

A HIPERGEOMETRIKUS ELOSZLÁS ÁLTALÁNOSÍTÁSA*

F. E. BINET**

Bevezetés

Tekintsük a

$$(1) \quad p_{k+1} = \frac{(a+k)(b+k)}{(1+k)(c+k)} p_k \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

rekurziós formulával és a

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1; \quad p_k \geq 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

feltétellel meghatározott $p_k = P(\xi=k)$ diszkrét eloszlások családját. Könnyű látni, hogy a hipergeometrikus eloszlás eleget tesz az (1) és (2) feltételnek, ennek megfelelően az (1) és (2) által meghatározott eloszlásokat általánosított hipergeometrikus eloszlásnak fogjuk nevezni.

Az általánosítás alapgondolata már A. NOACK [1] alatti cikkében megtalálható, részletes kidolgozást KEMP és KEMP [6] adta meg. SARKADI [3] egyszerűsítette KEMP és KEMP osztályozását és több, az irodalomban addig önálló esetként tárgyalt eloszlásról mutatta ki, hogy az általános hipergeometrikus eloszlásokhoz tartozik.

Dolgozatunk 1. fejezetében az általánosított hipergeometrikus eloszlás osztályozását tárgyaljuk. A 2. fejezetben a hipergeometrikus, binomiális és Poisson-eloszlás kapcsolatáról lesz szó: megmutatjuk, hogy határátmenettel, keveréssel és feltételes eloszlás képzésével ezek az eloszlások egymásból előállíthatóak. Végül áttekintjük a fenti eloszlásoknak a homogén születési folyamatok körében való alkalmazását.

Itt mondok köszönetet Dr. R. T. LESLIENek (Division of Mathematical Statistics, C. S. I. R. O) munkám elkészítéséhez nyújtott szívélyes segítségéért, valamint TUSNÁDY GÁBORNak (MTA Matematikai Kutató Intézet) a dolgozat magyar nyelven való megfogalmazásában nyújtott segítségéért.

1. Az általánosított hipergeometrikus eloszlás osztályozása

Ha az a, b, c paraméterek egyike sem negatív egész, (1) alapján az eloszlás generátorfüggvénye

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(a+i)(b+i)}{c+i} = p_0 F(a, b, c; z).$$

* Elhangzott az AUSZTRÁL MATEMATIKAI TÁRSASÁG rendes évi ülésén, a MONASH-Egyetemen (Clayton, Ausztrália) 1963. máj. 30.-án.

** C. S. I. R. O. Division of Animal Genetics. Eppening, N. S. W. Australia.

Ismeretes (lásd pl. [25]), hogy a (3) alatti $F(a, b, c; z)$ hipergeometrikus sor konvergencia-sugara 1, a $z=1$ pontban akkor és csakis akkor konvergens a sor, ha

$$(4) \quad a + b < c$$

teljesül. Ebben az esetben (2) alapján

$$(5) \quad p_0 = \frac{1}{F(a, b, c; 1)} = \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)},$$

(ahol $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$; $\Gamma(n) = (n-1)!$ ha n természetes szám). Tehát p_k általános alakja

$$(6) \quad p_k = \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)} \cdot \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(1+k)\Gamma(c+k)}.$$

Ahhoz, hogy a $p_k \geq 0$ feltétel is teljesüljön, a

$$(7) \quad \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)}$$

hányadosnak pozitívnak kell lennie $k=0, 1, 2, \dots$ mellett. Ennek megfelelően az alábbi eseteket különböztethetjük meg.

I. Ha a, b negatív, c csak pozitív lehet $\frac{ab}{c} > 0$ folytán, tehát $(a+k)$ és $(b+k)$ előjele azonos k mellett válik pozitívvá, ami csak úgy lehet, ha $[a]=[b]$ (ahol $[x]$ az x -nél nem nagyobb egész számok legnagyobbikát jelöli). Ebben az esetben (4) automatikusan teljesül, tehát feltételeink:

$$H^+ : [a]=[b] < 0; \quad c > 0.$$

II. Ha a, b közül csak az egyik negatív, szimmetrikus szerepük miatt feltehetjük, hogy $a < 0$. Mivel (7) pozitivitása szempontjából a, b, c egyikének sincs kitüntetett szerepe, ebben az esetben alkalmazhatjuk előbbi eredményünket (abban b és c szerepét felcserélve): (7) akkor és csakis akkor pozitív, ha $[a]=[c]$. (4)-et is figyelembe véve kapjuk, hogy esetünkben a feltétel:

$$H^- : [a]=[c] < 0; \quad 0 < b < c - a.$$

III. Ha a, b pozitívak, (4) alapján c is pozitív, így (7) is pozitív lesz, feltételünk tehát

$$H^{--} : a > 0, b > 0, c > a + b.$$

Ha az a, b paraméterek közül valamelyik negatív egész, szimmetrikus szerepük miatt feltehetjük, hogy az $a = -n$. (Ha mindkettő negatív egész, válasszuk a -t a nagyobbiknak.) Ebben az esetben csak azt kell biztosítanunk, hogy (7) nevezője ne legyen 0 ha k a $0, 1, \dots, (n-1)$ értékeket veszi fel. Célszerű módon (7) értékét 0-nak tekintjük $k=n$ mellett akkor is, ha $c = a = -n$, azaz (7) nevezője is 0. Mivel ebben az esetben a (3) alatti hipergeometrikus sor csak véges sok 0-tól különböző

tagot tartalmaz, a $z=1$ pontbeli konvergenciához (4)-et nem kell feltennünk. Feltételeink tehát:

$$H_0^+ : a = -n \text{ (negatív egész), } b < a+1, c > 0,$$

$$H_0^- : a = -n \text{ (negatív egész), } c < a+1, b > 0.$$

Ezekben az esetekben (5) a

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(-n+i)(b+i)}{c+i} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b+n)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c+n)}$$

összefüggést jelenti; amit $\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)\Gamma(n+1)}$ -nel szorozva a következő azonosságot kapjuk:

$$(9) \quad \sum_{k=0}^n \binom{-b}{k} \binom{c+n-1}{n-k} = \binom{c-b+n-1}{n},$$

amely az $(1+x)^{-b}(1+x)^{c+n-1} = (1+x)^{c-b+n-1}$ azonosságban x^n együtthatói közti összefüggésnek felel meg. Fenti formuláink tehát az $a = -n$ esetben is érvényesek, anélkül hogy a konvergenciát biztosítanánk.

Felhasználva a $\Gamma(z)$ függvényre érvényes

$$(8) \quad \frac{\Gamma(-a+1)}{\Gamma(-a-k+1)} = (-1)^k \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$$

összefüggést (ha a természetes szám, (8)-at célszerű definíciónak tekinthetjük) az egyes esetekben p_k célszerű alakja a következő:

I. A H^+ és a H_0^+ esetben

$$p_k = \frac{\binom{-b}{k} \cdot \binom{c-a-1}{-a-k}}{\binom{c-a-b-1}{-a}}$$

(ahol $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}$, ill. ha β természetes szám $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\beta+1)}{\beta!}$), mely a H_0^+ esetben a $N = c-a-b-1$, $M = -b$,

$n = -a$ jelölésekkel a hipergeometrikus eloszlás közismert formáját adja. A H^+ esetben $k=0, 1, 2, \dots$; H_0^+ esetben $k=0, 1, 2, \dots, -a$.

II. a H^- és H_0^- esetben

$$p_k = \binom{-a}{k} \frac{B(b+k, 1-c-k)}{B(b, a-c+1)},$$

ahol $B(\alpha, \beta)$ a beta-függvény: $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. H^- esetben $k=0, 1, 2, \dots$,

H_0^- esetben $k=0, 1, 2, \dots, -a$.

III. A H^{--} esetben

$$p_k = \binom{b-k-1}{k} \frac{B(c-a, a+k)}{B(a, c-a-b)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Itt jegyezzük meg, hogy a fenti eloszlások approximációját a [11] és [13] dolgozatok tárgyalják.

2. A hipergeometrikus, binomiális és Poisson-eloszlás kapcsolata

Ha $|b|$, $|c|$ tart ∞ -hez, miközben a rögzített és $\frac{b}{c}$ tart ω -hoz, az (1) összefüggés átmegy az

$$(1^*) \quad p_{k+1} = \frac{a+k}{1+k} \omega p_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

összefüggésbe. Így (1)-nek azok a megoldásai, melyek (2)-nek is eleget tesznek, (1*) azon megoldásaiba mennek át, amelyek (2)-nek eleget tesznek. (1*) generátorfüggvénye:

$$(3^*) \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-\omega z)^k = p_0 (1 - \omega z)^{-a},$$

ahol (2) miatt $p_0 = (1 - \omega)^a$, ha (3*) konvergens $z=1$ mellett.

Ha tehát H_0^+ esetén $b \rightarrow -\infty$, $c \rightarrow +\infty$, ill. ha H_0^- esetén $b \rightarrow +\infty$, $c \rightarrow -\infty$, miközben a rögzített negatív egész: $a = -n$, és $\frac{b}{c} \rightarrow \omega < 0$, akkor a határeloszlás generátorfüggvénye $(px + q)^n$ lesz, ahol $p = \frac{-\omega}{1-\omega}$, $q = \frac{1}{1-\omega}$, tehát a határeloszlás binomiális:

$$B^+ : p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Ha pedig (a és b szerepét felcserélve) H_0^- esetén a, c tart $(-\infty)$ felé, ill. H^{--} esetén a, c tart $(+\infty)$ -hez, miközben b rögzített és $\frac{a}{c} \rightarrow p$, ahol $0 < p < 1$, akkor a megfelelő eloszlás tart az $\left(\frac{1-px}{1-p}\right)^{-b}$ generátorfüggvényű negatív binomiális eloszláshoz, melyre

$$B^- : p_k = \binom{-b+k-1}{k} p^k (1-p)^{-b} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Megjegyezzük, hogy — mint az a feltételekből könnyen kiolvasható — H^+ és H^- esetén ilyen határátmenetek nem lehetségesek.

Ha (1)-ben $|a|$, $|b|$, $|c|$ tart ∞ -hez, miközben $\frac{ab}{c} \rightarrow \lambda > 0$, illetve (1*)-ban $|a| \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$, miközben $a\omega \rightarrow \lambda > 0$, akkor a (2)-nek eleget tevő megoldások tartanak

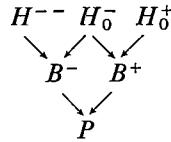
$$(1^{**}) \quad p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+1} p_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

(2)-nek eleget tevő megoldásához, melyre

$$P: p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ha tehát B^+ esetén $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ miközben $np \rightarrow \lambda$, illetve ha B^- esetén $b \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ miközben $bp \rightarrow \lambda$, a megfelelő eloszlások tartanak a λ paraméterű *Poisson*-eloszláshoz.

A fenti határátmenetek a következő ábrával szemléltethetők:



A következőkben a fordított irányú átmeneteket tekintjük át. Erre a célra két módszert használunk: eloszlások keverését és feltételes eloszlás képzését. Előbbivel kapcsolatban megemlítjük a [4] dolgozatot, mely — többek között — a negatív binomiális eloszlás *Poisson*-eloszlásból való előállítását tárgyalja.

Az eloszlások keverésében a generátorfüggvényükre érvényes alábbi összefüggéseket használjuk:

$$(10) \quad \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)} F(a, b, c; z) = \begin{cases} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1}}{B(b, c-a-b)} \left(\frac{1-tz}{1-t} \right)^{-a} dt \\ \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{a-c}}{B(b, a-c+1)} (tz+1-t)^{-a} dt \end{cases}$$

feltéve, hogy $c > b > 0$, vagy pedig a negatív egész és $b > 0$, $c < a+1$, valamint

$$(11) \quad \left(\frac{1-pz}{1-p} \right)^{-\mu} = \frac{\lambda^\mu}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-\lambda t} e^{t(z-1)} dt,$$

ahol

$$\lambda = \frac{1-p}{p}, \quad \mu > 0, \quad 0 < p < 1.$$

(10) szerint tehát H^- illetve H_0^- előállítható B^- illetve B^+ eloszlásokból beta eloszlással keverve, (11) szerint B^- előállítható P eloszlásból gamma eloszlással keverve, hiszen (10), (11) épp a megfelelő generátorfüggvények összefüggését adja.

A hiányzó három átmenet előállítása érdekében megjegyezzük, hogy ha ξ, η független valószínűségi változók és lehetséges értékeik nemnegatív egészek, akkor

$$P(\xi = k | \xi + \eta = n) = \frac{P(\xi = k)P(\eta = n - k)}{\sum_{i=0}^n P(\xi = i)P(\eta = n - i)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Ennek alapján ha ξ, η rendre λ_1, λ_2 paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változók, akkor az

$$\frac{\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k} e^{-\lambda_2}}{(n-k)!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!} \cdot \frac{\lambda_2^{n-i} e^{-\lambda_2}}{(n-i)!}} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k}$$

azonosság alapján feltéve, hogy ha $\xi + \eta = n$ rögzített, ξ feltételes eloszlása B^+ eloszlás lesz n és $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ paraméterekkel. Hasonló módon kapjuk (9) alapján, hogy ha ξ, η B^- ill. B^+ eloszlású valószínűségi változók, akkor ξ feltételes eloszlása a $\xi + \eta = n = -a$ feltétel mellett H_0^- ill. H_0^+ lesz.

OTTESTAND [14] mutatott rá, hogy a hipergeometrikus eloszlás momentumainak előállításakor legcélszerűbb először faktoriális momentumokat meghatározni: legyen

$$\mu^{(j)} = E\{\xi(\xi-1) \cdot \dots \cdot (\xi-j+1)\}.$$

Mint ismeretes, a generátorfüggvény alapján $\mu^{(j)}$ egyszerűen előállítható:

$$\mu^{(j)} = \frac{F^{(j)}(a, b, c; 1)}{F(a, b, c; 1)} = \frac{a(a+1) \cdot \dots \cdot (a+j-1)b(b+1) \cdot \dots \cdot (b+j-1)}{(c-a-b-1)(c-a-b-2) \cdot \dots \cdot (c-a-b-j)}.$$

Így speciálisan az eloszlás Poisson-indexe

$$\begin{aligned} V(\xi) &= \frac{D^2(\xi)}{E(\xi)} = \frac{\mu^{(2)} + \mu^{(1)} - [\mu^{(1)}]^2}{\mu^{(1)}} = \\ &= \frac{(a+1)(b+1)}{c-a-b-2} + 1 - \frac{ab}{c-a-b-1} = \frac{(c-a-1)(c-b-1)}{(c-a-b-1)(c-a-b-2)}. \end{aligned}$$

H^+, H^-, H^{--} esetében $\mu^{(j)}$ létezésének feltétele, hogy $a+b < c-j$ teljesüljön, H_0^+, H_0^- esetén $\mu^{(j)}$ mindig létezik. A fenti alakból könnyen kiolvasható, hogy H_0^+, B^+ esetén $V < 1$; H^{--}, B^- esetén $V > 1$, P eloszlásra $V=1$, H_0^- eloszlásra V lehet 1-nél nagyobb is, kisebb is, 1-gyel egyenlő is. Ez utóbbi körülmény különösen figyelemre méltó, hiszen sokszor előfordul a statisztikai gyakorlatban, hogy a Poisson-eloszlást $V(\xi)=1$ ellenőrzésével verifikálják.

Dolgozatunk végén numerikus példával szemléltetjük ezt az esetet: Az I. táblázatban az $a = -4, b = 1, c = -4$ paraméterű H_0^- eloszlást hasonlítjuk össze a $\lambda = 2$ paraméterű Poisson-eloszlással; a II. táblázatban az $a = -9, b = 2, c = -9$.

I. táblázat

k	$10^5 p_k$	
	Poisson $\lambda=2$	Negatív hipergeometrikus $a=-4, b=1, c=-4$
0	13534	20000
1	27067	20000
2	27067	20000
3	18044	20000
4	9022	20000
5	3609	20000
6	1203	0
7	344	0
8	85	0
8	25	0
Faktoriális momentumok		0 1 2 3 4 5
Poisson		1 2 4 8 16 32
Negatív hipergeometrikus		1 2 4 6 4.8 0

II. táblázat

Faktoriális momentumok		
j	Negatív hipergeometrikus $a=-9, b=2, c=-9$	Poisson $\lambda=6$
0	1	1
1	6	6
2	36	36
3	201.6	216
4	1008	1296
5	4320	7776
6	15120	46656
7	40320	279936
8	72576	1679.62.10
9	65978.2	1007.77.10 ⁴
10	0	6046.62.10 ⁴
11	0	36279.71.10 ⁴
11	0	6j
k	$10^5 \cdot p_k$	
0	1818	248
1	3637	1487
2	5455	4461
3	7273	8924
4	9091	13385
5	10909	16062
6	12727	16062
7	14545	13768
8	16363	10326
9	18182	6884
10	0	4130
11	0	2253
11	0	2009

III. táblázat

Negatív hipergeometrikus, $a = -2$, $c = \frac{b^2 + 1}{b - 1}$

$$p_0 = 1 - b + \frac{b^2}{2}; \quad p_1 = b - b^2; \quad p_2 = \frac{b^2}{2}$$

$10^5 p_k$			
$10^3 b$	$k=0$	$k=1$	$k=2$
100	90500	9000	500
200	82000	16000	2000
250	78125	18750	3125
500	62500	25000	12500
667	55556	22222	22222
750	53125	18750	28125
800	52000	16000	32000
900	50500	9000	40500
1000	50000	0	50000

paraméterű H_0^- eloszlást a $\lambda=6$ paraméterű *Poisson*-eloszlással. A III. táblázat az $a = -2$, $c = \frac{b^2 + 1}{b - 1}$ paraméterekhez tartozó H_0^- eloszlásokat mutatja be különböző $0 < b < 1$ mellett: ezekre $V(\xi) = 1$ minden b mellett, első két faktoriális momentumuk megegyezik a b paraméterű *Poisson*-eloszlás megfelelő faktoriális momentumával, a további faktoriális momentumuk 0, míg a *Poisson*-eloszlás j -edik faktoriális momentumuma b^j .

A fenti eloszlásokkal kapcsolatban megemlítjük a [2], [5], [7], [8], [9], [10], [12], [15], [16] dolgozatokat.

3. Homogén születési folyamatok

Ha a $\xi(t)$ sztochasztikus folyamat lehetséges állapotai a nemnegatív egész számok, és

$$(12) \quad P(\xi(t + \Delta t) = n | \xi(t) = n) = 1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(\xi(t + \Delta t) = n + 1 | \xi(t) = n) = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

teljesül, ahol λ_n a t időtől független konstans, a $\xi(t)$ folyamatot homogén születési folyamatnak nevezzük. Ez a folyamat igen gyakori az irodalomban: Mc KENDRICK [17] volt az első, aki tárgyalta, a további cikkek közül O. LUNDBERG [24], M. A. WOODBURY [18] munkáit említjük.

Jelöljük $P_k(t)$ -vel a $\{\xi(t) = k\}$ esemény valószínűségét, és $\mu^{(k)}(t)$ -vel a $\xi(t)$ változó k -adik faktoriális momentumát. Tegyük fel, hogy $\xi(0) = 0$. Igen általános feltételek mellett teljesül, hogy

$$(13) \quad P_k(t) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{k!} t^k + o(t^k)$$

$$\mu^{(k)}(t) = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1} t^k + o(t^k).$$

Fenti összefüggéseket konkrét fizikai folyamatokkal kapcsolatban J. O. IRWIN [19] mutatta ki, bizonyításukat P. ARMITAGE [20] adta meg.

Abban az esetben, amikor a λ_n paraméterek értéke egyenlő: $\lambda_n = \lambda$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) a $\xi(t)$ változó — mint ismeretes — *Poisson*-eloszlású λt paraméterrel:

$$(14) \quad P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}; \quad \mu^{(k)}(t) = (\lambda t)^k.$$

Ha a *Poisson*-folyamat λ paramétere maga is valószínűségi változó $P(\lambda < x) = G(x)$ eloszlásfüggvénnyel, $\xi(t)$ eloszlása ún. kevert *Poisson*-eloszlás:

$$(15) \quad P_k(t) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} G(d\lambda).$$

Ennek az eloszlásnak a faktoriális momentumai megegyeznek a keverő eloszlás momentumaival:

$$(16) \quad \mu^{(k)}(t) = \int_0^\infty (\lambda t)^k G(d\lambda) = \mu_k(t),$$

mint ahogy azt már KERRICH [21] kimutatta. FELLER [22], [23] vetette fel először a kérdést, hogy melyek azok a születési folyamatok, amelyeket elő lehet állítani *Poisson*-folyamatok keverékeként. A kevert *Poisson*-folyamat már nem lesz időben homogén — tehát a (12) jobb oldalán álló λ_n tényező függ az időtől — de a (13) alatti összefüggések érvényesek tetszőleges születési folyamatra, ha bennük λ_n értékét $t=0$ mellett vesszük. Általánosabban kérdezhetjük azt is, hogy melyek azok a születési folyamatok, amelyek $P_k(t)$ eloszlása előállítható kevert *Poisson*-eloszlás-ként, megengedve azt is, hogy a (15) alatti $G(x)$ keverő eloszlás a t időtől függjön.

Összefoglalva tehát az eddig mondottakat: annak szükséges feltétele, hogy a születési folyamat $P_k(t)$ eloszlása minden t mellett kevert *Poisson*-eloszlás legyen az, hogy a

$$(17) \quad \mu^{(k)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mu^{(k)}(t)}{t^k} = \lambda_0 \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{k-1}$$

faktoriális momentumok elegendenek mindazoknak a feltételeknek, amelyeknek egy nemnegatív eloszlás momentumaira teljesülniük kell. Így például a

$$\mu^{(2)} = \lambda_0 \lambda_1 \equiv [\mu^{(1)}]^2 = \lambda_0^2,$$

azaz $\lambda_1 \equiv \lambda_0$ feltétel épp annak felel meg, hogy a keverő eloszlás szórása nemnegatív legyen, tehát *Poisson*-eloszlások keverékére a $V(\xi)$ *Poisson*-index értéke legalább 1.

IRODALOM

- [1] A. NOACK: A class of random variables with discrete distributions, *Ann. Math. Stat.* **21** (1950) 127—132.
- [2] W. L. STEVENS: Mean and variance of an entry in a contingency table, *Biometrika*, **38** (1952) 468—470.
- [3] K. SARKADI: Generalized hypergeometric distributions, *Publ. Math. Inst. of the Hung. Acad. Sci.* **2**. (1957) 59—69.
- [4] J. GURLAND: Some interrelations among compound and generalized distributions, *Biometrika* **44** (1957) 265—268.
- [5] J. G. SKELLAM: A probability distribution derived from the binomial distribution by regarding the probability of success as variable between the sets of trials, *J. R. Stat. Soc. B.* **10** (1948). 257—261.
- [6] C. D. és A. W. KEMP: Generalized hypergeometric distributions, *J. R. Stat. Soc. B.* **18** (1956) 202—211.
- [7] G. I. BATEMAN: The power of the X^2 indice of dispersion test when Neyman's contagious distribution is the alternative hypothesis. *Biometrika* **37** (1950) 59—63.
- [8] M. THOMAS: Some tests for randomness in plant populations, *Biometrika* **38** (1951) 101—114.
- [9] J. NEYMAN: On a new class of „contagious” distributions, applicable in entomology and bacteriology, *Ann. Math. Stat.* **10** (1939) 35—57.
- [10] G. BEALL—R. R. RESCIA: *Biometrics* **9** (1953) 355—386.
- [11] M. F. WISE: The incomplete beta-function as a contourintegral and a quickly converging series for its inverse. *Biometrika* **37** (1950) 208—218.
- [12] M. S. RAFF: On approximating the point binomial, *Journal Am. Stat. Ass.* **51** (1956) 293—303.
- [13] P. F. SANDIFORD: A new binomial approximation for use in sampling from finite populations, *Journal Am. Stat. Ass.* **55** (1960) 718—722.
- [14] P. OTTESTAD: *Skand. Aktuarietid.* (1939) 22—31.
- [15] J. B. S. HALDANE: On a method of estimating frequencies, *Biometrika* **33** (1945) 222—225.
- [16] M. SANDELIUS: *Kungl. Lantbronskshogsk Ann.* **18** (1952) 123—127.
- [17] A. G. MCKENDRICK: *Proc. London Math. Soc.* (2) **13** (1914) 401—416.
- [18] M. A. WOODBURY: On a probability distribution, *Ann. Math. Stat.* **20** (1949) 311—313.
- [19] J. O. IRWIN: On the „Lautition probabilities” Corresponding to any accident distribution, *J. R. Stat. Soc. B.* **15** (1953) 87—89.
- [20] P. ARMITAGE: A note on the time-homogeneous birth process, *J. R. Stat. Soc. B.* **15** (1953) 90—91.
- [21] J. E. KERRICH: *Biometrics* **7** (1947) 402
- [22] W. FELLER: On a general class of „contagious” distributions, *Ann. Math. Stat.* **14** (1943) 389—399.
- [23] W. FELLER: On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications, *Proc. Berkeley Symposium on Stat. and Prob.* (1949) 403—433.
- [24] Ø. LUNDBERG: *On random processes and their application to Sickness and accident statistics*, Almqvist & Wiksells, Upsala.
- [25] W. MAGNUS—F. OBERHELTINGER: *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, 2. kiad. Berlin, Springer, (1948).