szeparábilis metrikus terek és egyetlen klasszikus dimenziófogalom — a MENGER—URISZON-dimenzió — körében); részben viszont „szegényedést" jelent, amennyiben egyes problémák időközben megoldódtak, s így most „kiesnek" a problémagyűjteményből. Úgy gondoljuk azonban, hogy ha az olvasó e dolgozatot cikk*sorozat*nak tekinti (mint ahogy tulajdonképpen az is), akkor az elmondottak nem fognak zavaróan hatni.

* Az I., II., ill. III. rész az *MTA III. Oszt. Közl.* 17 (1967) 2., 3., ill. 4. számában jelent meg. A rövidítések és jelölések teljes mutatóját és a definíciók teljes mutatóját is az I. részhez csatoltuk. A jelen részben előforduló irodalmi utalások [1]-től [56]-ig az I. részben közölt irodalomjegyzékre, [57]-től [77]-ig pedig annak e rész végén közölt kiegészítésére vonatkoznak.

A témának ez a továbbfejlődése természetesen újabb irodalmi hivatkozásokat is szükségessé tett; ezért az I. részben közölt — s ott „teljes"-nek mondott — irodalomjegyzékhez a jelen rész végén egy kiegészítést csatoltunk.

Végül megjegyezzük, hogy távolról sem foglalkozunk itt minden olyan, az IS-fogalommal kapcsolatosan felmerült problémával, ami érdekesnek látszik. Igyekeztünk főleg azokat a problémákat kiválasztani, amelyeknek „érdekességét" valamennyire (estleg már elért részeredmények bemutatásával) dokumentálni vagy legalább érzékeltetni is tudjuk.

18. §. Problémák és kiegészítések

1. Az irándimenzió kapcsolatai más dimenziókkal

Az I. és II. részben Dim X-et még csak ind X-szel hoztuk kapcsolatba; a bevezetésben is (5. 3)-nak csak egy ilyen értelmű általánosítását említettük [23]. Azóta azonban kiterjesztettük vizsgálatainkat a ČECH-féle nagy induktív dimenzióra[1] és a LEBESGUE-féle lefedési dimenzióra[2] is; ezért most az újabb eredmények és a problémák ismertetésénél *mindhárom* „klasszikus" dimenziót tekintetbe vesszük.

Az (5. 3) tételben egy szeparábilis metrikus X terekre vonatkozó aszimptotikus kapcsolatot állapítottunk meg ind X és Dim X között. Figyelembe véve, hogy a szeparábilis metrikus terek körében a három klasszikus dimenzió ekvivalens (l. pl. [47] 90), most így fogalmazzuk az (5. 3) tételt:

(18. 1) TÉTEL. *Legyen X szeparábilis metrikus tér.*

A. *Ha* $\operatorname{Dim} X < \aleph_0$, *akkor* ind X, Ind X *és* dim X *egyaránt véges, sőt*

$$\left.\begin{matrix}\operatorname{ind} X\\ \operatorname{Ind} X\\ \dim X\end{matrix}\right\} \leqq \operatorname{Dim} X.$$

B. *Ha* $\operatorname{ind} X < \infty$, *ill.* $\operatorname{Ind} X < \infty$, *ill.* $\dim X < \infty$, *akkor*

$$\operatorname{Dim} X \leqq \begin{cases} 2.\ \operatorname{ind} X + 1, \\ 2.\ \operatorname{Ind} X + 1, \\ 2.\ \dim X + 1. \end{cases}$$

Itt az ID és a klasszikus dimenziók kapcsolatának két típusát látjuk. Ha ezek bármelyikét tereknek valamely olyan bővebb osztályára kívánjuk átvinni, amelyben

[1] DEFINÍCIÓ: $\operatorname{Ind} \emptyset = -1$; $\operatorname{Ind} X \leqq n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, ha bármely nem üres zárt halmaz környezetrendszerének van bázisa olyan nyílt U halmazokból, amelyekre $\operatorname{Ind} \operatorname{Gr} U \leqq n-1$; végül $\operatorname{Ind} X = n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, ha $\operatorname{Ind} X \leqq n$ és $\operatorname{Ind} X \not\leqq n-1$. Azt a tényt, hogy valamely X térnek nincs ilyen dimenziója, az $\operatorname{Ind} X = \infty$ szimbólummal szokás kifejezni.

[2] DEFINÍCIÓ: $\dim \emptyset = -1$; $\dim X \leqq n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, ha X bármely véges nyílt lefedésének van olyan véges nyílt finomítása, amely szintén lefedése X-nek és amelynek rendje legfeljebb $n+1$, ami azt jelenti, hogy ezen utóbbi halmazrendszer bármely $n+2$ tagjának metszete az üres halmaz; végül $\dim X = n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, ha $\dim X \leqq n$ és $\dim X \not\leqq n-1$. Azt a tényt, hogy valamely X térnek nincs ilyen dimenziója, a $\dim X = \infty$ szimbólummal szokás kifejezni.

a klasszikus dimenziók ekvivalenciája nem áll fenn vagy nincs bizonyítva, akkor a megfelelő három állítás természetesen külön-külön általánosítást kíván.

Ami mármost az A. típust illeti, ilyen eredményeknek két csoportját találtuk az I. és II. rész elkészülte óta.

Mindegyik tételcsoport bizonyos alaptételekre épül.

Az egyik csoport alaptételei [61]:

(18. 2) TÉTEL. *Ha egy X térre* $\operatorname{Dim} X=1$, *akkor* $\operatorname{ind} X \leqq 1$.

(18. 3) TÉTEL. *Ha egy X térre* $\operatorname{Dim} X=1$, *akkor* $\operatorname{Ind} X \leqq 1$.

(18. 4) TÉTEL. *Ha egy X térre* $\operatorname{Dim} X=1$, *akkor* $\dim X \leqq 1$.

Talán említést érdemel az a (nem is az ID-re vonatkozó) tény, amely e három tételnek (3. 7)-tel való összekapcsolásából adódik:

(18. 5) TÉTEL. *Ha X rendezéstopologikus tér, akkor*

$$\operatorname{ind} X \leqq 1, \quad \operatorname{Ind} X \leqq 1, \quad \dim X \leqq 1.$$

A három alaptétel további, nehezebben bizonyítható következményei közül megemlítjük a következőket [61]:

(18. 6) TÉTEL. *Ha X olyan lokálisan kompakt metrikus tér, amelyre* $\operatorname{Dim} X<\aleph_0$, *akkor*

$$\dim X \leqq \operatorname{Dim} X.$$

(18. 6a) TÉTEL. *Ha X olyan rendes T_0-tér, amely a Lindelöf-tulajdonsággal bír, és amelyre* $\operatorname{Dim} X<\aleph_0$, *akkor*

$$\dim X \leqq \operatorname{Dim} X.$$

A másik tételcsoport alaptételei [62]:

(18. 7) TÉTEL. *Ha X olyan tér, amelyre* $\operatorname{Dim} X<\aleph_0$, *akkor*

$$\operatorname{ind} X \leqq \operatorname{Dim} X.$$

(18. 8) TÉTEL. *Ha X kompakt tér és* $\operatorname{Dim} X<\aleph_0$, *akkor*

$$\operatorname{Ind} X \leqq \operatorname{Dim} X.$$

(A (18. 7) tétel a (18. 1) A. tétel ind-re vonatkozó részének, a (18. 2) tételnek és a 0. § apróbetűs részében említett tételnek egyaránt a lehető legmesszebbmenő általánosítása.) Itt is számos érdekes következmény adódik. (18. 7)-ből és (18. 8)-ból pl. (az első esetben P. SZ. ALEXANDROV tétele alapján, amely szerint, ha X kompakt HAUSDORFF-tér és $\operatorname{ind} X<\infty$, akkor $\dim X \leqq \operatorname{ind} X$ [57]; a második esetben pedig N. VEGYENNYISZOV tétele alapján, amely szerint, ha X normális HAUSDORFF-tér és $\operatorname{Ind} X<\infty$, akkor $\dim X \leqq \operatorname{Ind} X$ [77]) egyaránt adódik a következő, (18. 7) és (18. 8) mellé szinte „odakívánkozó” tétel:

(18. 9) TÉTEL. *Ha X kompakt* HAUSDORFF-*tér és* $\operatorname{Dim} X<\aleph_0$, *akkor*

$$\dim X \leqq \operatorname{Dim} X.$$

(18. 10) Az alkalmazás további példájaként közöljük (18. 6)-nak egy (18. 9)-en alapuló és a [61]-belinél lényegesen rövidebb bizonyítását:

C. H. Dowker egy tétele ([64] 108) szerint *a parakompakt normális X terek körében* dim X *ekvivalens* loc dim X*-szel.*[3]

Ez a tétel speciálisan metrikus X terekre is alkalmazható. Ha mármost X lokálisan kompakt metrikus tér, akkor minden egyes x pontjának van kompakt (tehát egyben zárt) U_x környezete, és az ID monotonitása alapján $\mathrm{Dim}\, U_x \leqq \mathrm{Dim}\, X$. Ha végül — mint ahogyan feltételeztük — $\mathrm{Dim}\, X < \aleph_0$, akkor (18. 9) szerint $\dim U_x \leqq \leqq \mathrm{Dim}\, X \, (x \in X)$, vagyis loc dim X definíciója értelmében $\mathrm{loc}\dim X \leqq \mathrm{Dim}\, X$. Ez utóbbi pedig Dowker idézett tétele szerint ekvivalens a $\dim X \leqq \mathrm{Dim}\, X$ egyenlőtlenséggel, qu. e. d.

Bemutatjuk még (18. 9) következő alkalmazását:

(18. 11) Tétel. *Ha X σ-kompakt T_3-tér*[4] *és* $\mathrm{Dim}\, X < \aleph_0$, *akkor*

$$\dim X \leqq \mathrm{Dim}\, X.$$

Bizonyítás. Ismeretes, hogy minden σ-kompakt T_3-tér parakompakt (pl. [33] 172 vagy [37] 96); ismeretes továbbá, hogy ha $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ egy (akár csak lokálisan) megszámlálható, zárt lefedő rendszere egy parakompakt X térnek és

$$\sup \{\dim X_\alpha : \alpha \in A\} < \infty,$$

akkor

$$\dim X \leqq \sup \{\dim X_\alpha : \alpha \in A\}$$

(pl. [47] 195). Legyen mármost

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i,$$

ahol mindegyik X_i kompakt altere X-nek; az ID monotonitása miatt ekkor

$$\mathrm{Dim}\, X_i \leqq \mathrm{Dim}\, X \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Az X_i alterek természetesen Hausdorff-terek, tehát (18. 9) szerint

$$\dim X_i \leqq \mathrm{Dim}\, X \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Ha most még tekintetbe vesszük, hogy az X_i-k zártak is, akkor az idézett összegtétel szerint

$$\dim X \leqq \mathrm{Dim}\, X$$

következik, qu. e. d.[5]

[3] Definíció: $\mathrm{loc}\dim \emptyset = -1$; $\mathrm{loc}\dim X \leqq n \, (n = 0, 1, 2, \ldots)$ azt jelenti, hogy minden $x \in X$ pontnak van olyan zárt U_x környezete, amelyre $\dim U_x \leqq n$; végül $\mathrm{loc}\dim X = n \, (n = 0, 1, 2, \ldots)$, ha $\mathrm{loc}\dim X \leqq n$ és $\mathrm{loc}\dim X \nleqq n - 1$. Azt a tényt, hogy valamely X térnek nincs ilyen dimenziója, a $\mathrm{loc}\dim X = \infty$ szimbólummal fejezzük ki.

[4] A „T_3-tér" kifejezést a „reguláris T_1-tér" értelemben használjuk.

[5] A (18. 11) tétel *valódi* kiterjesztése a (18. 9) tételnek: (18. 11) természetesen vonatkozik minden kompakt Hausdorff-térre, de pl. a megszámlálhatóan végtelen diszkrét tér olyan σ-kompakt T_3-tér, amely nem kompakt. Erre az X térre egyébként triviálisan $\dim X = 0$ és (3. 6) szerint $\mathrm{Dim}\, X = 1$.

Mindezek után természetes az első kérdésfelvetés:

(18. 12) Probléma. *Tereknek mely (az összes szeparábilis metrikus tereket tartalmazó vagy esetleg más) további osztályaira és mely klasszikus dimenziókra érvényesek* A. *típusú tételek?*

Úgy tűnik, hogy még sok lehetőség van ilyen eredmények elérésére, akár az alapvető (18. 2), (18. 3), (18. 4), ill. (18. 7), (18. 8), (18. 9) tételek kiaknázásával, akár más módon.[6]

Lényegesen nehezebbnek látszik azonban valamely, a szeparábilis metrikus tereknél bővebb osztályra vonatkozó B. *típusú* tételt nyerni,* ami mind ez ideig nem is sikerült. Hogy itt mekkora nehézségekre kell számítani, azt talán érzékeltetheti az a szoros kapcsolat, amely mind a (18. 1), B. tétel, mind e tétel a három klasszikus dimenzió valamelyikére vonatkozó részének egy a szeparábilis metrikus terekénél ténylegesen bővebb $\mathfrak{X}$ osztályra vonatkozó esetleges kiterjesztése és a MENGER—NÖBELING-féle (0. 8) beágyazási tétel (a) része között fennáll. Egyrészt a (18. 1), B. tételt (0. 8), (a) felhasználásával bizonyítottuk (l. (5. 3) bizonyítását). Másrészt: ha egy ilyen $\mathfrak{X}$ osztályra igaz lenne pl. az

$$X\in\mathfrak{X},\ \operatorname{ind} X<\infty\Rightarrow \operatorname{Dim} X\leqq 2.\operatorname{ind} X+1,$$

$$X\in\mathfrak{X},\ \operatorname{Ind} X<\infty\Rightarrow \operatorname{Dim} X\leqq 2.\operatorname{Ind} X+1,$$

$$X\in\mathfrak{X},\ \dim X<\infty\Rightarrow \operatorname{Dim} X\leqq 2.\dim X+1$$

állítások valamelyike, akkor ebből a (10. 1) beágyazási tétel és a három klasszikus dimenziónak a szeparábilis metrikus terek körében való ekvivalenciája alapján következne a (0. 8), (a) tétel. Várható tehát, hogy az ilyen általános B. típusú tételnek — ha egyáltalán létezik — legalább olyan nehéz a bizonyítása, mint a MENGER—NÖBELING-tétel (a) részéé.

Egy további körülmény pedig arra mutat, hogy a probléma még ennél is sokkal nehezebb lehet. A MENGER—NÖBELING-tételnek (tudomásunk szerint) minden bizonyításában ui. lényegesen kihasználják az ún. felbontási tételt[6a]. Mivel pedig

[6] Megjegyzendő, hogy eddigi vizsgálódásaink során még egyetlen olyan X térre sem bukkantunk, amelynek valamely klasszikus dimenziója véges és az ID-jánál határozottan nagyobb volna. Érdemes tehát a kérdést így is megfogalmazni:

(18. 12.a) Probléma. *Van-e olyan X tér, amelyre a*

$$\operatorname{Dim} X<\operatorname{ind} X<\infty,$$

$$\operatorname{Dim} X<\operatorname{Ind} X<\infty,$$

$$\operatorname{Dim} X<\dim X<\infty$$

relációk valamelyike teljesül?

Az ilyen példák megtalálása vagy akár csak keresése is bizonyára elősegítené a (18. 12) probléma megoldását.

[6a] *Egy szeparábilis metrikus X térre pl. akkor és csak akkor* $\operatorname{Ind} X\leqq n$ $(n=0,1,2,\ldots)$, *ha X előállítható az*

$$X=\bigcup_{i=1}^{n+1}X_i,\quad \operatorname{Ind} X_i\leqq 0\qquad (i=1,2,\ldots,n+1)$$

alakban (pl. [31] 32; tetszőleges metrikus terekre pl. [47] 19).

ezzel analóg tétel az ID-ra vonatkozóan nem áll rendelkezésre (sőt nagyon valószínűtlen is, hogy az ID-nak volna ilyen tulajdonsága), azért az egész problémakör megközelítését talán azzal kellene kezdeni, hogy megkíséreljük a MENGER—NÖBELING-tétel (a) részét a felbontási tétel nélkül bizonyítani. Azon túl, hogy az ilyen bizonyítás létezésének ténye önmagában is igen érdekes lenne, a bizonyítás módszerét esetleg fel lehetne használni az ID-ra vonatkozó itt felvetett probléma megoldására, amelyet talán így célszerű megfogalmazni:

(18. 13) Probléma. *Van-e a szeparábilis metrikus tereknél ténylegesen bővebb $\mathscr{X}$ osztály, továbbá olyan (n nemnegatív egész értékein értelmezett pozitív egész értékű) $f(n)=O(n)$ függvény (optimális esetben $f(n)=2n+1$), hogy az*

$$X\in\mathscr{X},\ \mathrm{ind}\ X<\infty\Rightarrow \mathrm{Dim}\ X\leqq f(\mathrm{ind}\ X),$$

$$X\in\mathscr{X},\ \mathrm{Ind}\ X<\infty\Rightarrow \mathrm{Dim}\ X\leqq f(\mathrm{Ind}\ X),$$

$$X\in\mathscr{X},\ \dim X<\infty\Rightarrow \mathrm{Dim}\ X\leqq f(\dim X)$$

állítások valamelyike igaz?

Ha e problémára vonatkozó *pozitív* eredményt nem is sikerült még elérni, talán elősegítik a probléma megközelítését a *negatív* eredmények, ti. az olyan (sajnos metrikus, tehát a szeparábilis metrikus tereknél „nem is sokkal" általánosabb) terek példái, amelyek biztosan nem tartoznak valamely (18. 13) szerinti $\mathscr{X}$ osztályhoz. Ilyenek pl. az $S(A)$ csillagterek[7], amelyekről nagyon könnyen belátható, hogy

[7] A csillagtér fogalmát H. J. KOWALSKY vezette be [70] dolgozatában, hogy ennek segítségével az URISZON-féle beágyazási tételnek egy közvetlen általánosítását fogalmazza meg, amely R. H. BING nevezetes metrizációs tételével ([58], vagy pl. [33] 127, 130) szemben az általános metrikus tereket nem egy intern, hanem egy extern (beágyazhatósági) tulajdonsággal karakterizálja.

DEFINÍCIÓ: (A rövidség kedvéért egy KOWALSKYénál tömörebb fogalmazást választunk.) Legyen A egy nem-üres indexhalmaz és

$$S(A)=\{0\}\cup\bigcup\{(c,\alpha):0<c\leqq 1,\ \alpha\in A\}.$$

Nevezzük az ilyen $S(A)$ halmazt *csillag*nak, amelynek a

$$\{0\}\cup\{(c,\alpha):0<c\leqq 1\}\qquad(\alpha\in A)$$

részhalmazai az ún. *sugarai.* Minden csillag egyenlő sugarainak egyesítésével. Ha mármost egy $S(A)$ csillagot azzal a (nyilvánvaló) metrikával ruházunk fel, amelyet a

$$\delta(x,y)=\begin{cases}|x-y| & \text{ha } x \text{ és } y \text{ egyazon sugárhoz tartoznak,}\\ |x|+|y| & \text{ha } x \text{ és } y \text{ nem tartoznak egyazon sugárhoz}\end{cases}$$

$$(x,y\in S(A))$$

függvény határoz meg, akkor az így kapott metrikus teret (az A indexhalmazhoz tartozó) *csillagtér*nek nevezzük.

KOWALSKY említett tétele így hangzik: *egy tér akkor és csak akkor metrizálható, ha topologikusan beágyazható megszámlálhatóan sok csillagtér topologikus szorzatába* ([70] 337).

(E rendkívül érdekes tétel különböző kiegészítéseit, továbbá ezeknek dimenzióelméleti vonatkozásait illetően l. pl. [47] 184.)

dimenziójuk mindhárom klasszikus értelemben 1-gyel egyenlő, bármilyen számosságú legyen is az A halmaz. Ami viszont egy csillagtér ID-ját illeti, biztos, hogy

$$\text{Dim}\, S(A) = \bar{\bar{A}} \quad (\bar{\bar{A}} > \aleph), \tag{18.13.1}$$

és valószínű, hogy

$$\text{Dim}\, S(A) \geqq \aleph_0 \quad (\aleph_0 < \bar{\bar{A}} \leqq \aleph). \tag{18.13.2}$$

Érdekes, hogy viszont biztosan

$$\text{Dim}\, S(A) \leqq 2 \quad (\bar{\bar{A}} \leqq \aleph_0), \tag{18.13.3}$$

tehát 2-nél nagyobb véges ID a csillagterek körében valószínűleg nem is fordul elő.[8] A (18. 13)-nak esetleg megfelelő $\mathfrak{X}$ osztály karakterizálásánál tehát bizonyára szerepet játszanak majd olyan „jó" tulajdonságok (pl. lokális kompaktság stb.), amelyekkel a nem-megszámlálható, sőt általában a végtelen A-hoz tartozó csillagterek nem rendelkeznek; ilyen módon tehát ezek és az ezekhez hasonló esetleges további ellenpéldák hasznos iránymutatással szolgálhatnak a (18. 13) probléma megoldásához.

(18. 14). A várható nagy nehézségek és a kedvezőtlen előjelek ellenére is érdemesnek látszik a (18. 13) problémával foglalkozni, hiszen egy ilyen típusú eredménynek a már említetteken kívül további igen érdekesnek mondható következményei lennének. Pédaképpen megemlítjük a következőket:

1. *Azoknak az $\mathfrak{X}$-beli tereknek az* ID *végességével való karakterizálása, amelyeknek a megfelelő klasszikus dimenziója véges.* Ez tehát az (5. 4), 2° eredménynek az $\mathfrak{X}$ osztályra való kiterjesztése lenne (amelyhez persze nem is szükséges, hogy $f(n) = O(n)$ legyen).

2. *Olyan tételek, amelyek — a* (8. 4) *második beágyazási tétel alapján — biztosítják, hogy bármely $\mathfrak{X}$-beli rendes és a megfelelő klasszikus értelemben véges dimenziójú T_0-tér topologikusan beágyazható legyen megadott („nem túl nagy") számú rendezéstopologikus tér topologikus szorzatába.* (Az optimumnak, vagyis a lehető legkisebb tényezőszámnak a meghatározása — vö. (9. 2. 3) — ezen az úton persze nem érhető el.) Természetesen ez is MENGER—NÖBELING-típusú tétel lenne, amely a szeparábilis metrikus tereknél ténylegesen bővebb osztályra érvényes, de azon az áron, hogy tényezőterekként közelebbről alig karakterizált rendezéstopologikus tereket kellene megengedni (amelyekről csupán annyit tudunk mindenesetre, (1. 9. 3) alapján, hogy mint rendezett halmazok rendezés-teljesek, vagyis, hogy minden felülről, ill. alulról korlátos részhalmaznak van szuprémuma, ill. infimuma); igaz viszont, hogy ezek mindegyike, (18. 5) szerint, bármelyik klasszikus értelemben 1-dimenziós!

3. *Kompaktifikációs tételek,* amelyek bizonyos, valamelyik klasszikus értelemben véges dimenziójú, de ugyanezen dimenzióval nem kompaktifikálható terek esetében (vagy olyan esetekben, ahol ennek lehetősége nincs tisztázva) legalább annyit biztosítanának, hogy az illető tér topologikusan beágyazható „nem túl sok" (ugyanabban az értelemben) 1-dimenziós tér szorzatába; ehhez csupán a megfelelő

[8] A (18. 13. 3) állítás szinte triviális, hiszen $\bar{\bar{A}} \leqq \aleph_0$ esetén $S(A)$ igen könnyen beágyazható az euklidészi síkba. A (18. 13. 1) állítás bizonyítását és a (18. 13. 2) sejtéssel kapcsolatos részeredményeket egy későbbi dolgozatban fogjuk közölni.

(18. 12)-típusú tételnek a (8. 4) második beágyazási tétellel, továbbá (18. 5)-tel való összekapcsolása szükséges. Mivel pedig (1. 10) és TYIHONOV jól ismert szorzattétele (pl. [33] 143) szerint az így létrejövő szorzat szükségképpen kompakt HAUSSDORFF-tér, a (3. 7) és a (2. 6), (a) tételt, továbbá a (18. 7), (18. 8), (18. 9) tételek közül a megfelelőt felhasználva, végül is azt az eredményt nyernénk, hogy egy $\mathscr{X}$-beli rendes és *valamelyik* klasszikus értelemben véges dimenziójú T_0-tér *bármelyik* klasszikus értelemben „nem sokkal nagyobb" dimenzióval kompaktifikálható.[9]

Megjegyezzük még, hogy a 2. és 3. típusú tételek[10] olyan eredményeket fejeznének ki, amelyek — akárcsak a (18. 5) tétel — teljesen a „szokásos" dimenzióelmélet keretébe tartoznak (megfogalmazásukban nem szerepel az ID), de bizonyításuk (sőt a probléma felvetése is) az ID-n alapszik. Ez kétségtelenül igazolná az ID hasznosságát a klasszikus dimenziók elmélete szempontjából is. A problémák e csoportjának ilyen részletes ismertetésével éppen azt a törekvésünket is kívántuk kifejezni, hogy az ID-nak a hagyományos dimenziófogalmaktól kétségtelenül teljesen elütő koncepcióját (a saját, „intern" problematikájának feldolgozása mellett) *legalább következményeiben* lehetőleg közel vigyük a „szokásos" dimenzióelmélethez.

2. AZ IRÁNYDIMENZIÓ INDUKTIV ÉS LOKÁLIS DEFINÍCIÓJA

Az 1. pont befejező gondolatát folytatva megjegyezzük, hogy az ID elméletének további fejlődését (pl. az 1. pontban vázolt problémák megoldását is) talán elősegítené, ha sikerülne megszüntetni (vagy legalább enyhíteni) azokat a jelentős eltéréseket, amelyek már az ID *definícióját* is megkülönböztetik a klasszikus dimenziókétól.

Az ID fogalmának egyik lényeges formai eltérése a MENGER—URISZON- és a ČECH-dimenziótól egyaránt: definíciójának nem-induktív (nem-rekurzív) volta. Természetesen egyáltalán nem valószínű, hogy pusztán ez a körülmény lényegesen korlátozhatná az ID koncepciójának eredményességét.

Azt az elvet, hogy egy „természetes" dimenziófogalomnak induktív felépítésűnek kell lennie, először H. POINCARÉ mondta ki [49]-ben, ahol az ilyen dimenziódefiníciónak első példáját — mintegy prototípusát adta meg. Definícióját, amely több részletében nem volt eléggé precíz, L. E. I. BROUWER módosította [11]-ben az első korrekt, induktív (és egyébként kompaktumokra a későbbi MENGER—URISZON-félével ekvivalens) definícióvá. Az E. ČECH által bevezetett Ind X fogalmának definíciója az ind X-ével analóg; az eltérés az, hogy pontok környezetrendszere helyett zárt halmazok környezetrendszeréből indul ki (s ezzel persze elvész a fogalom lokális jellege). MENGER, alapvető [44] monográfiájában és több

[9] Itt a (3. 7), (2. 6),(a) és a (18. 7), (18. 8) ill. (18. 9) tételek együttese esetleg pótolható egyetlen tétellel, ti. a MENGER-féle (0. 6) szorzattétel valamelyik alkalmas ismert általánosításával vagy analogonjával; pl. a LEBESGUE-dimenzió esetében (ha lemondunk a „bármelyik" szóról), E. HEMMINGSEN következő tételével [68]: *ha X_1 és X_2 véges-Lebesgue-dimenziójú kompakt* HAUSDORFF-*terek, akkor*

$$\dim (X_1 \times X_2) \leqq \dim X_1 + \dim X_2 .$$

(Ezt csak példaképpen említjük; a dimenzióelmélet irodalmában több ilyen jellegű és az itt vázolt célra is alkalmas szorzattétel szerepel.)

[10] Tulajdonképpen itt ugyanannak a dolgonak, ti. a második beágyazási tételnek két különböző vonatkozásban való kiaknázásáról van szó.

más helyen, számos alkalommal hangsúlyozta a dimenzió induktív definíciójának természetességét és elengedhetetlenségét.

Az induktív felépítés mégsem vált általános követelménnyé a dimenzióelméletben, hiszen pl. a nevezetes LEBESGUE-féle „lefedési dimenzió" sem induktív, márpedig ennek a fogalomnak a jelentősége a dimenzióelméletnek már e dolgozat bevezetésében említett újabb, a nem okvetlenül szeparábilis, hanem tetszőleges metrikus terek körében mozgó szakaszában messze felülmúlja a másik két klasszikus dimenzió (de leginkább a kis induktív dimenzió) jelentőségét.

Mindazonáltal hasznos és érdekes lehetne az iránydimenziónak egy induktív — és legalább a topologikus terek valamely nem túl szűk osztályán az eredetivel ekvivalens — definícióját keresni. Talán alkalmas kiindulás a következő:

(18. 15) TÉTEL. *Legyen X tetszőleges tér, amelyre* $\mathrm{Dim}\, X \leqq n$ $(n=3, 4, \ldots)$. *Ekkor bármely $x \in X$ pont környezetrendszerének van egy bázisa olyan (X regularitása esetén akár zárt) környezetekből, amelyek mindegyikének H határa $n-1$ zárt H_i részhalmaz egyesítése, úgyhogy* $\mathrm{Dim}\, H_i \leqq n-1$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$.[11]

Ez az eredmény szinte magától értetődően indikálja a következő kérdéseket:

(18. 16) Probléma. *Lehet-e a* (18. 15) *tételt (esetleg nem tetszőleges X terekre, hanem azoknak valamely $\mathfrak{X}$ osztályára vonatkozóan) akár a H_i részhalmazok számát, akár azok* ID*-ját illetően lényegesen (tehát a* 11. *lábjegyzetben közölt* (18. 15.a) *tételen — amely tulajdonképpen „aszimptotikusan ekvivalens" (18. 15)-tel — túlmenően is) élesíteni?*

(18. 17) Probléma. *Van-e a tereknek olyan $\mathfrak{X}$ osztálya, amelybe tartozó végtelen* ID*-jú terekre is érvényes valamely* (18. 15)*-típusú tétel?*

(18. 18) Probléma. *Van-e a tereknek olyan $\mathfrak{X}$ osztálya, amelyekre vonatkozóan valamely* (18. 16)- *vagy* (18. 17)*-típusú tétel megfordítása is igaz?*

Ha erre a kérdésre igenlő volna a válasz, akkor ilyen módon $\mathrm{Dim}\, X$-nek egy (esetleg csak korlátozott érvényességi körű) induktív definíciójához jutnánk, amely ráadásul lokális is lenne, tehát (formailag) ezáltal is közelebb állna a *Menger—Uriszon*-dimenzió definíciójához.[12]

[11] Az $n=2$ esetre vonatkozó analóg tétel nyilvánvalóan nem igaz, $n=1$ esetén pedig az analóg állításnak nincs is értelme. — A tételt egyébként [59]-ben a következő élesebb fogalmazásban bizonyítjuk be:

(18. 15. a) TÉTEL: *Legyen $n \geqq 2$ természetes szám és X olyan tér, amelyre* $\mathrm{Dim}\, X \leqq n$. *Ekkor bármely $x \in X$ pont környezetrendszerének van bázisa olyan (X regularitása esetén akár zárt) környezetekből, amelyek mindegyikének határa előállítható* $\left[\frac{2n}{3}\right]$ *legfeljebb $n-1$* ID*-jú zárt részhalmaz egyesítéseként.*

(Ha c valós szám, akkor $[c]$ a legkisebb olyan egész számot jelenti, amely nem kisebb c-nél. — Az $n=2$ esetet itt nem kell kizárni.)

[12] Ami a lokális jelleget illeti: több lehetőség is kínálkozik arra, hogy az ID fogalmából kiindulva lokális jellegű (dimenzió-) fogalmakat alkossunk. Ezekre e helyen nem térünk ki.

Egyébként a lokális jelleg sem általános követelmény a dimenzióelméletben (bár pl. ALEXITS GYÖRGY e dolgozat bevezetésében már idézett [4] cikkében — a 46. oldalon — meggyőzően hangsúlyozza ennek jelentőségét), hiszen $\mathrm{Ind}\, X$ és $\dim X$ sem lokális dimenziófogalmak. Érdekes viszont, hogy a legújabb dimenzióelméleti irodalomban több különböző, $\mathrm{Ind}\, X$-ből, ill. $\dim X$-ből „előállított" új lokális dimenziófogalom merül fel (vö. pl. a 3. lábjegyzettel), amelyeket nem kis haszonnal alkalmaznak is.

3. Irányok metrizálhatósága

J. NAGATAtól származik a következő tétel ([73], 166):

(18. 19) TÉTEL. *Legyen X metrikus tér. Ha n természetes szám és* $\dim X \leqq n$, *akkor X topologikusan beágyazható $n+1$ olyan X_i metrikus tér topologikus szorzatába, hogy* $\dim X_i \leqq 1$ $(i=1, 2, \ldots, n+1)$.

Valószínűleg ma is nyitott kérdés azonban (legalábbis maga NAGATA 1965-ben megjelent könyvében még annak tartja), hogy nem elég-e minden esetben n tényező is? Érdekes mármost ezt összevetni a következővel, ami a (8. 4), (1. 10), (3. 7) és (18. 4) tételek következménye:

(18. 20) TÉTEL. *Legyen X rendes T_0-tér. Ha n pozitív természetes szám és* $\operatorname{Dim} X \leqq n$, *akkor X topologikusan beágyazható n olyan $\mathcal{R}_i$ kompakt rendezés-topologikus tér (ti. X bármely rendes minimális* IS-*ja elemeinek) topologikus szorzatába, hogy* $\dim \mathcal{R}_i \leqq 1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Az analógia szembeszökő, s e két tétel szembeállítása a kérdéseknek és lehetőségeknek egész sorát indikálja, amelyeknek közös magja a következő:

(18. 21) Probléma. *Meg lehet-e adni (célszerűen esetleg megszámlálható* ID-*jú) rendes T_0-tereknek olyan, a szeparábilis metrikus terekénél ténylegesen bővebb $\mathcal{X}$ osztályát, hogy bármely $X \in \mathcal{X}$ térnek legyen olyan rendes minimális* IS-*ja, amelynek minden iránya a rendezés-topológiával felruházva metrizálható?*

Azokra az eszközökre, amelyeknek felhasználását e probléma megoldására meg lehetne kísérelni, itt nem térünk ki; az általános topológia irodalmában egy tér metrizálhatóságának rengeteg elégséges feltételét adták már meg (csak példaképpen utalunk KOWALSKYnak az 1. pontban idézett tételére), s ezek egy része ráadásul dimenzióelméleti vonatkozású (vö. NAGATA [47] könyvének V. fejezetével).

A következőkben vázlatosan áttekintjük azokat az eredménytípusokat, amelyeket egy (18. 21)-típusú tétel tenne lehetővé[13]:

1. Ha $\mathcal{X}$ metrikus tereknek olyan osztálya, amelyre a LEBESGUE-dimenzióra vonatkoztatott (18. 12) probléma megoldást nyer, akkor (18. 20) révén olyan tételhez jutunk, amely NAGATA említett kérdését, ha nem is az általa tekintett

$$\{X\colon X \text{ metrikus tér}, \ \dim X \leqq n\} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

osztályokra, de legalább minden ilyen osztálynak *egy részére*, ti. a megfelelő

$$\{X \in \mathcal{X}\colon \operatorname{Dim} X \leqq n\}$$

osztályokra pozitívan megválaszolja.

2. Az előbbinek bizonyos értelemben fordítottja az a lehetőség, hogy a (18. 21) probléma valamely megoldása révén (18. 12)-nek egy megoldásához jussunk. Ha ui. $\mathcal{X}$ véges ID-jú és szükségképpen metrikus tereknek olyan osztálya, amelyre

[13] Itt lényeges szerepet játszik a következő két ismert (és szinte triviális) tény: megszámlálhatóan sok metrikus tér topologikus szorzata metrizálható, és minden metrikus tér minden (topologikus) altere is metrizálható.

a (18. 21) kérdés már pozitív választ nyert, akkor minden $X \in \mathscr{X}$ tér (18. 20) alapján topologikusan beágyazható egy olyan Y kompaktumba, amelyre (pl. HEMMINGSENnek a 9. lábjegyzetben közölt tétele szerint) $\dim Y \leqq \mathrm{Dim}\, X$; mivel pedig a metrikus terek körében a LEBESGUE-dimenzió ekvivalens a ČECH-dimenzióval[14] és (tehát mindkettő) monoton[15], továbbá minden X T_1-térre triviálisan $\mathrm{ind}\, X \leqq \mathrm{Ind}\, X$[16], mindebből az következne, hogy bármely $X \in \mathscr{X}$ térre

$$\mathrm{ind}\, X \leqq \mathrm{Ind}\, X = \dim X \leqq \dim Y \leqq \mathrm{Dim}\, X.$$

3. Ha sikerülne a (18. 21) problémát megoldani, akkor ebből — attól függően, hogy a megoldást jelentő $\mathscr{X}$ osztály karakterizációjában $\mathscr{X}$ tagjainak metrizálhatósága szerepel, ill. nem szerepel — az ID-val (ti. annak megszámlálható voltával) kifejezett elégséges feltételt nyernénk arra, hogy egy metrikus tér szeparábilis legyen (ui. minden kompaktum szeparábilis, tehát megszámlálható bázisú, és egy megszámlálható bázisú térnek minden altere is ilyen tulajdonságú), ill. hogy egy tér egyáltalán metrizálható legyen.[17]

4. A RENDES TEREK OSZTÁLYÁNAK KARAKTERIZÁLÁSA

Jelöljük

$\mathscr{A}$-val a tökéletesen normális T_0-terek,
$\mathscr{B}$-vel a rendes T_0-terek,

[14] Ezt, a dimenzióelmélet újabb szakasza számára talán legalapvetőbb tételt először M. KATETOV bizonyította be 1952-ben [69]; azóta többen (pl. K. MORITA [72], C. H. DOWKER, W. HUREWICZ) is bebizonyították. Egy bizonyítás és néhány irodalmi adat található NAGATA könyvében ([47] 22—28). — Egyébként a dimenzióelmélet „klasszikus" szakasza számára nem kevésbé alapvető az a (18. 1)-gyel kapcsolatban már említett tény, hogy a *szeparábilis* metrikus terek körében *mindhárom* klasszikus dimenzió ekvivalens. — Azt, hogy nem-szeparábilis metrikus tér kis induktív dimenziója nem okvetlenül egyezik meg a másik két dimenziójával, először P. ROY mutatta meg méltán nagyon híres [74] cikkében, amelyben olyan (ráadásul teljes) metrikus X teret konstruált, amelyről bebizonyította, hogy $\mathrm{ind}\, X = 0$ és $\dim X = 1$.

[15] $\mathrm{Ind}\, X$ monotonitásának bizonyítását illetően l. pl. [47] 19.

[16] Bizonyos X (nem okvetlenül szeparábilis) metrikus terekről tudjuk, hogy $\mathrm{ind}\, X = \mathrm{Ind}\, X$; ilyenek pl. az *erősen parakompakt* metrikus terek (amelyek ti. azzal az ún. „star-finite property"-val rendelkeznek, hogy minden nyílt lefedésüknek van olyan nyílt, és a teret szintén lefedő finomítása, amelynek minden egyes tagja ez utóbbi lefedő rendszernek legfeljebb véges sok más tagját metszi), sőt az olyan metrikus terek is, amelyek megszámlálhatóan sok zárt és erősen parakompakt altér egyesítéseként állíthatók elő.

A szóban forgó probléma azonban éppen ezekre a terekre vonatkozóan már nem probléma, mivel sikerült bebizonyítanunk, hogy ha X olyan véges ID-jú metrikus tér, amely megszámlálhatóan sok zárt és erősen parakompakt altér egyesítéseként állítható elő, akkor $\dim X \leqq \mathrm{Dim}\, X$ [61]. (A (18. 6) tétel ennek korolláriumaként adódik, hiszen minden lokálisan kompakt metrikus tér erősen parakompakt; ez utóbbi tény könnyen adódik ismert tételek egyszerű kombinációja révén, amint azt [61]-ben megmutattuk.)

[17] (3. 2) alapján nyilvánvaló, hogy az ID megszámlálható volta *szükséges* feltétele annak, hogy egy tér megszámlálható bázisú legyen, tehát speciálisan annak is, hogy egy metrikus tér szeparábilis legyen, de ez *nem elégséges* feltétel, még metrikus terek esetében sem. Ilyen szempontból is érdekes volna pl. a (18. 13. 2) sejtéssel foglalkozni. A legegyszerűbb (de a csillagtereknél bizonyára kevésbé érdekes) ellenpéldákat azok az X terek szolgáltatják, amelyeknek halmaza nem-megszámlálható, és topológiájuk a diszkrét topológia. Az ilyen X tér (mint minden diszkrét tér) metrizálható, továbbá (3. 6) szerint $\mathrm{Dim}\, X = 1$, és végül nyilvánvalóan nem szeparábilis.

$\mathscr{B}'$-vel a $\mathscr{B}$-beli terek összes altereinek, s végül
$\mathscr{C}$-vel a Tyihonov-terek (vagyis (8. 3) értelmében a gyengén rendes T_0-terek) osztályát.

Ekkor (7. 4)[18] és (2. 5), (b) alapján

$$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}' \subseteq \mathscr{C}.^{19}$$

[18] Megjegyezzük, hogy bár a ((7. 2) alkalmazása útján bizonyított (7. 3) tételen alapuló) (7. 4) tétel az itteni probléma szempontjából persze értékes, a II. rész főeredményeként szereplő (10. 1) „harmadik beágyazási tétel" bizonyításához „túl nagy ágyú" volt. Ott ti. (7. 4)-nek csak azt a (7. 5)-ben kimondott következményét kellett felhasználnunk, hogy *minden metrikus tér rendes.* Ez utóbbi pedig egyszerűen (ti. a (7.2) lemma nélkül is) bizonyítható, pl. az itt vázolt módon:

Legyen X metrikus tér, amelynek metrikáját $\delta(x, y)$-nal $(x, y \in X)$ jelöljük. Legyen továbbá $\mathfrak{R}$ X-nek egy nem-rendes minimális IS-ja és $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ X-nek valamely nem-rendes iránya, ami úgy is fogalmazható, hogy az

$$X^*(\mathscr{R}) = X \setminus \bigcup \{S: \ S \in \mathscr{S}(R)\},$$

$$X^*(x, \mathscr{R}) = \underline{G}(\mathscr{R}; F_x) \setminus \bar{F}(\mathscr{R}; G_x) \quad (x \in X^*(\mathscr{R})),$$

$$X(\mathscr{R}) = \bigcup \{X^*(x, \mathscr{R}): \ x \in X^*(\mathscr{R})\}$$

jelölésekkel

$$X(\mathscr{R}) = X^*(\mathscr{R}) \neq \emptyset.$$

Legyen mármost

$$G(x; y, t) = \begin{cases} \{y \in X^*(x, \mathscr{R}): \ \delta(y, \bar{F}(\mathscr{R}; G_x) < t\} & (\underline{G}(\mathscr{R}; F_x) = X, \ \bar{F}(\mathscr{R}; G_x) \neq \emptyset), \\ \left\{y \in X^*(x, \mathscr{R}): \ \dfrac{1}{\delta(y, X \setminus \underline{G}(\mathscr{R}; F_x))} < t\right\} & (\underline{G}(\mathscr{R}; F_x) \neq X, \ \bar{F}(\mathscr{R}; G_x) = \emptyset), \\ \left\{y \in X^*(x, \mathscr{R}): \ \dfrac{\delta(y, \bar{F}(\mathscr{R}; G_x)}{\delta(y, X \setminus \underline{G}(\mathscr{R}; F_x))} < t\right\} & (\underline{G}(\mathscr{R}; F_x) \neq X, \ \bar{F}(\mathscr{R}; G_x) \neq \emptyset) \end{cases}$$

$$(x \in X(\mathscr{R}), \quad 0 < t < \infty),$$

továbbá

$$F(x; y, t) = \begin{cases} \{y \in X^*(x, \mathscr{R}): \ \delta(y, \bar{F}(\mathscr{R}; G_x)) \leqq t\} & (\underline{G}(\mathscr{R}; F_x) = X, \ \bar{F}(\mathscr{R}; F_x) \neq \emptyset), \\ \left\{y \in X^*(x, \mathscr{R}): \ \dfrac{1}{\delta(y, X \setminus \underline{G}(\mathscr{R}; F_x))} \leqq t\right\} & (\underline{G}(\mathscr{R}; F_x) \neq X, \ \bar{F}(\mathscr{R}; F_x) = \emptyset), \\ \left\{y \in X^*(x, \mathscr{R}): \ \dfrac{\delta(y, \bar{F}(\mathscr{R}; G_x))}{\delta(y, X \setminus \underline{G}(\mathscr{R}; F_x))} \leqq t\right\} & (\underline{G}(\mathscr{R}; F_x) \neq X, \ \bar{F}(\mathscr{R}; G_x) \neq \emptyset) \end{cases}$$

$$(x \in X(\mathscr{R}), \quad 0 < t < \infty).$$

(Ezek a definíciók „értelmesek": az előforduló nevezők értéke sohasem 0; a

$$\underline{G}(\mathscr{R}; F_x) = X \quad \textit{és} \quad \bar{F}(\mathscr{R}; G_x) = \emptyset$$

esetet pedig ki lehet zárni, mert ha ez valamely $x \in X$ pontnál fennáll, akkor szükségképpen vagy

(1) $$\mathscr{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, X), (X, X)\}$$

vagy

(2) $$\mathscr{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (X, X)\};$$

márpedig (1) a feltevésünkkel ellentétben *rendes* irány, (2)-nek pedig „semmi keresnivalója" egy *minimális* IS-ban, hiszen indiszkrét X tér esetében pótolható (1)-gyel, nem-indiszkrét X tér esetében

Lényegében már (9. 1)-ben feltettük ezt a kérdést:

(18. 22) Probléma. *Hogyan helyezkedik el $\mathscr{B}$ az $\mathscr{A}$ és a $\mathscr{C}$ között?*

Mindenek előtt megjegyezzük, hogy

(18. 22. 1) $$\mathscr{A} \subset \mathscr{B}.$$

Ennek igazolására példát mutatunk be — csupán vázlatos bizonyítással — olyan rendes T_0-térre, amely még csak nem is normális:

Legyen P az a tér, amelynek alaphalmaza a nem-negatív valós számok halmaza és amelynek topológiáját az

$$\{[a, b): 0 \leqq a < b < \infty\}$$

bázis indukálja. P nyilván HAUSDORFF-tér[20]. Igen könnyen belátható, hogy az

$$\mathscr{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{0\}), (X, X)\} \cup \{([0, a), [0, a]): \ 0 < a < \infty\}$$

rendszer rendes iránya, $\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}\}$ pedig IS-ja P-nek, tehát

(α) $$\operatorname{Dim} P = 1$$

és

(β) *P rendes tér.*

---

pedig semmivel sem járul hozzá az $\mathfrak{R}$-félterek által szolgáltatandó szubbázishoz, tehát $\mathfrak{R}$-ből az összes esetleges ilyen irányok a rendszer IS-voltának csorbítása nélkül elhagyhatók.)

Mármost könnyen kimutatható, hogy az

$$\mathscr{R}' = \{(G(x; y, t), F(x; y, t)): \ x \in X(\mathscr{R}), y \in X^*(x, \mathscr{R}), 0 < t < \infty\}$$

jelöléssel az

$$\mathscr{R}'' = \mathscr{R} \cup \mathscr{R}'$$

rendszer is iránya, mégpedig rendes iránya X-nek. (A bizonyítás persze nem rövidebb, mint (7. 3)-é; a különbség a felhasznált eszközökben van: (7. 3) bizonyításához a (7. 2) lemma kellett, az itt jelzett bizonyításnál ehelyett csupán a metrika közismert (és szinte triviális) folytonosságára kell hivatkozni.) Végül is az

$$\mathscr{R}''' = \begin{cases} \mathscr{R} & (\mathscr{R} \in \mathfrak{R}, \ \ \mathscr{R} \text{ rendes}) \\ \mathscr{R}'' & (\mathscr{R} \in \mathfrak{R}, \ \ \mathscr{R} \text{ nem rendes}) \end{cases}$$

jelöléssel az

$$\mathfrak{R}''' = \{\mathscr{R}''': \ \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\}$$

rendszer olyan rendes IS-ja lesz X-nek, amelyre

$$\overline{\overline{\mathfrak{R}'''}} = \overline{\mathfrak{R}} \, (= \operatorname{Dim} X),$$

amivel elértük célunkat.

[19] Persze $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}$, hiszen — mint ismeretes — már a *normális* T_0-terek osztálya is ténylegesen szűkebb a TYIHONOV-terek (vagyis a teljesen reguláris T_0-terek) osztályánál. Az utóbbi tény illusztrálására pedig elegendő olyan normális T_1-térre hivatkozni, amelynek valamely altere nem normális, hiszen minden normális T_1-tér TYIHONOV-tér, és minden TYIHONOV-tér minden altere is TYIHONOV-tér. (Ilyen példára vonatkozóan l. pl. [3] 201—202.)

Érdekes egyébként a következő ismert példa is ([33]-ban bizonyítás nélkül — feladatként — megtalálható): a [0, 1] számszakasz nem-megszámlálhatóan sok példányának topologikus szorzata nem tökéletesen normális, ami legkönnyebben annak kimutatásával látható be, hogy e tér egyetlen G_δ-típusú részhalmaza sem lehet egyelemű halmaz. (Másrészt ez a tér — mivel TYIHONOV-terek szorzata — természetesen Tyihonov-tér, l. pl. [33] 117.)

[20] A P térre — érdekes, sőt, különös tulajdonságai miatt (l. pl. [33] 59, 133) — sokszor hivatkoznak az általános topológiai irodalomban: angolul „half-open interval space"-nek nevezik.

Tekintsük most az $X = P \times P$ „*Sorgenfrey*-teret", vagyis P-nek topologikus szorzatát önmagával. Az X tér tulajdonságai közül számunkra most csak az a lényeges, hogy az X tér, amely nyilvánvalóan HAUSDORFF-tér, *nem normális*[21]. Annak bizonyítására, hogy X *rendes* tér, elegendő mármost azt kimutatni, hogy

$$(\gamma) \qquad \operatorname{Dim} X = 2,$$

hiszen, ha ez így van, akkor X-nek az

$$\mathscr{R}_1 = \{(G \times X,\ F \times X):\ (G, F) \in \mathscr{R}\},$$

$$\mathscr{R}_2 = \{(X \times G,\ X \times F):\ (G, F) \in \mathscr{R}\}$$

nyilvánvalóan rendes irányaiból alkotott

$$\mathfrak{R}' = \{\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2\}$$

(szintén nyilvánvalóan) *rendes* IS-ja egyben *minimális* IS-ja, ami éppen X rendes voltát igazolja. Ami mármost (γ)-t illeti, a (2. 6), (a) szorzattétel és (α) szerint biztosan

$$\operatorname{Dim} X \leqq 2,$$

így hát most már minden azon múlik, hogy kimutassuk:

$$\operatorname{Dim} X \neq 1.$$

Márpedig, ha $\operatorname{Dim} X = 1$ volna, akkor X-nek normálisnak kellene lennie (ennek bizonyítását itt csak vázoljuk[22]), ami azonban ellentmond annak, amit Sorgen-

[21] R. H. SORGENFREY 1947-es [75] dolgozatában az X teret azért konstruálja, hogy általa kimutassa: két parakompakt tér topologikus szorzata nem okvetlenül parakompakt. Ez volt az első ilyen példa azóta, hogy DIEUDONNÉ 1944-ben bevezette a parakompaktság fogalmát (mint a kompaktság egy általánosítását), és többek között bebizonyította, hogy ha az egyik tényező nem csak parakompakt, hanem még kompakt is, akkor a szorzat parakompakt, továbbá, hogy minden parakompakt HAUSDORFF-tér normális. SORGENFREY mármost azt bizonyította be, hogy P parakompakt, tehát normális, viszont X nem normális, tehát nem is parakompakt. SORGENFREY tehát ezzel egyúttal arra a már ismert tényre is újabb példát adott, hogy két normális (akár HAUSDORFF-) tér topologikus szorzata nem okvetlenül normális.

[22] [61]-ben bebizonyítottuk a következőt:

(18. 22. a) TÉTEL. *Legyen* $\operatorname{Dim} X = 1$ *és* $\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}\}$ *tetszőleges minimális IS-ja X-nek. Ekkor bármely nem-üres* $U \subseteqq X$ *halmaz előállítható páronként diszjunkt „$\mathfrak{R}$-nyílt intervallumok" egyesítéseként, vagyis létezik olyan*

$$\mathscr{U} \subseteqq \{G \setminus F:\ G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}),\ F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}),\ F \subset G\}$$

halmazrendszer, amelyre

$$(G_1 \setminus F_1) \cap (G_2 \setminus F_2) = \emptyset \quad (G_1 \setminus F_1,\ G_2 \setminus F_2 \in \mathscr{U})$$

és

$$U = \bigcup \{G \setminus F:\ G \setminus F \in \mathscr{U}\}.$$

(Ezen a tételen alapult (18. 3) bizonyítása. Természetesen mindig

$$\overline{\overline{\mathscr{U}}} \leqq \tau(X),$$

s ha (18. 22. a)-t ezzel a kiegészítéssel látjuk el, akkor annak a közismert elemi ténynek az általánosításáról van szó, hogy a számegyenes bármely nem-üres nyílt részhalmaza előállítható szükségképpen megszámlálhatóan sok nyílt intervallum egyesítéseként. A számegyenest mint topologikus teret persze a „szokásos" IS-val ellátva kell tekintenünk.)

frey bizonyított be X-ről. X tehát valóban olyan rendes T_0-tér, amely nem normális[23].

A (18. 22. 1) eredménnyel megoldottuk a (18. 22) probléma egyik részét. A másik rész, ti. $\mathscr{B}$ és $\mathscr{C}$ viszonyának tisztázása, jóval nehezebbnek látszik. Természetesen a rendes T_0-terekre vonatkozó tételeinknek annál több és messzebb ható alkalmazása várható, minél bővebbnek adódik a $\mathscr{B}$ osztály. A legkedvezőbb az volna, ha $\mathscr{B}=\mathscr{C}$ adódnék, hiszen ekkor pl. az 1. és 2. beágyazási tétel az elég bő és sok tekintetben alapvető $\mathscr{C}$ osztályban lenne érvényes; továbbá ekkor a TYIHONOV-terek körében a „*rendes minimális* IS" fogalma ekvivalens lenne a „*minimális rendes* IS" fogalmával, s így tetszőleges irányok helyett eleve rendes irányokból kiindulva, egy „*rendes* ID"-fogalmat vezethetnénk be, amely a T_1-terek közül pontosan a Tyihonov-terekre lenne értelmezve, s ebben a körben ekvivalens lenne az iránydimenzióval.

E tétel felhasználásával sikerült bebizonyítanunk annak következő analogonját is:

(18. 22. b) TÉTEL. *Legyen* $\operatorname{Dim} X=1$ *és* $\mathfrak{R}=\{\mathscr{R}\}$ *tetszőleges minimális* IS*-ja* X*-nek. Ekkor bármely nem-üres zárt* $H\subseteq X$ *halmaz előállítható páronként diszjunkt „*$\mathscr{R}$*-zárt intervallumok" egyesítéseként, vagyis létezik olyan*

$$\mathscr{H}\subseteq\{F\setminus G:\ F\in\mathscr{F}(\mathscr{R}),\, G\in\mathscr{G}(\mathscr{R}),\, G\subset F\}$$

halmazrendszer, amelyre

$$(F_1\setminus G_1)\cap(F_2\setminus G_2)=\emptyset\quad(F_1\setminus G_1,\, F_2\setminus G_2\in\mathscr{H})$$

és

$$H=\bigcup\{F\setminus G:\ F\setminus G\in\mathscr{H}\}.$$

(Ha az $\mathfrak{R}$ IS *rendes*, akkor a tétel állítása triviális, hiszen akkor minden nem-üres zárt halmaz előállítható pl. $\mathfrak{R}$-síkok egyesítéseként; ha X *ráadásul* T_0-tér, akkor bármely nem-üres $\mathfrak{R}$-sík egyetlen pontot tartalmaz, s így ekkor — pl. a számegyenesre vonatkoztatva is — a tétel teljesen érdektelen trivialitássá fajul. Érdekes, hogy ennek és az előző tételhez fűzött megjegyzésnek ellenére mindkét tétel bizonyítása eléggé nehéz.)

Végül (18. 22. b) segítségével bebizonyítható az a tétel, amire a SORGENFREY-példa diszkussziójánál hivatkoznunk kell:

(18. 22. c) TÉTEL. *Ha egy* X *Haussdorff-térre* $\operatorname{Dim} X=1$, *akkor* X *normális tér.*

(A (18. 22. b) és a (18. 22. c) tétel bizonyítását egy későbbi dolgozatban fogjuk közölni.)

[23] SORGENFREY itt felhasznált eredményét pl. KELLEY ([33] 172) és NAGATA ([47] 196) is idézi. NAGATA azonban kiegészíti SORGENFREY példáját azzal a triviális, de dimenzióelméleti szempontból igen érdekes megjegyzéssel, hogy bár (nyilvánvalóan)

$$\dim P=0,$$

mégis

$$\dim X>0$$

(ui. — mint igen könnyen belátható — minden 0-LEBESGUE-dimenziójú tér normális). Itt tehát, bár normális, sőt parakompakt HAUSDORFF-terek szorzatáról van szó, mégsem érvényes a nevezetes

$$\dim(X_1\times X_2)\leqq\dim X_1+\dim X_2$$

egyenlőtlenség, amelynek érvényességi körét a dimenzióelméleti cikkek hosszú sorában vizsgálták már. (Vö. HEMMINGSENnek a 9. lábjegyzetben idézett tételével.)

NAGATA egyébként nem említi az idézett helyen, hogy ismeretes-e $\dim X$ értéke. Nem vizsgáltuk még meg, hogy mennyire nehéz volna ezt a „szokásos" dimenzióelmélet keretében megállapítani; mindenesetre megjegyezzük azonban, hogy az ID elmélete bizonyos felvilágosítást képes adni erről, ui. pl. a (18. 6. a) tétel (amely itt alkalmazható, hiszen X szinte nyilvánvalóan LINDELÖF-tér) és (γ) alapján

$$\dim X\leqq 2.$$

Ha viszont $\mathscr{B} \subset \mathscr{C}$ adódnék, akkor hasznos volna a $\mathscr{B}$ osztályt klasszikus topológiai kategóriákkal karakterizálni, amint az a gyengén rendes T_0-terek osztályával sikerült. Erre vonatkozóan a legtermészetesebb gondolat az, hogy egy T_0-tér rendességének esetleges elégséges feltételeként elsősorban a normalitás (vagy valamely ezt implikáló tulajdonság) vehető számításba. Ha ui. $\mathscr{R}_0$ egy X normális T_1-tér valamely nem-rendes iránya és

(18. 22. 1a) $$x \in X \setminus \bigcup \{S:\ S \in \mathscr{S}(\mathscr{R}_0)\},$$
akkor
$$\bar{F}(\mathscr{R}_0;\ G_x),\quad X \setminus G(\mathscr{R}_0; F_x),\quad \{x\}$$

páronként diszjunkt zárt halmazok; legyenek most
$$U_x \subseteqq X,\quad V_x \subseteqq X$$
olyan nyílt halmazok, amelyekre
$$\bar{F}(\mathscr{R}_0; G_x) \subseteqq U_x,\quad U_x \cap [(X \setminus \underline{G}(\mathscr{R}_0; F_x)) \cup \{x\}] = \emptyset,$$
$$X \setminus \underline{G}(\mathscr{R}_0; F_x) \subseteqq V_x,\quad V_x \cap (\bar{F}(\mathscr{R}_0; G_x) \cup \{x\}) = \emptyset;$$
ekkor az
$$\mathscr{R}(\{x\}) = \mathscr{R}_0 \cup \{(U_x, X \setminus V_x)\}$$

rendszer szintén iránya X-nek (amelynek definíció szerinti rendezésében a
$$(G_x, \bar{F}(\mathscr{R}_0; G_x)) \prec (U_x, X \setminus V_x) \prec (\underline{G}(\mathscr{R}_0; F_x), F_x)$$

párok közvetlen szomszédok), és amely — ha nem is okvetlenül rendes irány — annyival „rendesebb” $\mathscr{R}$-nél, hogy
$$x \in \bigcup \{S:\ S \in \mathscr{S}(\mathscr{R}(\{x\}))\},$$
ti.
$$x \in (X \setminus V_x) \setminus U_x \in \mathscr{S}(\mathscr{R}(\{x\})).$$

Kézenfekvő mármost ezt az eljárást folytatni, vagyis egyre bővebb

(18. 22. 2) $$Y \subseteqq \bigcup \{S:\ S \in \mathscr{S}(\mathscr{R})\}$$
halmazokhoz rendelni olyan
(18. 22. 3) $$\mathscr{R}(Y) \supseteqq \mathscr{R}_0$$
rendszereket, amelyekre
(18. 22. 4) $$Y \subseteqq \bigcup \{S:\ S \in \mathscr{S}(\mathscr{R}(Y))\}$$

és ily módon a jólrendezési tétel alkalmazásával olyan (az inklúzióra nézve) maximális (18. 22. 2)-típusú $\bar{Y}$-halmazhoz jutni, amelyre teljesül (18. 22. 3) és (18. 22. 4), és amelyről (X-re vonatkozó alkalmas kikötések mellett) esetleg kimutatható, hogy
$$\bar{Y} = X \setminus \bigcup \{S:\ S \in \mathscr{S}(\mathscr{R})\};$$
ez pedig azt jelentené, hogy
$$X = \bigcup \{S:\ S \in \mathscr{S}(\mathscr{R}(\bar{Y}))\},$$

vagyis, hogy $\overline{\mathscr{R}}(Y)$ olyan *rendes* iránya X-nek, amely tartalmazza $\mathscr{R}_0$-t.[23a] Ha végül X valamely nem-rendes minimális $\mathfrak{R}$ IS-jának minden nem-rendes $\mathscr{R}$ irányát ily módon egy rendes iránnyá bővítjük, akkor ezek $\mathfrak{R}$ eredetileg is rendes irányaival együtt X-nek egy rendes minimális IS-ját fogják alkotni, és az utóbbi létezése éppen azt jelenti, hogy az X tér rendes.

(18. 23). Ezt a „haditervet" átgondolva könnyen belátható (ezt itt nem végezzük el), hogy az csak akkor vezethet el a „győzelemhez", ha — akár az X-re kirótt további feltételekkel, akár a kiinduló minimális IS alkalmas megválasztásával, akár a bővítő eljárás megfelelő finomításaival, vagy esetleg többféle ilyen eszköz együttes alkalmazásával — biztosítható, hogy tetszőleges (vagy akár csak a vázolt eljárás során bizonyos módon fellépő) nyílt

$$A \subset B \subseteqq X$$

halmazokhoz mindig létezik olyan zárt $C \subseteqq X$ halmaz, amelyre

$$A \subseteqq C \subseteqq B.$$ [24]

Úgy tűnik, hogy a $\mathscr{B}$ osztály karakterizálásának kérdését éppen ezen a ponton kellene megragadni.

A $\mathscr{B} \subset \mathscr{C}$ esetben továbbá érdekes a következő kérdés is:

(18. 24) Probléma. *Hogyan helyezkedik el $\mathscr{B}'$ a $\mathscr{B}$ és a $\mathscr{C}$ között?*

Igaz-e pl. (ill. $\mathscr{B}$ mely $\mathscr{B}_1$ részére igaz), hogy ha $X \in \mathscr{B}$ (ill. $x \in \mathscr{B}_1$), akkor X-nek minden X^* alterére is $X^* \in \mathscr{B}$?[25]

E problémáról csupán annyit említünk meg, hogy ha X rendes tér, $\mathfrak{R}$ egy rendes minimális IS-ja X-nek és $X^* \subset X$, akkor az $\mathfrak{R}|X^*$ rendszer nyilvánvalóan rendes IS-ja az X^* altérnek; a kérdés magva az, hogy $\mathfrak{R}|X^*$ *minimális* IS-ja-e X^*nak?

Végezetül megemlítjük, hogy mindeddig egy X tér rendességét (természetesen kivéve azokat az eseteket, amelyekben *közvetlenül* sikerült X-nek egy — bebizonyíthatóan minimális — rendes IS-ját megkonstruálni, mint a (3. 6), (3. 7) tételeknél) mindig oly módon igyekeztünk kimutatni (akár sikerült, mint pl. a (7.3), (7.4) té-

[23a] Az eljárásnak több variánsa képzelhető el; lehet pl. ahelyett, hogy éppen egy *bizonyos* (18. 22. 1a)-féle x pont „kerüljön be egy síkba", vagy más szóval, hogy X egyre „rendesebbé" váló irányainak egy (jól-) *rendezett*, $\mathscr{R}_0$-lal kezdődő halmazát hozzuk létre, csupán arra törekedni, hogy az X tér $\mathscr{R}$ irányainak valamely olyan, akár az $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}_2$, akár az $\mathscr{S}(\mathscr{R}_1) \subset \mathscr{S}(\mathscr{R}_2)$ relációval *féligrendezett* halmazát konstruáljuk meg, amelynek $\mathscr{R}_0$ minimális eleme; ilyen eljárás esetén persze a jólrendezési tétel helyett pl. a ZORN-lemmával próbálkoznánk. (Azt, hogy X bármely nem-rendes iránya valamely ilyen, a (18. 22. 2)-ben kifejezettnél gyengébb értelemben rendesebbé tehető" legyen, esetleg valamely, az X normalitásánál gyengébb feltétel is biztosíthatná; másrészt viszont bizonyos, hogy a normalitásnál *sokkal* gyengébb feltétel nem lehet elegendő, hiszen $\mathscr{B} \subseteqq \mathscr{C}$ alapján elengedhetetlen, hogy X teljesen reguláris legyen.) Egyébként mindaz, amit (18. 22)-vel kapcsolatban még mondani fogunk, továbbá (18. 23) és az utóbbihoz fűzött 24. számú lábjegyzet a javasolt eljárás most említett variánsaira is vonatkozik.

[24] Ha pl. X egy összefüggő T_1-tér, $B \subseteqq X$ valamely nyílt halmaz, $x \in B$ és $A = B \setminus \{x\}$, akkor nyilván nincs olyan zárt $C \subseteqq X$ halmaz, amely (a mondott értelemben) a nyílt A és B halmazok közé iktatható. Más kérdés persze, hogy ez az A, B nyílt pár egyáltalán előfordulhat-e (vagy szükségszerű-e, hogy előforduljon) a vázolt eljárásban; ebben a kérdésben a jelen probléma érintkezik az e fejezet 9. pontjában ismertetendő problémakörrel.

[25] Erre a kérdésre eddig csupán egy rendkívül erős megszorítással — a $\mathrm{Dim}\, X = 1$ feltétel mellett — tudtunk válaszolni, ti. a (2. 5), (c) tétellel. — Egyébként a (2. 5), (b) tétel minden korlátozás nélkül pozitív választ ad a *rendes* terek helyett *gyengén rendes* terekre megfogalmazott analóg kérdésre.

telek esetében, akár csak mint problémát taglaltuk, hogy bebizonyítjuk: X bármely nem-rendes iránya, vagy bármely, sőt akár egyetlen nem-rendes minimális IS-jának minden nem-rendes iránya) kibővíthető egy rendes iránnyá. Ebből ui. nyilvánvalóan következik, hogy az X tér rendes. Talán megkísérelhető mármost az is, hogy egy X tér valamely nem-rendes $\mathfrak{R}_1$ IS-jából — az említett törekvés sikertelensége esetén — valamely más, bonyolultabb transzformáció útján nyerjük X-nek egy olyan rendes $\mathfrak{R}_2$ IS-ját, amelyre $\overline{\overline{\mathfrak{R}_2}} \leqq \overline{\overline{\mathfrak{R}_1}}$. (Ez tehát azt jelentené, hogy X-nek $\mathfrak{R}_2$-ből származó szubbázisa nem okvetlenül része az $\mathfrak{R}_1$-ből származó szubbázisnak.) Az ilyen eljárás azonban szinte reménytelenül nehéznek látszik; ráadásul nem is tudjuk, hogy indokolt-e vele foglalkozni, vagyis hogy léteznek-e egyáltalán olyan terek, amelyek rendesek ugyan, de rendességüket az egyszerűbb eljárással — hacsak nem szorítjuk meg valamely alkalmas módon a kiinduló IS megválasztását — *nem is lehet* bebizonyítani. Ezért ezen egész problémakörrel kapcsolatos utolsó kérdésünk ez:

(18.25) Probléma. *Létezik-e olyan X rendes (T_0-)tér, és X-nek egy olyan $\mathfrak{R}$ nem-rendes minimális* IS-*ja, hogy az $\mathfrak{R}$-ben szereplő nem-rendes irányok között van legalább egy, amely nem egészíthető ki rendes iránnyá?*

5. Az iránydimenzió axiomatikus karakterizálása

A kis induktív dimenzió axiomatikus karakterizálásának vitathatatlanul nagyon érdekes kérdését Menger vetette fel [71] dolgozatában (persze szeparábilis metrikus terekre vonatkozóan), de csak az euklidészi sík altereinek osztályára tudta megoldani. Eredménye így hangzik:

(18.26) Menger tétele. *Legyen $f(X)$ olyan, az E_2 tér összes altereinek $\mathfrak{X}$ halmazán értelmezett valós értékű függvény, amely*

(I) *monoton, azaz*

$$X_1,\, X_2 \in \mathfrak{X},\; X_1 \subset X_2 \Rightarrow f(X_1) \leqq f(X_2),$$

(II) *F_σ-konstans, azaz*

$$X_i \in \mathfrak{X},\; X_i \text{ zárt } E_2\text{-ben} \quad (i=1,2,\dots) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) \leqq \sup_{i=1,2,\dots} f(X_i),$$

(III) *„topologikus", azaz*

$$X_1,\, X_2 \in \mathfrak{X},\; X_1 \text{ homeomorf } X_2\text{-vel} \Rightarrow f(X_1) = f(X_2),$$

(IV) *„kompaktifikálható", azaz*

$$X \in \mathfrak{X} \Rightarrow \text{van } X\text{-nek olyan } X' \in \mathfrak{X} \text{ kompaktifikációja, amelyre } f(X') = f(X),$$

(V) *„normált", azaz*

$$f(\{x\}) = 0 \;\; (x \in E_2),\;\; f(E_1) = 1,\;\; f(E_2) = 2;$$

ekkor

$$f(X) = \operatorname{ind} X \quad (X \in \mathfrak{X}).$$

Az általános probléma tudomásunk szerint ma is megoldatlan (sőt, talán MENGER idézett tételének születése, vagyis 1929 óta nem értek el további részeredményt sem), és általános vélemény szerint rendkívül nehéz.[26] Talán nem túlzás ezt a kérdést a dimenzióelmélet egyik legmélyebb problémájának nevezni.[27]

A téma diszkussziója során egyelőre megmaradunk az E_2 tér alterei $\mathscr{X}$ családjának körében.

Érdemes megnézni, hogy milyen mértékben „illik rá" MENGER axiómarendszere az ID-ra. (Természetesen eleve tudjuk, hogy az ID nem elégítheti ki az összes axiómákat, hiszen akkor éppen MENGER tétele alapján

$$\mathrm{Dim}\, X = \mathrm{ind}\, X \quad (X \in \mathscr{X})$$

volna, ami nyilvánvalóan nem igaz.) Ármost a szóban forgó axiómarendszerben csupán két olyan axióma van (ti. a (II) és az (V) axióma), aminek az ID — mint f függvény — nem tesz eleget.

Először az (V) axiómával foglalkozunk, mert ez látszik a könnyebb kérdésnek, ui.

$$\mathrm{Dim}\, E_1 = 1, \quad \mathrm{Dim}\, E_2 = 2,$$

és csupán

$$\mathrm{Dim}\, \{x\} \neq 0 \qquad (x \in E_2).$$

Ezért első kérdésünk ez:

(18. 27) Probléma. *Lehet-e az* ID *definíciójából kiindulva (annak definícióját alkalmasan módosítva) legalább az $\mathscr{X}$ osztályra vonatkozóan egy olyan másik (talán „normált* ID"*-nak nevezhető)* Dim* X *dimenziófogalmat alkotni, amely egyrészt minden, az* ID *elmélete szempontjából lényeges tulajdonságban*[28], *továbbá esetleg*

[26] A probléma jelentőségét és irodalmát illetően l. pl. [31] 156, továbbá P. ALEXANDROFF: Einige Problemstellungen in der mengentheoretischen Topologie, MAT. CБОРНИК 1 (43), № 5, 619—634 (1936).

[27] Itt említjük meg (bár tartalmilag nem tartozik ide) a dimenzióelmélet egy másik híres problémáját, amelyet L. A. TUMARKIN vetett fel 1926-ban, s a széles körű érdeklődés ellenére is csak 1966-ban oldódott meg azáltal, hogy D. W. HENDERSON olyan végtelen dimenziós kompaktumot (kompakt metrikus teret) konstruált (l. pl. *Amer Journal of Math.* **89**, 105—121 és 122—123 (1967)), amelynek nincs tetszőlegesen nagy véges dimenziós részkompaktuma. TUMARKIN kérdése az volt, hogy létezik-e ilyen kompaktum.

Érdekes ármost, hogy TUMARKIN problémája (5.3) szerint ekvivalens azzal a kérdéssel, hogy létezik-e olyan kompakt metrikus X tér, amelyre

$$\mathrm{Dim}\, X = \aleph_0, \qquad \sup \{\mathrm{Dim}\, X^* : X^* \subset X,\ X^* \text{ zárt}\} < \aleph_0.$$

HENDERSON példája tehát ezt is eldöntötte. Mégis érdemesnek látszik (nem utolsósorban azért, mert HENDERSON konstrukciója meglehetősen bonyolult) arra törekedni, hogy az utóbbi kérdést (s ezzel együtt persze TUMARKIN kérdését is) az ID elméletének eszközeivel válaszoljuk meg. Talán nem érdektelen az sem, hogy TUMARKIN problémájával ellentétben az említett „iránydimenziós" kérdésfeltevés minden vonatkozásban messzemenően általánosítható.

[28] Ebbe persze beleértendő az (I) és a (III) Menger-axiómának, továbbá az (V) axióma második és harmadik részének teljesítése is; éppen ezért nem is kell e probléma megfogalmazásánál külön kikötni, hogy a normált ID egyáltalán „dimenziófogalom" legyen (0. 11) értelmében, hiszen az ottani követelmények éppen MENGER axiómarendszere most említett részeinek felelnek meg, csupán azzal az eltéréssel, hogy a (0. 11)-beli követelmények az (V) axióma első részét (vagy akár annál kevesebbet, hiszen (0. 11), (c) szerint csak az a lényeges, hogy $\mathrm{Dim}^* E_0 \neq \mathrm{Dim}^* E_1$ legyen) is megkívánják, de hiszen éppen ez az a „normáltság", amit a probléma megfogalmazásának folytatásában $\mathrm{Dim}^* X$-re vonatkozóan explicite meg fogunk követelni.

sok, az alkalmazások szempontjából lényeges $X \in \mathscr{X}$ tér dimenziójának értékében is megegyezik az ID*-val, és amelyre másrészt*

(18. 27. 1) $$\mathrm{Dim}^* E_0 = 0?$$ [29]

Megjegyezzük (vö. az ID (1. 14) definíciójához fűzött lábjegyzettel), hogy ez a probléma nem látszik nehéznek; talán sajnálatos is, hogy az ID egész koncepciójának megalkotásakor nem törekedtünk *eleve* a bevezetendő új dimenziófogalom *teljesen* „normált" voltának biztosítására. Az axiomatizálás témáját mindenesetre azzal a nem titkolt reménnyel diszkutáljuk tovább, hogy egy ilyen $\mathrm{Dim}^* X$ fogalmat (talán hamarosan) sikerül majd bevezetni.

Ez egyébként azért is örvendetes volna, mert egy ilyen $\mathrm{Dim}^* X$ $(X \in \mathscr{X})$ fogalom létezése bizonyos felvilágosítást nyújtana a MENGER-féle axiómarendszer *függetlenségére* vonatkozóan, ti. nyilvánvalóvá tenné, hogy a (II) MENGER-axióma nem következik a többiből (hacsak $\mathrm{Dim}^* X$ nem annyival „jobb" dimenziófogalom

[29] Természetesen a (2. 7) egyesítési tétel is az ID-nak olyan tulajdonságát fejezi ki, amelyet a „normált ID"-tól is meg kell követelnünk (hiszen ez a tétel — az összeadandók nyílt-zártságának megkövetelése miatt — pl. az $\mathscr{X}$ osztályra vonatkoztatva sajnos sokkal gyengébb is, mint a „szokásos" dimenzióelmélet ismert egyesítési tételei).

(Megemlítjük e helyen a (2. 7) tétellel kapcsolatban, hogy P. HAMBURG (Bukarest) szóbeli megjegyzése szerint — amelyért itt köszönetet is mondunk — olyan esetben, amikor a szóban forgó X_k halmazok páronként diszjunktak, nem szükséges előírni, hogy csak megszámlálható sokan legyenek. Az ID HAMBURG-féle egyesítési tétele — amelynek bizonyítása majdnem szóról szóra úgy történhet, mint a (2. 7) tételé — tehát így hangzik:

(18. 27. a) TÉTEL. *Ha $\mathscr{E}$ egy X tér páronként diszjunkt nyílt-zárt halmazainak olyan családja, hogy*

$$X = \bigcup \{E\colon\ E \in \mathscr{E}\},$$

akkor

$$\mathrm{Dim}\, X = \sup \{\mathrm{Dim}\, E\colon\ E \in \mathscr{E}\}.$$

Természetesen nagy kár, hogy — pl. HUREWICZ (0. 7) egyesítési tételéhez képest — itt a szereplő altereket igen erős feltételeknek kell alávetnünk, még inkább, mint a (2. 7) tételnél. Egyelőre nem is mutatkozik semmi remény arra, hogy akár csak a (2. 7) tételnél enyhíteni lehetne azon a szigorú kikötésen, hogy az illető részhalmazok nyílt-zártak legyenek. Ez persze erősen megszorítja azoknak az X tereknek a körét is, amelyekre akár csak a (2. 7) tétel alkalmazható, hiszen pl. összefüggő terek eleve nem tartozhatnak ebbe a körbe. Ezért csupán a következő három tény nyújt némi kárpótlást: egyrészt X-től azon jó tulajdonságok (pl. metrizálhatóság, megszámlálható bázis létezése, normalitás, parakompaktság stb.) egyikét sem kell megkövetelnünk, amelyek valamelyike a dimenzióelmélet minden ismert egyesítési tételében elengedhetetlen; másrészt nincs szükség az $\mathscr{E}$-re — mint X-et lefedő rendszerre — vonatkozó olyan szokásos feltételekre, mint pl. a lokális végesség vagy legalább lokális megszámlálhatóság; végül jelentős előnye a (18. 27. a) tételnek, hogy az $\mathscr{E}$ család tetszőlegesen nagy számosságú lehet.)

Visszatérve a (18. 27. 1) követelményre megemlítjük még, hogy az I. rész 193. oldalán tett ama kijelentésünk, hogy az ID a (0. 11) követelmények értelmében „megérdemli" a „dimenzió" nevet, egy kis korrekcióra szorul; ennek kijelentésénél ui. nem vettük figyelembe E_0-t, vagyis (az egyelemű térrel azonos) 0-dimenziós euklidészi teret, amelyet az ID sajnos nem különböztet meg az E_1 tértől. Az ID definíciójának (18. 27) értelmében való módosításával persze meg lehetne szüntetni ezt a bajt.

Ezzel kapcsolatban végül megjegyezzük, hogy a dimenzióelméletben uralkodó felfogás szerint egy „természetes" dimenziófogalomnak többé-kevésbé obligát tulajdonsága még az is, hogy a (18. 27. 1)-nek megfelelő tényen túlmenően minden (akár végtelen) megszámlálható tér dimenziója is 0 legyen (l. pl. [31] 154). A (18. 27) problémát persze úgy is fogalmazhatnánk, hogy (18. 27. 1) helyett az utóbbi erősebb követelményt támasztjuk a „normált ID"-val szemben, ami azonban egyáltalán nem célszerű, hiszen ezzel pl. „elrontanánk" az egyik fő eredményünket, ti. a normált ID esetében természetesen $n = 0$-ra is kiterjesztendő (10. 8) tételt.

Dim X-nél, hogy az utóbbival ellentétben még F_σ-konstans is, ami — mint már megjegyeztük — nagyon valószínűtlen).[30]

Mármost abból a feltételezésből kiindulva, hogy a (18. 27) probléma valóban megoldható (bár ez siker esetén is bizonyosan sok részletkérdés technikailag fáradságos tisztázását fogja megkövetelni), Menger (18. 26) tétele alapján úgy tűnik, hogy az ID és a MENGER—URISZON-dimenzió közötti — részben e dolgozat folyamán szinte folyamatosan emlegetett — sok különbség közül az az igazán mély különbség (pontosabban: a többi is végső soron „annak rovására írható"), ami MENGER (II) axiómájában — más szóval az ezen axióma (ami nem egyéb, mint HUREWICZ (0. 7) egyesítési tételének az $\mathfrak{X}$ osztályra való megszorítása) és az ID (2. 7) egyesítési tétele közötti eltérésben — fejeződik ki. Ebből persze természetesen adódik az a kérdés, amelyet az egész jelen problémakör magjának tekinthetünk:

(18. 28) Probléma. *Legyen* Dim* X *a* (18. 27) *probléma egy megoldása. Lehet-e ekkor* MENGER (18. 26)*-beli* $\mathfrak{A} = \{(\mathrm{I}), (\mathrm{II}), (\mathrm{III}), (\mathrm{IV}), (\mathrm{V})\}$ *axiómarendszerének* (II) *axiómáját valamely olyan* (II*) *axiómával helyettesíteni (és mi lenne az), hogy az*

$$\mathfrak{A}^* = \{(\mathrm{I}), (\mathrm{II}^*), (\mathrm{III}), (\mathrm{IV}), (\mathrm{V})\}$$

rendszer eleget tegyen az axiómarendszer formális logikai kritériumainak és az $\mathfrak{A}^*$ *axiómarendszer éppen* Dim* X*-et karakterizálja*?

(Talán az lenne a legszebb, ha (II*) szerepét éppen a (2. 7) tétel formális megfogalmazásának egy variánsa tölthetné be; maga (2. 7) nem felel meg, hiszen annak ind X is eleget tesz.)

Befejezésül megjegyezzük, hogy a (18. 27) és a (18. 28) probléma esetleges megoldása után — tekintet nélkül arra, hogy hogyan áll a MENGER felvetette általános probléma ügye — meg kellene próbálkozni azzal, hogy a bevezetett „teljesen normált ID" fogalmat E_2 altereinek $\mathfrak{X}$ osztályán túlmenően is axiomatikusan karakterizáljuk.

6. A SZORZATTÉTELLEL KAPCSOLATOS PROBLÉMÁK

Az ID-val kapcsolatban felvethető a hagyományos dimenziófogalmakra vonatkozó sok probléma analogonja.

A dimenzióelméletnek pl. sokat vizsgált kérdése, hogy MENGER (0. 6) szorzattételében mely esetekben érvényes a pontos egyenlőség? PONTRJAGIN mutatta meg először [50]-ben, hogy ez még tetszőleges kompaktumra sem igaz; HUREWICZ azonban bebizonyította [30]-ban, hogy egy n-dimenziós ($n=0, 1, 2, \ldots$) kompaktum és egy 1-dimenziós szeparábilis metrikus tér szorzata pontosan $(n+1)$-dimenziós[31]. (Azóta több más, ilyen jellegű tétel is ismeretessé vált; l. pl. [2] 60).

[30] Ezt csupán érdekessége miatt említjük meg. Új eredményt nem nyernénk ezen az úton, mert MENGER már idézett [71] dolgozatában bebizonyította axiómarendszerének függetlenségét.

[31] Annak, hogy (0. 6)-ban egyáltalán előfordulhat egyenlőtlenség is, szép példáját szolgáltatja a *Hilbert*-tér azon R^ω altere, amely az összes racionális elemekből (vagyis amelyeknek minden koordinátája racionális) áll. Ui. ERDŐS PÁL bebizonyította [65] dolgozatában, hogy ind $R^\omega = 1$; mivel pedig $R^\omega = R^\omega \times R^\omega$, nyilvánvalóan

$$\mathrm{ind}\,(R^\omega \times R^\omega) < \mathrm{ind}\, R^\omega + \mathrm{ind}\, R^\omega.$$

Vizsgálni kellene mármost az analóg kérdést az ID (2. 6), (a) szorzattételére vonatkozóan is:

(18. 29) Probléma. *A tereknek mely $\mathfrak{X}$ osztályaira és mely $\mathfrak{a}(\mathfrak{X})$ számosságokra igaz, hogy*

$$\operatorname{Dim}\left(\times\{X_\alpha:\ \alpha\in A\}\right) = \sum\{\operatorname{Dim} X_\alpha:\ \alpha\in A\}$$

$$\left(X_\alpha\in\mathfrak{X}, \alpha\in A, \overline{\overline{A}} \leqq \mathfrak{a}(\mathfrak{X})\right)?$$

Természetesen fontos volna példákat és ellenpéldákat gyűjteni.
Speciálisabb szorzat-kérdés a következő:

(18. 30) Probléma. *Mi egy „kocka" ID-ja? Pontosabban: megállapítandó*

$$\operatorname{Dim}[0, 1]^A \qquad (\overline{\overline{A}} > \aleph_0).$$

Erről — a (2. 6), (a) tétel révén, és mivel $\operatorname{Dim}[0, 1]=1$ — annyit tudunk, hogy bármely nem-üres A halmazra

$$\operatorname{Dim}[0, 1]^A \leqq \overline{\overline{A}}.$$

A kérdés valóban csak az $\overline{\overline{A}} > \aleph_0$ esetben nyitott, hiszen

$$\operatorname{Dim}[0, 1]^A = \overline{\overline{A}} \quad (\overline{\overline{A}} \leqq \aleph_0),$$

ui. ez lényegében nem más, mint az (5. 1) tétel (ha $\overline{\overline{A}} < \aleph_0$), ill. az (5. 2) tétel (ha $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$).

A (18. 30) probléma — egyszerű megfogalmazása ellenére — talán nagyon mélynek fog bizonyulni. Ha pl. igaz volna, hogy minden nem-üres A halmazra (vagy legalább minden olyan nem-üres A-ra, amelynek számossága nem nagyobb egy bizonyos $\mathfrak{a}_0 \geqq \aleph_1$ kardinális számnál) $\operatorname{Dim}[0, 1]^A = \overline{\overline{A}}$, akkor ez — figyelembe véve az ID monotonitását — Brouwer és Lebesgue nagy fontosságú (0. 10) invariancia-tételének egy ($\mathfrak{a}_0$-tól függően esetleg messzemenő) általánosítását szolgáltatná.

7. Iránytterek izomorfizmusai. Speciális iránytterek

A VT és az iránytér fogalmának rokonságát egy új oldalról is megvilágítandó, vezessük be a következő fogalmat:

(18. 31) Definíció. Legyenek $(X_1, \mathfrak{R}_1)$ és $(X_2, \mathfrak{R}_2)$ irányterek. X_1 és X_2 minden olyan egy-egyértelmű leképezését egymásra, amelynél $\mathfrak{R}_1$ és $\mathfrak{R}_2$ egymásba megy át (vagyis amely a két IS-nak, ezen belül a megfelelő irányoknak, s ezen belül a féltereknek egy-egyértelmű megfeleltetését indukálja), a két iránytér egy *izomorfizmusának*, ilyen leképezése esetén pedig a két irányteret *izomorfnak* nevezzük.

Egy L_1 és egy L_2 VT minden algebrai izomorfizmusa egyben az $(L_1, \mathfrak{R}^{(a)}(L_1))$, $(L_2, \mathfrak{R}^{(a)}(L_2))$ iránytereknek is izomorfizmusa.

Legyen B egy L VT valamely algebrai bázisa, és minden $b\in B$-re $R_b = R$ a valós számtest — mint VT — egy példánya. Ekkor L algebrailag izomorf az

$$R^B = \Pi\{R_b:\ b\in B\}$$

(lineáris) szorzattér azon lineáris alterével, amely a legfeljebb véges sok nem-zérus koordinátával bíró pontokból áll.

Ezzel analóg módon mármost tetszőleges $(X, \mathfrak{R})$ iránytérből képezhetünk egy $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{R}})$ irányteret, ahol

$$\tilde{X} = \prod\{\mathscr{R} : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\},$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{G}_{(G,F)}(\mathscr{R}) &= \{\tilde{x} \in \tilde{X} : \tilde{x}(\mathscr{R})\} \prec (G, F)\}\\ \tilde{F}_{(G,F)}(\mathscr{R}) &= \{\tilde{x} \in \tilde{X} : \tilde{x}(\mathscr{R}) \preceq (G, F)\}\end{aligned}\right. \quad ((G, F) \in \mathscr{R}, \mathscr{R} \in \mathfrak{R})$$

$\tilde{x}(\mathscr{R})$ az $\tilde{x}$ komplexus $\mathscr{R}$-koordinátája), és

$$\tilde{\mathscr{R}} = \{(\tilde{G}_{(G,F)}(\mathscr{R}), \tilde{F}_{(G,F)}(\mathscr{R})) : \ (G, F) \in \mathscr{R}\} \qquad (\mathscr{R} \in \mathfrak{R}),$$

$$\tilde{\mathfrak{R}} = \{\tilde{\mathscr{R}} : \ \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\}.$$

(Az $\tilde{\mathscr{R}}$-ok rendes irány volta és $\tilde{\mathfrak{R}}$ szeparálási tulajdonsága szinte triviális, tehát $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{R}})$ valóban IT.)

Jelöljük most Y-nal $\tilde{X}$ azon elemeinek halmazát, amelyek nem-üres (4. 1. 1) típusú metszetet szolgáltatnak; ekkor az az $f: X \to \tilde{X}$ leképezés, amelyre

$$f(x)(\mathscr{R}) = (G_x(\mathscr{R}), F_x(\mathscr{R})) \qquad (x \in X, \mathscr{R} \in \mathfrak{R})$$

az $(X, \mathfrak{R})$, $(Y, \tilde{\mathfrak{R}}|Y)$ iránytereknek egy izomorfizmusát indukálja.

(18.31.a) Irányterek speciális osztályait definiálhatjuk a következő típusú korlátozásokkal: csak olyan $(X, \mathfrak{R})$-eket engedünk meg, amelyeknél pl.

(a) az $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ irányok (halmazrendezési értelemben) páronként hasonlóak;

(b) az $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ irányoknak lineáris rendezettségükön kívül még valamilyen algebrai struktúrájuk is van, pl. (esetleg egymással izomorf) algebrai testek;

(c) X-nek, mint $\tilde{X}$ részhalmazának, valamilyen speciális tulajdonsága van; pl. az imént leírt f leképezésnél minden egyes $x \in X$-re

$$f(x)(\mathscr{R}) = f(x_0)(\mathscr{R}) \quad (\mathscr{R} \in \mathfrak{R}, \textit{ legfeljebb véges sok kivétellel}),$$

ahol x_0 az X tér egy kitüntetett eleme; vagy pl. $f[X]$ (azaz Y) vetülete minden $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$-re az egész $\mathscr{R}$ (ami egyértelmű a

$$\mathscr{G}(\mathscr{R}) \cap \mathscr{F}(\mathscr{R}) = \{\emptyset, X\} \qquad (\mathscr{R} \in \mathfrak{R})$$

követelménnyel, vagyis azzal, hogy $(X, \mathfrak{R})$-ben ne legyenek „üres síkok"); stb.

Minden ilyen megszorítás a VT fogalmához viszi közelebb az IT fogalmát. Ezen az úton haladva „szembetalálkozhatnánk" azzal az újabban jelentkező, ellenkező irányú törekvéssel, amely pl. V. KLEE [35] cikkében jelentkezik: a szerző a (valós) VT-ek elméletének több — éppen a konvexitással kapcsolatos és a KREIN—MILMAN-tétel gondolatkörébe tartozó — tételét olyan lineáris terekre viszi át, amelyeknek skalárteste — akárcsak a (valós!) VT-eké — rendezett algebrai test, de nem okvetlenül teljes.

8. Az euklidészi terek iránydimenziója

Az előzőekben több olyan kérdést vetettünk fel, amelynek az a közös tendenciája, hogy az ID elméletét összekapcsoljuk vagy legalább közelebb vigyük a „szokásos" dimenzióelmélethez. A most megfogalmazandó kérdésnek éppen ellenkező a tendenciája:

(18. 32) Probléma. *Be lehet-e bizonyítani a*

(18. 32. 1) $$\mathrm{Dim}\, E_n = n \quad (n=1, 2, \ldots)$$

tételt (vagyis, ami ezzel lényegében ekvivalens, a

(18. 32. 2) $$\mathrm{Dim}\, E_n \geqq n \quad (n=1, 2, \ldots)$$

egyenlőtlenséget, hiszen az ellenkező irányú egyenlőtlenség — vö. (3. 1. 3)*-mal — triviálisan igaz) úgy, hogy ne használjuk ki a klasszikus dimenzióelméletnek olyan mély eredményeit, mint az*

(18. 32. 3) $$\mathrm{ind}\, E_n = n \quad (n=1, 2, \ldots)$$

tétel (amelyben — vö. pl. [31] 25 *és* 41 *— szintén csupán az*

(18. 32. 4) $$\mathrm{ind}\, E_n \geqq n \quad (n=1, 2, \ldots)$$

egyenlőtlenség bizonyítása igen nehéz) vagy mint pl. Brouwer *és* Lebesgue (0. 10) *invariancia tétele?*

Arról van tehát szó, hogy érdekes lenne a (18. 32. 2) tételt — ellentétben annak (5. 1)-beli és (10. 7)-beli bizonyításával — „az ID elméleten belül" bebizonyítani. A triviális $n=1$ eseten kívül eddig csak az $n=2$ esetre találtunk ilyen bizonyítást (3. 5), 1°-ben, csupán a „tisztán iránydimenziós" (3. 4) tételre támaszkodva.

Szűkítsük le a problémát egyelőre E_3-ra, vagyis keressük annak iránydimenziós bizonyítását, hogy

(18. 32. 5) $$\mathrm{Dim}\, E_3 \geqq 3.$$

Talán érdemes megpróbálni a következő bizonyítás-vázlat megvalósítását:

Tény, hogy ha $\mathscr{R}$ egy X tér valamely iránya és $S \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$, ahol

$$S = F \setminus G, \quad (G, F) \in \mathscr{R}, \quad G \neq \emptyset, \quad F \neq X,$$

akkor az X tér zárt S részhalmaza *„szeparálja"* X-et, amin itt azt értjük, hogy X előállítható S-nek és két nem-üres nyílt halmaznak páronként diszjunkt egyesítéseként (egyébként $S=\emptyset$ is lehet).[32] Ekkor az X tér

$$X \setminus S$$

altere nyilvánvalóan nem összefüggő.

Tegyük fel mármost (18. 32. 5)-tel ellentétben, hogy

(18. 32. 6) $$\mathrm{Dim}\, E_3 < 3.$$

[32] Általában a „szeparálás"-nak egy ennél általánosabb fogalmát használják (sőt a dimenzióelméletnek szinte „mindennapos" eszköze, vö. pl. [31] 14), amire azonban itt nincs szükségünk.

Legyen ekkor $\mathfrak{N}$ egy rendes minimális IS-ja E_3-nak (itt tehát kihasználjuk E_3 rendes voltát), szóval

$$\overline{\overline{\mathfrak{N}}} \leqq 2.$$

Legyen továbbá

$$\mathscr{R} \in \mathfrak{N}, \quad S \in \mathscr{S}(\mathscr{R}),$$

mégpedig úgy, hogy S a fenti értelemben szeparálja E_3-mat. (Ilyen S biztosan létezik (bármelyik $\mathscr{R}$ elemét választanánk is $\mathfrak{N}$-nek), hiszen ha ezzel ellentétben $\mathscr{R}$ minden egyes (G, F) elemére fennállna a

$$G = \emptyset, \quad F = X$$

relációknak legalább egyike, akkor — $\mathscr{R}$ rendes irány és E_3 összefüggő lévén — csak

$$\mathscr{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, X), (X, X)\}$$

lehetne; ez viszont az IS definíciója értelmében „fölösleges" irány, más szóval

$$\mathfrak{N} \setminus \{\mathscr{R}\}$$

is IS-ja lenne E_3-nak, holott feltételeztük, hogy $\mathfrak{N}$ E_3-nak *minimális* IS-ja.) Ekkor tehát az

$$E_3 \setminus S$$

altér nem összefüggő, továbbá (az $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} = 1$ esetben (2. 5), (a) szerint, az $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} = 2$ esetben pedig (4. 3) alapján) biztosan

(18. 32. 7) $$\operatorname{Dim} S = 1.$$

Ha mármost biztosak lehetnénk abban, hogy S úgy választható meg, hogy az eddigi feltételek mellett még a (3. 4) tétel feltételeinek is eleget tegyen, akkor az ilyen S-re (3. 4) alapján

(18. 32. 8) $$\operatorname{Dim} S \geqq 2$$

következnék, ellentétben (18. 32. 7)-tel és tehát (18. 32. 6)-tal is; ezzel tehát elérnénk a célt, ti. (18. 32. 5) bebizonyítását.

Ami pedig a (3. 4) tétel feltételeit illeti: az, hogy $\overline{\overline{S}} \geqq 3$ (nyilvánvaló, hogy az E_3 teret egyetlen legfeljebb 3 elemű részhalmaza sem szeparálhatja), és az, hogy S T_0-tér legyen, automatikusan teljesül; ahelyett pedig, hogy bármely $x \in S$ pontra $S \setminus \{x\}$ összefüggő legyen, elég azt megkívánni, hogy S-nek legyen egy ilyen tulajdonságú S^* *altere*, amelyre szintén $\overline{\overline{S^*}} \geqq 3$ (és amely persze automatikusan T_0-tér is), hiszen ekkor

$$\operatorname{Dim} S^* \geqq 2,$$

amiből (1. 5), (a) szerint következik (18. 32. 8).

Mindezt egybevetve látható, hogy az E_3-ra leszűkített (18. 32) probléma visszavezethető a következő kérdésre:

(18. 33) Probléma. *Igaz-e, hogy bármely, az E_3 teret szeparáló zárt H altérnek (vagy ezek közül legalább minden olyannak, amelyre* $\operatorname{Dim} H = 1$*) van olyan H^**

altere, amelyre $\overline{\overline{H^*}} \geqq 3$, *és amely olyan tulajdonságú, hogy bármely* $x \in H^*$ *pontra a* $H^* \setminus \{x\}$ *altér összefüggő?*[33]

Ha ez nem igaz, vagy nem sikerül bebizonyítani, akkor megelégedhetünk e probléma következő szerényebb változatának esetleges pozitív megoldásával is:

(18. 34) Probléma. *Van-e az* E_3 *térnek olyan minimális* $\mathfrak{N}$ IS-*ja* (*$\mathfrak{N}$ rendességét nem kell megkövetelni!*) *és olyan* $\mathcal{R} \in \mathfrak{N}$ *irány, hogy valamely S* $\mathcal{R}$*-síknak legyen olyan* S^* *altere, amelyre* $\overline{\overline{S^*}} \geqq 3$ *és amelynek bármely* $x \in S^*$ *pontjára az* $S^* \setminus \{x\}$ *altér összefüggő?*

Ha végül valóban sikerülne (18. 32. 5)-öt ilyen módon bebizonyítani, akkor természetesen a következő feladat ez:

(18. 35) Probléma. *Tételezzük fel, hogy a* (18. 32) *problémának* $n=3$*-ra konkretizált változatát sikerült a vázolt módon megoldani. Lehet-e ekkor a követett módszert (természetesen valamilyen indukciós eljárással) az általános* (18. 32) *probléma megoldására átvinni?*

Könnyű belátni, hogy e problémát akkor tudjuk megoldani, ha sikeresen megbirkózunk a következő két problémával:

(18. 36) Probléma. *Milyen követelményeket lehetne egy X térre, annak egy* $\mathfrak{N}$ *minimális* IS-*jára, ill. egy* X^* *alterére kiróni, amelyek biztosítanák, hogy az* X^* *altér* $\mathfrak{N}|X^*$ IS-*ja minimális* IS-*ja legyen* X^**-nak?*

Ezt a kérdést már a (18. 24) problémával kapcsolatban is felvetettük.

(18. 37) Probléma. *Hogyan lehetne a* (3. 4) *tételt „magasabb* ID-*kra" általánosítani?*

Olyanféle tételekre gondolunk, amelyek — durván kifejezve — azt biztosítanák, hogy amennyiben egy elég sok pontot tartalmazó (és esetleg még más követelményeknek is eleget tevő) X tér olyan tulajdonságú, hogy bármely, eléggé nagy ID-jú X^* alterének komplementer altere összefüggő, akkor $\mathrm{Dim}\, X > \mathrm{Dim}\, X^*$.[34]

Végül megemlítjük, hogy (18. 32. 1) *lényegében* ekvivalens a mély (0. 10) tétellel, s ez karakterizálja az egész problémakör súlyosságát.

[33] BOGNÁR MÁTYÁS megjegyezte, hogy e probléma megfogalmazását — legalábbis akkor, ha a $\mathrm{Dim}\, H=1$ korlátozást elhagyjuk — nyilvánvalóan nem szabad azzal szigorítanunk, hogy elhagyjuk a H halmazok *altereire* vonatkozó részt, vagyis mindenképpen *maguktól a H-któl* kívánjuk meg a szóban forgó tulajdonságokat.

Valóban: legyen pl. A egy gömbfelület az E_3 térben, legyen

$$x, y \in E_3 \setminus A, \quad x \neq y$$

és végül

$$H = A \cup \{x, y\}.$$

Ekkor H nyilvánvalóan olyan zárt részhalmaza E_3-nak, amely az utóbbit szeparálja, és amelynek van olyan pontja (ti. akár x akár y), amelyet H-ból elvéve a keletkező altér nem összefüggő. (Igen könnyű ezt az ellenpéldát úgy módosítani, hogy H maga összefüggő legyen.)

Ha azonban (18. 33) megfogalmazásának akár a H ID-jára, akár az altereire vonatkozó részét megtartjuk, akkor már nem látszik ennyire könnyűnek ellenpéldát találni, ha esetleg a kérdésre a válasz negatív; hiszen a pozitív válasz — legalábbis az egyszerű szemlélet alapján — eléggé természetesnek tűnik.

[34] A (3. 4) tételnek egyébként jó néhány más típusú (de természetesnek látszó) változata és általánosítása is megfogalmazható sejtések formájában, amelyek bizonyára a (18. 32) problémától teljesen függetlenül, önmagukban is érdekesek, és igazolásuk esetén hasznos alkalmazásokkal kecsegtetnek; ezekre azonban itt nem térünk ki.

9. Minimális iránystruktúrákban szereplő félterek

Az (1. 12) észrevétel, a (18. 34) probléma, továbbá a (18. 23) probléma és az utóbbihoz fűzött 24. lábjegyzet egyaránt rávezet a következő két kérdésre:

(18. 38) Probléma. *Hogyan karakterizálhatók egy (esetleg valamilyen alkalmas vagy szükséges megszorításnak alávetett) X tér azon nyílt, ill. zárt halmazai, amelyek X egyetlen minimális (rendes X térnél esetleg rendes minimális) $\mathfrak{R}$ IS-jára vonatkozóan sem lehetnek $\mathfrak{R}$-félterei X-nek?*

A kérdés illusztrálására megjegyezzük, hogy pl. az E_2 euklidészi sík egy (akár nyílt, akár zárt) körlapja biztosan nem lehet $\mathfrak{R}$-féltér E_2 egyetlen minimális $\mathfrak{R}$ IS-jára nézve sem, hiszen különben a körlap határának, vagyis egy K körvonalnak — (4. 4) és (3. 5), 1° alapján — 1 volna az ID-ja, holott (3. 5), 2° szerint Dim K = 2.

(18. 39) Probléma. *Hogyan karakterizálhatók egy (esetleg valamilyen alkalmas vagy szükséges megszorításnak alávetett) X tér azon nyílt ill. zárt halmazai (ill. vannak-e egyáltalán ilyenek), amelyek X bármely, ill. valamely (rendes X térnél esetleg rendes) $\mathfrak{R}$ IS-jára nézve szükségképpen $\mathfrak{R}$-félterek?*

Euklidészi terekre szorítkozva pl. a következőképpen konkretizálhatók ezek a kérdések:

(18. 40) Probléma. *Van-e valamilyen — topológiailag egyszerűen jellemezhető — kapcsolat (pl. akár homeomorfizmus) egy E_n tér bármely (esetleg rendes) minimális $\mathfrak{R}$ IS-jában szereplő minden nem-triviális $\mathfrak{R}$-nyílt, ill. $\mathfrak{R}$-zárt féltér és E_n bármely nyílt, ill. zárt (közönséges értelemben vett) féltere között?*

(18. 41) Probléma. *Amennyiben az előző kérdésre igenlő a válasz, sőt a lehető legerősebb kapcsolat, vagyis homeomorfizmus áll fenn az E_n ott említett alterei között, igaz-e még az is, hogy egy $(E_n, \mathfrak{R})$ TIT, ahol $\mathfrak{R}$ egy rendes minimális IS-ja E_n-nek, minden egyes n természetes számra a* (18. 31)*-ben definiált értelemben izomorf a megfelelő $(E_n, \mathfrak{R}^{(a)}(E_n))$ TIT-rel?*[35]

(Megjegyezzük, hogy TIT-ek minden (18. 31) szerinti izomorfizmusa egyben homeomorfizmus, tehát „topologikus izomorfizmus".)

10. Birkhoff 111. problémája

Legyen M_n, ill. M_∞ az $n\times n$-es, ill. végtelen mátrixok lineáris tere;
D_n, ill. D_∞ az $n\times n$-es, ill. végtelen duplán sztochasztikus mátrixok halmaza;
P_n, ill. P_∞ az $n\times n$-es, ill. végtelen permutációmátrixok halmaza.
G. Birkhoff [6]-ban bebizonyította, hogy
(18. 9. 1) *az M_n térben $D_n = [P_n]$.*
Birkhoff [7] könyvének nevezetes 111. problémája mármost az a kérdés, hogy:

(18. 42) Probléma. *Miképpen vihető át a* (18. 9. 1) *tétel a végtelen esetre?*

[35] Mint ismeretes, $\mathfrak{R}^{(a)}(E_n) = \mathfrak{R}^{(t)}(E_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$, tehát semmi jelentősége nincs annak, hogy a probléma megfogalmazásában E_n algebrai vagy topológiai IS-ját szerepeltetjük-e.

Mivel M_∞-ben $D_\infty \supset [P_\infty]$, kézenfekvő M_∞-nek olyan megengedett topológiáit keresni, amelyekben D_∞ P_∞-nek *zárt* konvex burka, s ilyen természetű eredmények valóban születtek. (A kérdéskör ismertetése és irodalmának áttekintése megtalálható pl. RÉVÉSZ PÁL [52] összefoglaló cikkében.)

Nyilvánvaló a probléma kapcsolata a KREIN—MILMAN-tétellel, hiszen a P_n, ill. a P_∞ halmaz elemei éppen a D_n, ill. D_∞ halmaz extremális pontjai az M_n, ill. M_∞ térben. Az irányterek elméletét tehát a következő két módon lehet talán e problémakörben felhasználni:

(18. 43) Probléma. *Az M_∞ halmazra (esetleg $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$ felhasználásával) olyan* (M_∞, $\mathfrak{R}$) IT-*eket építeni, amelyekben* $D_\infty = \mathrm{k}(\mathfrak{R}; P_\infty)$ *vagy* $D_\infty = \mathrm{ek}(\mathfrak{R}; P_\infty)$.

(18. 44) Probléma. *Az előző kérdést „topologizálva": az M_∞ halmazra olyan* (M_∞, $\mathfrak{R}$) TIT-*eket építeni, amelyekre nézve* $D_\infty = \underset{\cdot}{\mathrm{z}}\mathrm{k}(\mathfrak{R}; P_\infty)$, *vagy* — (17. 1), (a)-*t alkalmazva* — $D_\infty = \mathrm{ek}(\mathfrak{R}, P_\infty)$.

11. AZ $\mathfrak{R}$-EXTREMÁLIS PONT DEFINÍCIÓJA

A kvázi-belsőrész fogalmának használata nehézkessé teszi az $\mathfrak{R}$-extremális pont fogalmának kezelését. VT-ekben az extremális pont fogalmának ekvivalens definíciója (konvex halmazokra szorítva): x akkor és csak akkor extremális pontja egy E konvex halmaznak, ha $E \setminus \{x\}$ is konvex.

(18. 45) Probléma. *Vajon irányterekben is ekvivalens-e ezen definíció megfelelője az $\mathfrak{R}$-extremális pont, ill. gyenge $\mathfrak{R}$-extremális pont* (16. 1) *definíciójával*?

(18. 46) Probléma. *Az előbbi kérdés eldöntésétől függetlenül kérdezhetjük, vajon bizonyítható-e az $\mathfrak{R}$-extremális pont* „b ($\mathfrak{R}$; E)-*mentes" fogalmából kiindulva is a* (17. 2) *tétel*?

12. A (17.1),(a) TÉTEL KAPCSOLATA KY FAN TÉTELÉVEL

A KREIN—MILMAN-tétel sokféle általánosításai közül magasfokú általánosságával tűnik ki

(18. 47) KY FAN TÉTELE. *Legyen S egy nem-üres halmaz; $\mathscr{F}$ S részhalmazainak olyan — S-et is tartalmazó — családja, amelyből a tetszőleges metszés nem vezet ki; $\mathscr{G}$ S nem-üres részhalmazainak olyan családja, amely bármely inklúzióláncának egyesítését is tartalmazza. Tegyük fel továbbá, hogy*

(a) *ha $A \in \mathscr{G}$, $X \in \mathscr{F}$ és $A \nsubseteq X$, akkor van olyan $B \in \mathscr{G}$, amelyre $B \subseteq A$ és $B \cap X = \emptyset$;*

(b) *ha $A \in \mathscr{G}$ és $\bar{\bar{A}} > 1$, akkor van olyan $X \in \mathscr{F}$, amelyre $A \cap X \neq \emptyset$ és $A \nsubseteq X$.*

Ekkor minden $A \in \mathscr{G}$ halmazra az $\{x : x \in A,\ \{x\} \in \mathscr{G}\}$ halmaz nem üres, és $\mathscr{F}$-burka egybeesik az A halmaz $\mathscr{F}$-burkával ([44] 212).

(18. 48) Probléma. *Levezethető-e mármost a* (17. 1), (a) *tétel is* KY FAN *tételéből*? (Annak bizonyítása, hogy a KREIN—MILMAN-tétel KY FAN tételének speciális esete, nem ültethető át automatikusan a (17. 1), (a) tételre, lényegében az „extremális részhalmaz" fogalmának használata miatt; l. az idézett helyet.) Ha igen, akkor a TIT fogalma a KY FAN-tételnek egy a lokálisan konvex térnél általánosabb modellje.

13. A Krein—Milman-tétel átültetése TIT-ekre

(18. 49) A (17. 1), (a) tétel szerint egy $(X, \mathfrak{R})$ TIT bármely kompakt, erősen $\mathfrak{R}$-konvex E halmazára

(18. 49. 1) $$E = \mathrm{ek}\,(\mathfrak{R}; \varepsilon(\mathfrak{R}; E)).$$

Ez nem marad igaz, ha (18. 49. 1)-ben ek-t zgk-val pótoljuk:

$$\mathrm{zgk}\,(\mathfrak{R}; \varepsilon(\mathfrak{R}; E)) \subset E$$

is előfordul.

Legyen pl.

$$X = \{0, 1, 2, 3\}, \quad \mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3\},$$

ahol

$$\mathfrak{R}_i = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{i\}), (\{i\}, \{0, i\}), (\{0, i\}, X), (X, X)\} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ekkor $(X, \mathfrak{R})$ nyilvánvalóan IT, amelyben X maga nyilván erősen $\mathfrak{R}$-konvex halmaz és

$$\varepsilon(\mathfrak{R}; X) = \{1, 2, 3\}.$$

Tekintsük most $(X, \mathfrak{R})$-t TIT-ként. Ekkor X kompakt halmaz és valóban

$$\mathrm{zgk}\,(\mathfrak{R}; \varepsilon(\mathfrak{R}; X)) = \mathrm{gk}\,(\mathfrak{R}; \varepsilon(\mathfrak{R}; X)) = \varepsilon(\mathfrak{R}; X) \subset X,$$

hiszen ebben a (diszkrét!) térben minden halmaz zárt, és az $\varepsilon(\mathfrak{R}; X)$ halmaz *gyengén* $\mathfrak{R}$-konvex.

Másrészt azonban

$$\mathrm{zk}\,(\mathfrak{R}; \varepsilon(\mathfrak{R}; X)) = \mathrm{k}\,(\mathfrak{R}; \varepsilon(\mathfrak{R}; X)) = X;$$

nyitott tehát a kérdés:

(18. 50) Probléma. *Lehet-e* (17. 1), (a)*-ban az erősen $\mathfrak{R}$-konvex burkot a zárt $\mathfrak{R}$-konvex burokkal pótolni?*

Ha igen, akkor ezzel formailag közelebb jutunk a Krein—Milman-tétel (0. 12) fogalmazásához.

Ha nem, akkor még mindig kínálkozik egy esetleges „kiút”:

(18. 50. a) Probléma. *Lehet-e* (18. 50)*-et azáltal megoldani, hogy* $\varepsilon(\mathfrak{R}; E)$*-et az eredeti —* (17. 1)*-beli — definíciója helyett E gyenge $\mathfrak{R}$-extremális pontjainak halmazaként definiáljuk?*

(Az itt közölt példát ez a változtatás nem érintené.)

14. A kvázi-belsőrész fogalmának kapcsolata az intern pont fogalmával

A 15. §-ban lényegében a következő két kérdést vizsgáltuk:

(18. 51) Probléma. *Igaz-e, hogy egy L* VT *bármely konvex E halmazára* $\mathrm{b}^{(a)}E \subseteq E$?

(18. 52) Probléma. *Igaz-e, hogy egy L* VT *bármely konvex E halmazára* $\mathrm{b}^{(a)}E$ *egybeesik E intern pontjainak halmazával?*

A két kérdés összefügg: ha (18. 52)-re igenlő a válasz, akkor (18. 51)-re is az; ha pedig (18. 51)-re tagadó, (18. 52)-re is az.

Nem-konvex halmazokra felesleges e kérdéseket vonatkoztatni, hiszen a legtöbb nem-konvex E halmazra $\mathrm{b}^{(a)}E \nsubseteq E$ (vö. (15. 8)), bár vannak speciális — ti. „kevéssé nem-konvex" — E halmazok, amelyekre $\mathrm{b}^{(a)}E \subseteq E$; ilyen pl. egy nyílt téglalap egyesítése csúcspontjainak halmazával. Egyes szerzők egyébként — talán BOURBAKI nyomán („point interne", [9] 66) — az intern pont és az algebrai belső pont fogalmát is eleve konvex halmazokra szorítva definiálják.

A (15. 6) tétel mármost csak részleges igenlő választ ad e kérdésekre. A probléma teljes megoldásához még eldöntendő:

(18. 53) Probléma. *Létezik-e olyan intern pont nélküli konvex — tehát szükségképpen végtelen algebrai dimenziójú — E halmaz, amelyre* $\mathrm{b}^{(a)}E \neq \emptyset$?

Igenlő válasz esetén újabb két kérdés adódik:

(18. 54) Probléma. *Létezik-e olyan* — (14. 2), 3° *szerint szükségképpen nem erősen* $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$*-konvex — konvex E halmaz, amelyre* $\mathrm{b}^{(a)}E \setminus E \neq \emptyset$?

(18. 55) Probléma. *Létezik-e olyan, intern pont nélküli erősen* $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$*-konvex E halmaz is, amelyre* $\mathrm{b}^{(a)}E \neq \emptyset$?

Az algebrai belső pont nélküli konvex halmaz ismert példái (pl. [38] 180) nem döntik el (negatív értelemben) e kérdéseket, ui. kimutatható, hogy e halmazoknak a kvázi-$\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-belseje is üres.

15. A HAHN—BANACH-TÉTEL IRÁNYTEREKRE VONATKOZTATOTT PROBLÉMAKÖRE

A kvázi-belsőrész fogalmával a (18. 52) kérdés eldöntésétől függetlenül is ki lehet fejezni az intern pont (15. 1) definícióját (11. 17. 4) és (14. 8) segítségével. Ezt az „iránystruktúrás" definíciót azután átvihetjük általános irányterekre, azonban az intern pontokkal, ill. algebrai belső pontokkal kapcsolatos legfontosabb tételek (pl. MAZUR tétele, [38] 191, BOURBAKInál „a HAHN—BANACH-tétel geometriai alakja" néven, [9] 69) nem maradnak érvényben. Példaképpen olyan egyszerű irányteret mutatunk be, amelyre nem vihető át a HAHN—BANACH-tétel gondolatkörében alapvetően fontos (és az algebrai belső pont fogalmát nem is tartalmazó)

(18. 56) KAKUTANI-FÉLE SZÉTVÁLASZTÁSI TÉTEL. *Egy* VT *két diszjunkt, nemüres konvex részhalmaza mindig kibővíthető komplementer konvex halmazokká* (pl. [38] 184).

Legyen

$$X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \quad \mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3, \mathscr{R}_4\},$$

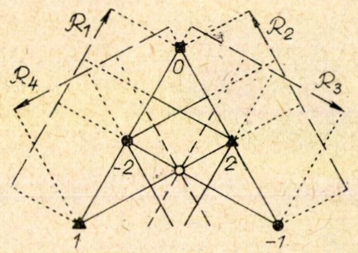
ahol az egyes irányok nem-triviális (egyszerre nyílt és zárt) $\mathfrak{R}$-alsó félterei:

$\mathscr{R}_1$	$\mathscr{R}_2$	$\mathscr{R}_3$	$\mathscr{R}_4$
$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{-2, 0, 1\}$	$\{-1, 0, 2\}$
$\{-2, -1, 1\}$	$\{-1, 1, 2\}$	$\{-2, 0, 1, 2\}$	$\{-2, -1, 0, 2\}$
$\{-2, -1, 1, 2\}$	$\{-2, -1, 1, 2\}$		

(az $(X, \mathfrak{R})$ irányteret az ábra szemlélteti). Mármost az $\{1, 2\}$, $\{-1, -2\}$ halmazok $(X, \mathfrak{R})$-nek diszjunkt, $\mathfrak{R}$-konvex részhalmazai (sőt erősen $\mathfrak{R}$-konvexek, hiszen mindkettő $\mathfrak{R}$-sík); a 0 pontot azonban egyikhez sem lehet csatolni anélkül, hogy elvesztené $\mathfrak{R}$-konvexitását, sőt gyenge $\mathfrak{R}$-konvexitását is, ui.

$$\mathrm{gk}(\mathfrak{R}; \{1, 0\}) = \{1, -2, 0\},$$

$$\mathrm{gk}(\mathfrak{R}; \{-1, 0\}) = \{2, -1, 0\}.$$



1. ábra

16. Irányterek patologikus jelenségeinek megszüntetése

A 15.-beli és egyéb negatív eredmények a következő kérdésekre vezetnek:

(18. 57) Probléma. *Hogyan karakterizálható azon $(X, \mathfrak{R})$ iránytereknek (az $(L, \mathfrak{R}^{(a)}(L))$ vektor-irányetereket persze tartalmazó) osztálya, amelyekben*

(a) *érvényes a* (18. 56) *tétel analogonja,*

(b) *az $\mathfrak{R}$-konvexitás ekvivalens a gyenge $\mathfrak{R}$-konvexitással,*

(c) *az $\mathfrak{R}$-extremális pont fogalma ekvivalens a gyenge $\mathfrak{R}$-extremális pont fogalmával,*

(d) *a* (18. 50) *tétel „gyenge" változata is igaz, stb.?*

Valószínű, hogy a keresett karakterisztikum minden ilyen kérdésben valamilyen „sűrűségi", „teljességi" vagy „hézagtalansági" feltétel, hiszen (mint könnyen látható) összes ellenpéldáink ((a): (18. 56); (b): (12. 8); (c): (16. 2), 3°; (d): (18. 49)) „ártalmatlanná" tehetők azzal, hogy az irányteret néhány újabb ponttal, s ennek megfelelően az irányokat néhány újabb síkkal kiegészítjük. (Pl. (18. 56)-ban elegendő az üres kvázi-$\mathfrak{R}$-belsejű $\{1, 2\}$, $\{-1, -2\}$ $\mathfrak{R}$-síkokat az ábra $[1, 2]$, $[-1, -2]$ szakaszainak metszéspontjával „feltölteni", és az $\mathscr{R}_3$, $\mathscr{R}_4$ irányokat a szaggatottan rajzolt „síkokkal" kiegészíteni.)

A legérdekesebb volna, ha ezeket a kényelmetlen jelenségeket az iránystruktúra definíciójának egy *közös* (esetleg (18. 31. a)-típusú) megszorításával lehetne kiküszöbölni.

17. Intern leképezések. A konjugált iránytér problémája

Foglalkozni kellene iránytereknek, ill. TIT-eknek olyan leképezéseivel egymásba, amelyekre nézve

(A) konvex halmaz képe konvex, ill.

(B) konvex halmaz inverz képe konvex,

(ahol „konvexitáson" az irányterekben definiált háromféle konvexitás valamelyikét vagy ilyenek kombinációit értjük).

Az (A) típusról csupán azt említjük meg, hogy egyváltozós valós függvényekre és a konvexitás közönséges fogalmára alkalmazva (A) a Darboux-tulajdonsággal ekvivalens. A (B) típussal kapcsolatban azonban részletesebben utalunk ennek rokonságára az intern függvény fogalmával, amely a monoton függvény fogalmának általánosítása.

(18. 58) DEFINÍCIÓ. Egy az E_n euklidészi tér valamely K konvex részhalmazán definiált $f(x)$ valós függvény

(a) *p-kvázikonvex*, ill. *kvázikonvex*, ha

$$f[px+(1-p)y] \leqq \max [f(x), f(y)] \qquad (x, y \in K)$$

valamely $0<p\leqq\frac{1}{2}$ súlyra, ill. minden ilyen súlyra;

(b) *p-kvázikonkáv*, ill. *kvázikonkáv*, ha

$$f[px+(1-p)y] \geqq \min [f(x), f(y)] \qquad (x, y \in K)$$

valamely $0<p\leqq\frac{1}{2}$ súlyra, ill. minden súlyra;

(c) *p-intern*, ill. *intern*, ha egyaránt p-kvázikonvex és p-kvázikonkáv, ill. kvázikonvex és kvázikonkáv.

A kvázikonvex, ill. kvázikonkáv függvényekkel több vonatkozásban foglalkoztak; a legutóbbi években pl. a nem-lineáris programozásban kaptak szerepet, többnyire a folytonosság feltételezése mellett (l. pl. [5], [36]).

A (18. 58)-beli „p-osztályokat” [14]-ben vezettük be, és vizsgáltuk folytonossági, mérhetőségi viszonyaikat, továbbá annak feltételeit, hogy egy „p-tulajdonságból” a megfelelő „minden p-re” tulajdonságra lehessen következtetni. E vizsgálatok az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

függvényegyenlőtlenséggel definiált JENSEN-konvex függvények kiterjedt elméletéhez kapcsolódtak (minden JENSEN-konvex függvény $\frac{1}{2}$-kvázikonvex), amelynek történeti gyökere az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

tulajdonsággal definiált JENSEN-lineáris függvények, ill. az ezekkel rokon — a CAUCHY-féle

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

függvényegyenletet kielégítő — additív függvények vizsgálta. Az utóbbiakról HAMEL mutatta ki nevezetes [27] dolgozatában, hogy nem szükségképpen folytonosak.

A p-kvázikonvex ([14]-ben „p-maximumlos”) függvény fogalma egyben a p-intern függvény fogalmának is általánosítása, amelyet $p=\frac{1}{2}$-re és E_1-ben definiálva S. MARCUS vezetett be és vizsgált meg [41] (ill. még korábban $\leqq$ helyett $<$-bel definiálva CSÁSZÁR ÁKOS [12] dolgozatában). A terminológia egyébként nem egységes ebben a témakörben. (A problémakör történetét l. pl. [14]-ben; sok irodalmi adat található pl. [1]-ben.)

Mindezeket a vizsgálatokat ki kellene terjeszteni tetszőleges VT-ekben értelmezett valós függvényekre; e téren eddig nagyon kevés történt (l. pl. [42]). Kézenfekvő továbbá ezeket a definíciókat VT-eknek részben rendezett VT-ekbe való leképezéseire alkalmazni. Termékenyebbnek látszik azonban VT-ek részben-rendezéseinek arra a családjára támaszkodni, amelyet a természetes iránystruktúra irányai indukálnak (11. 8) és (11. 9) értelmében. Így pl. vizsgálni lehetne a következő definíciókkal megadott függvényosztályokat:

(18. 59) DEFINÍCIÓ. *Legyenek* L_1, L_2 VT-*ek*, $\mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{R}^{(a)}(L_2)$ *és* $0 < p \leqq \frac{1}{2}$. *Egy* $f\colon L_1 \to L_2$ *leképezés* $\mathfrak{R}^*$-*ra és p-re nézve*

(a) $(\mathfrak{R}^*, p)$-*kvázikonvex*, ha minden $\mathfrak{R}^*$-alsó féltér inverz képe *p-konvex halmaz*, vagyis

$$f[pf^{-1}(x)+(1-p)f^{-1}(y)] \in M \quad (x, y \in M,\ M \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R}),\ \mathcal{R} \in \mathfrak{R}^*);$$

(b) $(\mathfrak{R}^*, p)$-*kvázikonkáv*, ha minden $\mathfrak{R}^*$-felső féltér inverz képe p-konvex;

(c) $(\mathfrak{R}^*, p)$-*intern*, ha egyaránt $(\mathfrak{R}^*, p)$-kvázikonvex és $(\mathfrak{R}^*, p)$-kvázikonkáv.

Igen könnyű látni, hogy ezek a fogalmak a megfelelő (18. 58)-beliek általánosításai; pl. egy E_n-ben definiált f valós függvény akkor és csak akkor p-kvázikonvex valamely $0 < p \leqq \frac{1}{2}$-re, ha minden

$$\{x\colon x \in E_n, f(x) \leqq c\} \qquad (-\infty < c < \infty)$$

nívóhalmaz p-konvex. (Itt $\mathfrak{R}^*$ a képtér — E_1 — teljes természetes IS-ja.)

A (18. 59) definíciókat mármost pl. a következőképpen vihetjük át tetszőleges irányterekre (ill. TIT-ekre):

(18. 60) DEFINÍCIÓ. Legyenek $(X_1, \mathfrak{R}_1)$, $(X_2, \mathfrak{R}_2)$ irányterek. Egy $f\colon X_1 \to X_2$ leképezés

(a) *kvázikonvex*, ill. *kvázikonkáv*, ha minden $\mathfrak{R}_2$-alsó, ill. $\mathfrak{R}_2$-felső féltér inverz képe gyengén $\mathfrak{R}_1$-konvex halmaz;

(b) *intern*, ha egyaránt kvázikonvex és kvázikonkáv.

Az ilyen típusú leképezésekre várható eredmények jellegét talán érzékelteti a következő

(18. 61) TÉTEL. *Legyen f egy* $(X_1, \mathfrak{R}_1)$ TIT *intern leképezése egy* $(X_2, \mathfrak{R}_2)$ TIT-*be. Ekkor létezik* X_1 *gyengén* $\mathfrak{R}_1$-*konvex részhalmazainak olyan* $\tau(X_2)$-*nél nem nagyobb számosságú családja, hogy f diszkontinuitási helyeinek D halmaza lefedhető ezek határainak egyesítésével.*

Bizonyítás. 1° Legyen $\mathcal{B}$ X_2-nek egy „$\mathfrak{R}_2$-nyílt intervallumokból" (vagyis $\mathfrak{R}_2$-nyílt félterek véges metszeteiből) álló, $\tau(X_2)$ számosságú bázisa. Ilyen biztosan létezik, hiszen egy Y tér minden bázisának — s így az X_2 térnek az összes $\mathfrak{R}_2$-nyílt intervallumokból álló bázisának is — van olyan $\tau(Y)$ számosságú része, amely szintén bázisa Y-nak.

2° Az f leképezés folytonossága valamely $x \in X_1$ pontban azt jelenti, hogy $f(x)$-nek minden X_2-beli környezetére $x \in (f^{-1}[U])^{\circ}$. Így tehát minden $x \in D$ ponthoz létezik $f(x)$-nek olyan $U_{f(x)}$ környezete, hogy

$$x \in \operatorname{Gr} f^{-1}[U_{f(x)}],$$

és ezért bármely $f(x) \in V \subseteq U_{f(x)}$ környezetre

$$x \in \operatorname{Gr} f^{-1}[V].$$

3° Legyen mármost

$$f(x) \in B_{f(x)} \subseteq U_{f(x)},\quad B_{f(x)} \in \mathcal{B} \qquad (x \in D).$$

Ekkor

$$D \subseteq \bigcup \{\operatorname{Gr} f^{-1}[B_{f(x)}]\colon x \in D\},$$

és mivel minden $f^{-1}[B_{f(x)}]$ halmaz $\mathfrak{R}_2$-félterek metszetének inverz képeként gyengén $\mathfrak{R}_1$-konvex halmazok metszete, tehát gyengén $\mathfrak{R}_1$-konvex, ezzel előállítottuk D-nek legfeljebb $\tau(X_2)$ gyengén $\mathfrak{R}_1$-konvex halmaz határainak egyesítésével való lefedését.

Alkalmazzuk ezt a tételt az E_n-ben definiált valós függvényekre:

(18. 62) TÉTEL. *Egy E_n-ben definiált intern valós függvény diszkontinuitási helyeinek D halmaza lefedhető megszámlálható sok konvex halmaz határainak egyesítésével.*

Egy régebbi, kvázikonvex függvényekre vonatkozó eredményünk ([14] 120) intern függvényekre alkalmazva csak annyit mond, hogy D LEBESGUE-0-mértékű. Az utóbbinak bizonyításánál felhasználtuk azt az ismert tényt, hogy egy E_n minden konvex részhalmaza PEANO—JORDAN-mérhető, vagyis a határa LEBESGUE-0-mértékű (l. pl. [15]); azonban nem minden LEBESGUE-0-mértékű halmaz fedhető le megszámlálható sok konvex halmaz határainak egyesítésével. (Az utóbbi egyébként első kategóriájú halmaz.)

Ha a (18. 60), (b)-beli $(X_1, \mathfrak{R}_1)$ és $(X_2, \mathfrak{R}_2)$ TIT egyaránt E_1, akkor az intern leképezések éppen a monoton függvények; erre alkalmazva a (18. 62) tétel azt a közismert elemi tényt szolgáltatja, hogy monoton függvénynek legfeljebb megszámlálhatóan sok szakadási helye van.

(18. 63) Probléma. *A* (18. 62) *tétel arra ösztönöz, hogy kísérletet tegyünk egy* $(X, \mathfrak{R})$ TIT *különböző „fokozatú" konvex halmazainak ($\mathfrak{R}$-féltereknek, erősen $\mathfrak{R}$-konvex, $\mathfrak{R}$-konvex vagy gyengén $\mathfrak{R}$-konvex halmazoknak) határaira alapozott „kis halmaz"-fogalmak bevezetésére, amelyek bizonyos vizsgálatokban a* 0*-mértékű, ill. első kategóriájú halmazok szerepét vehetnék át.*[36]

Az intern leképezésekre vonatkozó több már elért eredményünk közül idézzük most [19]-ből a következőt:

(18. 64) TÉTEL. *Legyen X* TVT, *Y* LKT *és* $0<p<1$. *Egy az X valamely K konvex halmazán definiált* $\varphi\colon K\to Y$ *p-intern leképezés vagy K minden pontjában vagy K egyetlen pontjában sem lokálisan korlátos.*[37]

[36] Ilyen célra egyes esetekben egy $(X, \mathfrak{R})$ TIT bizonyos E halmazainak valószínűleg nemcsak a határa, hanem más „határjellegű" halmazok is alkalmasak. Ha pl. $\mathfrak{R}$ minimális IS-ja X-nek arra a topológiára nézve, amelyet maga $\mathfrak{R}$ indukál, továbbá $\mathrm{Dim}\, X<\aleph_0$ és E erősen $\mathfrak{R}$-konvex halmaz (amelyre tehát $\overline{\overline{\mathfrak{R}}}$ végessége és (14. 2. 1) továbbá (14. 2. 3) következtében $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E)$ biztosan nyílt halmaz és $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E)\subsetneqq E$, akkor a

$$\mathrm{Gr}^*(\mathfrak{R};E)=\mathrm{zek}(\mathfrak{R};E)\setminus\mathrm{b}(\mathfrak{R};E)$$

halmaz — bár nemcsak okvetlenül tartalmazza E határát, hanem

$$\mathrm{Gr}^*(\mathfrak{R};E)\supset\mathrm{Gr}\,E$$

is előfordulhat — szintén valamiféle, E határával bizonyos kapcsolatban levő „kis halmaz"-nak tekinthető, hiszen $\mathfrak{R}$-síkok részhalmazainak véges egyesítése, s ezek mindegyikének pl. az ID-ja (4. 3) alapján határozottan kisebb $\mathrm{Dim}\, X$-nél, hacsak $\mathrm{Dim}\, X\neq 1$. (Persze azért $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Gr}^*(\mathfrak{R}; E) = \mathrm{Dim}\, X$ is lehet!)

Látható tehát, hogy az IS fogalma többféle „kis halmaz"-fogalom bevezetésére is kézenfekvő lehetőségeket nyújt; ezek értékét persze csak a már sikerült alkalmazások alapján lehet majd megítélni.

[37] DEFINÍCIÓ. Egy X TVT valamely A halmazának egy φ leképezése egy Y TVT-be *lokálisan korlátos* valamely $x\in A$ pontban, ha van x-nek olyan U környezete az X tér A alterében, amelynek $\varphi[U]$ képe korlátos halmaz az Y térben. (*Lineáris formákra* szorítkozva más, mégpedig „kevésbé lokális" értelemben is használatos a „lokálisan korlátos" kifejezés; l. pl. [38] és [60].)

E tétel (és más hasonló tételek) alapján azt mondhatjuk, hogy a p-intern leképezések hasonlóan szélsőséges viselkedésűek, mint a p-konvex függvények.[38] (A p-konvex függvények speciális p-kvázikonvex függvények; definíciójukat l. (18. 68)-ban. A lineáris terek elméletében a „p-konvex" kifejezés más értelemben is használatos ([38] 163)).

A (18. 64) tétel kapcsán a következő kérdés merül fel:

(18. 65) Probléma. *Keresni kellene az X, Y terekre, továbbá $P \subseteq (0, 1)$ halmazok (valamilyen értelemben vett) „nagyságára" kirótt olyan, lehetőleg gyenge (esetleg valamilyen értelemben minimális) feltételeket, amelyek biztosítják, hogy egy olyan $\varphi: K \to Y$ leképezés (ahol K ismét X egy konvex halmazát jelenti), amely minden $p \in P$ súlyra p-intern, a* (18. 64)*-beli két szélsőség közül a „jó" tulajdonsággal bírjon.*[39]

A (18. 61) tétel, amelyet [19]-ben egy TVT-ekre vonatkozó speciális (de azért (18. 62)-nél általánosabb) fogalmazásban mondtunk ki és bizonyítottunk be, úgy is interpretálható, hogy egy intern leképezés — bár nem szükségképpen folytonos — egy bizonyos értelemben sohasem lehet „nagyon nem-folytonos". Ez a megjegyzés bizonyára érdekesebbé válik, ha megemlítjük, hogy az intern leképezések közé tartoznak — s nyilván ezek a legfontosabb intern leképezések — a TVT-ek lineáris funkcionáljai, sőt lineáris operátorai is. Általában törekedni kellene arra, hogy (mindkét irányban) hasznot húzzunk abból, hogy a lineáris operátorok speciális intern leképezések.[40]

Keresni kellene továbbá az analógiákat egy iránytér intern leképezései (egy másik iránytérbe, speciálisan E_1-be) és egy VT lineáris operátorai vagy funkcionáljai között. Kétségtelen, hogy sok — a konvexitással kapcsolatos — kérdésben egy VT lineáris formáinak nem a linearitása, hanem csak az intern volta a lényeges.

[38] Csupán példaképpen említjük meg itt (több hasonló tény közül kiragadva), hogy egy I valós intervallumon definiált p-konvex, vagy akár csak p-kvázikonvex, valós függvény felső burkolójának értéke bármely $0 < p < 1$ szám esetén vagy I minden pontjában, vagy I egyetlen pontjában sem ∞. Ha f p-konvex, akkor vagy I minden pontjában, vagy I egyetlen pontjában sem folytonos. Mindez sokkal általánosabban is igaz. Részletes irodalmi adatok helyett legyen szabad a [14] és [19] dolgozatainkra, továbbá a részben ezeket ismertető [60] dolgozatunkra utalnunk, ahol a szóban forgó témakört (különösen [14]-ben) eléggé részletesen feldolgoztuk, és amelyekben elég sok történeti és irodalmi adat is található.

[39] Az e problémára vonatkozó eddigi egyetlen eredményünk így szól:

(18. 65. a) Tétel. *Ha X euklidészi tér, Y LKT és $K \subseteq X$ konvex halmaz, akkor bármely $\varphi: K \to Y$ intern leképezés K minden pontjában lokálisan korlátos.* (Ez a [19] dolgozat (1. 7) tételéből következik az ottani (1. 4) definícióhoz fűzött megjegyzés alapján.)

Ez a tétel persze eléggé gyenge eredményt fejez ki a (18. 65) problémára vonatkozóan, hiszen itt X-re igen erős feltételt róttunk ki, a P-re tett (hallgatólagos) kikötés pedig (minden lehetséges értelemben) *maximális*, ui. $P = (0, 1)$.

[40] Megemlítjük, hogy a (18. 65. a) tételnek olyan *ekvivalens* fogalmazását lehet adni, amely érdekes fényt vet a lineáris formákra, mint speciális intern leképezésekre:

(18. 65. b) Tétel. *Legyen Y tetszőleges* LKT. *Ha K egy olyan lokálisan korlátos X* TVT*-nek konvex részhalmaza (akár $K = X$ is lehet), amelynek minden lineáris formája X minden egyes pontjában lokálisan korlátos* (ezek az X terek ui. éppen az euklidészi terek, vö. [19] 226), *akkor minden intern $\varphi: K \to Y$ leképezés is lokálisan korlátos K minden pontjában.*

M. JERISON pl. [32] dolgozatában (BOURBAKI nyomán) így foglalta össze a LKT-ek konvex halmazainak bizonyos viszonyait:

(18. 66) TÉTEL. *Ha L* LKT, E^{Δ} *egy* $E \subseteqq L$ *részhalmaz zárt konvex burkát jelöli és minden L-en értelmezett f valós függvényre*

$$f_E = \sup_{x \in E} f(x) \quad (E \subseteqq L),$$

akkor minden $C \subseteqq L$ *kompakt és konvex halmazra és minden* $S \subseteqq C$ *részhalmazra a következő kijelentések ekvivalensek:*

(a) $f_S = f_C$ $(f \in L')$;

(b) $C = S^{\Delta}$;

(c) S^- *tartalmazza C minden extremális pontját.*

(A (c)$\Rightarrow$(b) implikáció lényegében a KREIN—MILMAN-tétel.)

Mármost ez a tétel érvényben marad, ha az (a) kijelentést az analóg

(a′) „$f_S = f_C$ *minden L-en értelmezett folytonos és a* (18. 60), (b) *definíció értelmében* $\mathfrak{N}^{(a)}(L)$*-re nézve intern valós függvényre*" kijelentéssel helyettesítjük.

(Ennek igazolására elegendő a (b)$\Rightarrow$(a′) implikációt bizonyítani. Minden folytonos valós f függvényre $f_S \leqq f_C < \infty$. Ha (a′)-vel ellentétben létezik olyan f folytonos intern függvény, amelyre $f_S < f_C$, akkor az

$$F = \{x : x \in L,\ f(x) \leqq f_S\}$$

zárt halmazra

$$S \subseteqq C \cap F \subset C,$$

és az F halmaz konvex, hiszen a számegyenes egy félterének inverz képe f-re nézve; ezért $S^{\Delta} \subseteqq C \cap F$, tehát $S^{\Delta} \neq C$, vagyis (b) sem teljesül.)

(18. 67) Probléma. *Lehet-e az intern leképezés fogalmának valamely változatából kiindulva a* VT *konjugáltjának, ill.* TVT *duálisának megfelelő fogalmat alkotni irányterekre, ill.* TIT*-ekre*?

(18. 68) A legspeciálisabb intern leképezések a lineáris leképezések, s ezeknek — amennyiben egy-egyértelműek — az inverze is intern (sőt lineáris); ezért talán az (A) és (B) típus kombinációjából kellene kiindulni.

A konvex függvény fogalmát nehezebb átvinni TIT-ek közötti leképezésekre úgy, hogy bizonyos megszokott, jó tulajdonságai (folytonosság, kvázikonvexitás stb.) ne vesszenek el. Talán hasznos lesz e tekintetben az az észrevétel, hogy egy $f: L \to E_1$ leképezés akkor és csak akkor p-konvex, ill. konvex (vagyis

$$f[px + (1-p)y] \leqq pf(x) + (1-p)f(y) \qquad (x, y \in L)$$

egy $0 < p \leqq \frac{1}{2}$ súlyra, ill. minden ilyen súlyra), ha az $L \times E_1$ (lineáris) szorzattérnek az f gráfja „feletti" része p-konvex, ill. konvex halmaz.

Befejezésül megemlítjük, hogy az iránystruktúra-fogalom bevezetésének első indítéka éppen az a törekvésünk volt, hogy bizonyos függvényegyenlőtlenségekkel definiált függvényosztályok (konvex, intern, kvázikonvex stb.) értelmezését és vizsgáltatát (pl. a [14] dolgozat anyagát) nem-lineáris terekre is átvigyük. Ennek első lépése volt e függvényosztályoknak olyan ekvivalens definíciót keresni, amelyek csupán a konvex halmaz és bizonyos speciális konvex halmazok (félterek) fogalmát feltételezik; második lépésként pedig éppen az utóbbit (pontosabban: egy VT konvex halmazai családjának fogalmát) kellett általánosítani.

Problémafejezetünknek ezen utolsó szakasza tehát lényegében olyan gondolatokat tartalmaz, amelyek az értekezés anyagának felépítését megelőzték, sőt arra indítottak, de részletes kidolgozásuk — jó néhány már elért, és itt csak részben megemlített eredmény ellenére is — még hátra van.

Az I. részben közölt irodalomjegyzék kiegészítése

[57] ALEXANDROV, P. SZ.: Теорема сложения в теории размерности бикомпактных процтранств, Сообщ. Гр- фил. АН 2, 1—6 (1941).
[58] BING, R. H.: Metrization of topological spaces, *Canadian J. Math.* 3, 175—186 (1951).
[59] DEÁK, E.: Untersuchungen über die Richtungsdimension, II, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sectio Math.* (sajtó alatt).
[60] DEÁK, E.: Über Abbildungen mit konvexitätserhaltender Inversion sowie deren Beziehungen zu einigen durch Funktionalungleichungen definierten Funktionenklassen, *Miskolci NME Közl.* (sajtó alatt).
[61] DEÁK, E.: Einige Beziehungen der Richtungsdimension zu den klassischen Dimensionsbegriffen der allgemeinen Topologie, *Mathematische Nachrichten* (sajtó alatt).
[62] DEÁK, E.: Untersuchungen über die Richtungsdimension, I, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sectio Math.* (sajtó alatt).
[63] DIEUDONNÉ, J.: Une généralisation des espaces compacts, *J. Math. Pures Appl.* **23**, 65—76 (1944).
[64] DOWKER, C. H.: Local dimension of normal spaces, *The Quarterly Journal of Math., Oxford second series, Vol.* **6**, No. 22, 101—120 (1955).
[65] ERDŐS, P.: The dimension of the rational points in Hilbert space, *Ann. Math.* **41**, 734—736 (1940).
[66] General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra I, *Proc. Symp. Prague 1961* (1962).
[67] General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra II, *Proc. Symp. Prague 1966* (1967).
[68] HEMMINGSEN, E.: Some theorems in dimension theory for normal Hausdorff spaces, *Duke Math. J.* **13**, 495—504 (1946).
[69] KATETOV, M.: О размерности несепарабельных пространств. I, Чех. Мат. Журнал **2** (77), 333—368 (1952).
[70] KOWALSKY, H. J.: Einbettung metrischer Räume, *Arch. Math.* **8**, 336—339 (1957).
[71] MENGER, K.: Zur Begründung einer axiomatischen Theorie der Dimension, *Monatsh. Math. Phys.* **36**, 193—218. (1929).
[72] MORITA, K.: Normal familes and dimension theory for metric spaces, *Math. Ann.* **128**, 350—362 (1954).
[73] NAGATA, J.: Note on dimension theory for metric spaces, *Fund. Math.* **45**, 143—181 (1958).
[74] ROY, P.: Failure of equivalence of dimension concepts for metric spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **68**, 609—613 (1962).
[75] SORGENFREY, R. H.: On the topological product of paracompact spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, 631—632 (1947).
[76] VEDENNISOFF, N.: Généralisation de quelques théorèmes sur la dimension, *Compositio Math.* **7**, 194—200 (1939).
[77] VEDENNISOFF, N.: Sur la dimension au sens de E. Cech, *Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math.* **5**, 211—216 (1941).

(Beérkezett: 1967. XII. 28.)