A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

ALGORITMUSOK LOGIKAI SÉMÁIRÓL (I)

Irta: JU. I. JANOV[1]

Bevezetés

Minden algoritmus elemi műveletek egyértelműen meghatározott sorozatát írja elő konkrét objektum átalakításánál (amelyre az algoritmust alkalmazzuk). A ténylegesen végrehajtott elemi műveletek sorozata általában függ attól az objektumtól, amelyre a tekintett algoritmust alkalmazzuk. De található az átalakítandó objektumok bizonyos sajátosságait kifejező ítéletek olyan véges halmaza, hogy az adott algoritmushoz ezen ítéletek egyértelmű függvényeként meg tudjuk adni, hogyan függ az elemi műveletek elvégzésének sorrendje az átalakítandó objektumoktól. Ez a függvény véges sorozat segítségével felírható, amely az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ elemi műveletek[2] szimbólumaiból (ezeket operátoroknak nevezzük), ítéletekből és bizonyos $\underset{i}{\llcorner}$, $\underset{i}{\lrcorner}$ segédjelekből ($i = 1, 2, \ldots$) (ezeket bal és jobb félzárójeleknek nevezzük) áll. Nevezetesen, a következő jelöléseket vezetjük be. Az $A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_s}$ sorozat azt jelenti, hogy $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_s}$ operátorokat (műveleteket) kell sorban egymás után végrehajtani. Az $A_{i_1} \alpha \underset{m}{\llcorner} A_{i_2} \ldots \underset{m}{\lrcorner} A_{i_3} \ldots$, ahol α valamilyen ítélet, azt jelenti, hogy A_{i_1} végrehajtása után $\alpha = 1$ esetén az $\underset{m}{\llcorner}$-től közvetlenül jobbra álló A_{i_2} operátort, $\alpha = 0$ esetén pedig az $\underset{m}{\lrcorner}$ jobb félzárójeltől (ugyanazzal az m indexszel mint az α ítéletnél álló bal félzárójelé) jobbra álló A_{i_3} operátort kell végrehajtani.

Az ilyen alakú sorozatokat *algoritmusok sémafelírásainak* nevezzük. Például, normális algoritmus [1] sémafelírását a következőképpen lehet megkapni. Legyen a normális algoritmus — valamely A ábécében — a következő alakú:

$$(1) \qquad \begin{cases} P_1 \to Q_1, \\ \quad \ldots \\ P_s \to \cdot Q_s, \\ \quad \ldots \\ P_n \to Q_n, \end{cases}$$

ahol $P_s \to \cdot Q_s$ végformula. Jelöljük p_i-vel — a „P_i szó beletartozik az átalakítandó

[1] О логических схемах алгоритмов, Проблемы Кибернетики **1** (1958), 75—127. (A dolgozat a szerző disszertációjának [6] kifejtése.) — Az itt közölt fordítás az 1. §-t és a 2. § 1—3. pontját, valamint a dolgozat irodalomjegyzékét tartalmazza. Ez úton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik a fordítás során segítséget nyújtottak. (A fordító.)

[2] Pontosabban, elemi műveletek típusai.

szóba" ítéletet, A_i-vel — a P_i szónak az átalakítandó szóban való első előfordulása helyén történő helyettesítését a Q_i szóval ($i=1, 2, \ldots, n$). Akkor az

$$
\begin{aligned}
&\underset{n+1}{\lrcorner} \ldots \underset{n+s+1}{\lrcorner} \quad \underset{n+s+1}{\lrcorner} \ldots \underset{2n}{\lrcorner} p_1 \underset{1}{\llcorner} A_1 0 \underset{n+1}{\llcorner} \underset{1}{\lrcorner} p_2 \underset{2}{\llcorner} A_2 0 \underset{n+2}{\llcorner} \ldots \\
&\ldots \underset{s-1}{\lrcorner} p_s \underset{s}{\llcorner} A_s 0 \underset{n+s}{\llcorner} \ldots \underset{n-1}{\lrcorner} p_n \underset{n}{\llcorner} A_n 0 \underset{2n}{\llcorner} \underset{n}{\lrcorner} \underset{n+s}{\lrcorner}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

sorozat a tekintett normális algoritmus sémafelírása.[3] Világos, hogy minden R szóra — az A ábécében — e szó fölötti $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots$ ($1 \leqq i_s \leqq n$; $s=1, 2, \ldots$) műveletek olyan sorozata, amelyet (fenti módon) a (2) sémafelírás előír, egybeesik az R szó azon átalakításai sorozatával, amely a normális algoritmus (1) séma szerinti alkalmazásánál előáll. Analóg módon beszélhetünk olyan algoritmusok sémafelírásairól, amelyek univerzális számológépre készített programokkal adottak, és amelyeket ebben az esetben programok sémáinak [2, 3][4] nevezünk.

Ha algoritmusok sémafelírásaiban elvonatkoztatunk az operátorok tartalmi értelmétől és csak elemi szimbólumaikkal vesszük figyelembe őket, az ítéleteket pedig független logikai változókkal, akkor az így kapott kifejezéseket nevezzük algoritmusok logikai sémáinak, vagy egyszerűen sémáknak, ha ez nem vezet kétértelműséghez. Algoritmusok logikai sémáit úgy tekinthetjük, mint algoritmusok sémafelírásainak sémáit (a logikában használt formulák sémáival analóg módon), amelyekből operátorok szimbólumainak és logikai változóknak konkrét operátorokkal és ítéletekkel való helyettesítése útján kapjuk algoritmusok konkrét sémafelírásait (nevezetesen, programok sémáit).

Könnyű meggyőződni arról, hogy elemi műveletek és ítéletek rögzített halmazánál ugyanannak az algoritmusnak[5] lehetnek különböző sémafelírásai és következésképpen, különböző logikai sémái. Például a

$$
p_1 \vee \bar{p}_2 \underset{1}{\llcorner} \underset{2}{\lrcorner} A_1 p_2 \underset{2}{\llcorner} 0 \underset{3}{\llcorner} \underset{1}{\lrcorner} A_2 \underset{3}{\lrcorner} \quad \text{és} \quad \bar{p}_1 \cdot p_2 \underset{1}{\llcorner} A_2 0 \underset{2}{\llcorner} \underset{1}{\lrcorner} \underset{3}{\lrcorner} A_1 p_2 \underset{3}{\llcorner} \underset{2}{\lrcorner}
$$

kifejezések ugyanannak az algoritmusnak a sémafelírásai konkrét operátorok és ítéletek tetszőleges megadásánál (A_1, A_2 és p_1, p_2 helyett).

Sémák tartalmi értelmére hivatkozva feltételezzük, hogy a logikai változók értékei csak az operátorok végrehajtásának pillanatában változhatnak. Emellett, amennyiben az algoritmusok logikai sémái nem tartalmaznak semmiféle információt a logikai változók értékeinek viselkedéséről, akkor a változásaik lehetőségeire bizonyos korlátozásokat — amelyeket algoritmusok sémafelírásaiban az operátorok individuális sajátosságai támasztanak —, adunk meg a logikai sémák számára

[3] Itt 0 azonosan hamis ítélet.

[4] Program sémája fogalmát A. A. LJAPUNOV indítványozta 1953-ban és kettős értelemben használták. Egyrészt, a gyakorlati programozásban és bizonyos munkákban [2, 3] program sémáján programok (algoritmusként tekintve) sémafelírását értették, másrészt [4, 5, 6] munkákban programok sémáin algoritmusok logikai sémáit (lásd a következő bekezdést) vagy programok sémáit — az első értelemben — értettek. Ezen kétértelműség elkerülésére jelen cikkben „algoritmus logikai sémája" elnevezést használjuk, amely tartalmilag ekvivalens [4, 5, 6] értelmében vett „program sémája" elnevezéssel.

[5] Itt azonosítjuk azokat az algoritmusokat, amelyek elemi műveletek (operátorok) ugyanazon sorozatát írják elő minden átalakítandó objektumra.

kívülről, úgynevezett változáseloszlások (01. 6)[6], azaz operátorok és logikai változók halmazai közötti megfeleltetések segítségével. Nevezetesen, ha adott valamilyen $A_i - \mathfrak{B}_i$ változáseloszlás, ahol A_i-k operátorok, $\mathfrak{B}_i$-k logikai változók halmazai ($i=1, 2, \ldots$), akkor feltételezzük, hogy A_i operátor végrehajtása pillanatában csak azon logikai változók értékei változhatnak meg, amelyek beletartoznak a $\mathfrak{B}_i$-be. Legyen adva valamilyen séma; megadjuk számára a logikai változók értékrendszereinek $\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \ldots$ sorozatát[7]. Ha feltételezzük, hogy a séma végrehajtásánál a logikai változók értékei ezen sorozatnak megfelelően változnak meg, azaz az m-edik (végrehajtás sorrendjében) operátor végrehajtása után a logikai változók a $\Delta_{s_{m+1}}$ értékrendszert kapják, akkor a végrehajtott operátorok meghatározott sorozatát kapjuk, amelyet a *séma értékének* nevezünk az *értékrendszerek adott sorozatára.* A változáseloszlás megadása minden séma számára kiválasztja az értékrendszerek összes lehetséges sorozatai közül a megengedett sorozatok halmazát, azaz olyan sorozatokét, amelyeknél minden értékrendszer az előzőtől csak azon változók értékeiben különbözhet, amelyek az adott változáseloszlás révén az előző értékrendszernél végrehajtott operátornak felelnek meg. Sémák ekvivalenciájának — adott változáseloszlásnál — a jelen munkában bevezetett fogalma megköveteli, hogy ekvivalens sémák értékei egybeessenek az értékrendszerek tetszőleges megengedett sorozatánál. Ez azt jelenti, hogy az összes ekvivalens sémák halmaza konkrét operátorok és ítéletek tetszőleges helyettesítésénél (amelyek kapcsolata megfelel az adott változáseloszlásnak) átmegy ugyanazon algoritmus sémafelírásainak halmazába[8].

A jelen munkában alkalmazott módszerekkel analóg módon meg lehet oldani sémák ekvivalenciájának és azonos átalakításainak problémáit a fentieknél általánosabb változáseloszlások esetén. Például, vehetjük azt az esetet, amikor az adott megfeleltetés alakja:

$$A_i - \mathfrak{B}_i^0, \mathfrak{B}_i^1, \mathfrak{B}_i^2, \mathfrak{B}_i^3 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

ahol $\mathfrak{B}_i^0$, $\mathfrak{B}_i^1$, $\mathfrak{B}_i^2$ és $\mathfrak{B}_i^3$ olyan logikai változók halmazai, amelyek az A_i operátor végrehajtása pillanatában rendre felveszik a 0 értéket ($\mathfrak{B}_i^0$), felveszik az 1 értéket ($\mathfrak{B}_i^1$), értékeiket ellenkezőre változtatják ($\mathfrak{B}_i^2$) és tetszőleges módon változhatnak meg ($\mathfrak{B}_i^3$).

Mint már említettük, a változáseloszlás megadása minden séma számára meghatározza az értékrendszerek megengedett sorozatai halmazát. Ez a halmaz jellemzi a logikai változók olyan változásait, amelyek formálisan lehetségesek algoritmusok — az adott sémákból helyettesítéssel kapott — különböző sémafelírásaival kapcsolatban. Általában, az algoritmusok konkrét sémafelírásaiban a végrehajtandó operátorok és a logikai változók értékeinek változásai közötti kapcsolat lehet tetszőlegesen összetett és leírására szükség lehet, például olyan változáseloszlásokra, amelyek a sémák végrehajtása folyamán változnak. A sémák átalakításainak a második §-ban felépített teljes rendszere alkalmazható megengedett sorozatok halmazainak tetszőleges megadásai esetén azzal a feltétellel, hogy az operátorok és logikai

[6] Kényelem kedvéért jelen cikkben az összes alapvető definíciót $On.m$ szimbólummal jelöljük, ahol n a paragrafus száma, m a definíció sorszáma, az adott paragrafusban.

[7] Az általánosság megszorítása nélkül szorítkozhatunk az értékrendszerek csak végtelen sorozataira.

[8] l. az [5] megjegyzést a 84. oldalon.

feltételek logikai függvényeknek való alárendeltségének — XI szabályban szereplő — fogalma megfelelő módon meghatározott. Természetes, hogy a megengedett sorozatok halmazainak bizonyos megadásainál az alárendeltség ezen fogalma egyáltalán nem bizonyul effektívnek. Egyszerűség kedvéért további vizsgálatainkban a változáseloszlás legegyszerűbb formájára korlátozódunk, amely azonban lehetővé teszi, hogy eléggé általános eredményeket kapjunk.

Az 1. §-ban szerepel egy effektív kritérium, amely biztosítja, hogy logikai sémák bármely párjára megállapítsuk, ekvivalensek-e vagy nem, adott változáseloszlásnál. Ugyanitt fogalmazunk meg analóg eredményt a parciális ekvivalencia (01. 9) fogalmára. (Amikor a logikai sémák vizsgálatánál a végrehajtott operátoroknak csak véges sorozataira vagyunk tekintettel.)

A 2. §-ban felépítjük az algoritmusok logikai sémái azonos átalakításainak rendszerét, amely teljes abban az értelemben, hogy bármely sémából tetszőleges — az adott változáseloszlásnál — vele ekvivalens séma megkapható csak ezen átalakítások felhasználásával.

A 3. §-ban az algoritmusok logikai struktúrájának kétmértékű felírásait vizsgáljuk, melyeket mátrix-sémáknak nevezünk. Ezekre az ekvivalencia és az azonos átalakítások problémáit szintén megoldjuk. Mátrix-sémák segítségével kapjuk algoritmusok logikai sémái ekvivalencia-problémájának megoldását $A_i = A_j$ alakú definiáló összefüggés esetén. (Itt feltételezzük, hogy a sémában minden operátor legfeljebb egy helyen fordul elő.)

Meg kell jegyezni, hogy — ellentétben például normális algoritmusok sémafelírásával — programok sémái (tehát azok logikai sémái) végrehajtásuk folyamán megváltozhatnak, mivel a nekik megfelelő programok át tudják alakítani — azokkal az objektumokkal együtt, amelyekre alkalmazzuk őket — saját magukat is. Ezért, ha jelen munkában kapott eredményeket programok sémáira alkalmazzuk, szükséges, hogy különös tekintettel legyünk azok logikai sémái változásának lehetőségeire.

1. §. Algoritmusok logikai sémáinak ekvivalencia-problémái

1. Alapfogalmak

Megállapodunk abban, hogy a következő alapműveleteket: negációt, konjunkciót, diszjunkciót, implikációt, ekvivalenciát [7], rendre a következő szimbólumokkal jelöljük: $-$, $\cdot$, v, $\rightarrow$, $=$, a „hamis" és „igaz" értékeket pedig a 0, ill. 1 számjegyekkel.[9]

01. 1. Az ítéletkalkulus α formuláját a tőle jobbra álló i természetes szám indexű bal félzárójellel $\alpha \llcorner_{i}$ *logikai feltételnek* nevezzük.

01. 2. *Algoritmus logikai sémájának* olyan véges sorozatot nevezünk, amely operátorok $A_1, A_2, \ldots$ szimbólumaiból, $\alpha \llcorner_{i}, \beta \llcorner_{j}, \ldots$ logikai feltételekből és $\lrcorner_{i}, \lrcorner_{j}, \ldots$ jobb félzárójelekből áll úgy, hogy bármely — e sorozatba tartozó — i indexű bal félzárójelhez található benne egy és csakis egy jobb félzárójel ugyanazzal az i

[9] Feltételezzük, hogy a . szimbólum erősebben köt, mint a v. Továbbiakban a . jelet gyakran elhagyjuk.

indexszel, és fordítva, bármely $\underset{i}{\rfloor}$ jobb félzárójelhez található egy és csakis egy bal félzárójel ugyanazzal az indexszel.

Algoritmusok logikai sémáinak legegyszerűbb példái a következők: A; $\alpha \underset{1}{\lfloor} \underset{1}{\rfloor}$; $\underset{1}{\rfloor} \alpha \underset{1}{\lfloor}$; $\alpha \underset{1}{\lfloor} A \underset{1}{\rfloor}$; $\underset{1}{\rfloor} A \alpha \underset{1}{\lfloor}$, ahol α valamilyen logikai függvény.

A továbbiakban, ha ez nincs külön kikötve, feltételezzük, hogy a sémában minden operátor legfeljebb egy helyen fordul elő.

01. 3. Megállapodunk abban, hogy az operátorokat és a logikai feltételeket *elemi kifejezéseknek* nevezzük.

01. 4. Tekintsük az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ sémát, ahol $p_1, \ldots, p_k$ — független logikai változók. Jelöljük a $p_1, \ldots, p_k$ változók értékeinek összes lehetséges sorozatát $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{2^k}$-val, és tekintsük ilyen értékrendszerek tetszőleges végtelen sorozatát:

(1) $$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots .$$

Indukcióval definiáljuk az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ séma (1) sorozatra történő *végrehajtásának eljárását.*

Első lépés: A Δ_{s_1} értékek sorozatát adjuk $p_1, \ldots, p_k$ változóknak és megjelöljük az $\mathfrak{A}$ séma bal szélső szimbólumát. Tegyük fel, hogy l lépést elvégeztünk, amelyek eredményeként kiírtuk az operátorok

(2) $$A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_{m-1}}$$

sorozatát (üres is lehet), és az l-edik lépésben megjelöltük a séma valamely szimbólumát. Akkor az $l+1$-edik lépésben megvizsgáljuk az l-edik lépésben megjelölt szimbólumot, és attól függően, hogy az operátor, logikai feltétel vagy jobb félzárójel, a következőt tesszük.

1. Ha az l-edik lépésben megjelölt szimbólum az A_{i_m} operátor, akkor kiírjuk azt (a (2) sorozat jobb oldalára); ezután a $\Delta_{s_{m+1}}$ értékrendszert adjuk $p_1, \ldots, p_k$ változóknak, és megjelöljük az $\mathfrak{A}$ sémában az A_{i_m} után közvetlenül következő szimbólumot.

2. Ha az l-edik lépésben megjelölt szimbólum — $\alpha(p_1, \ldots, p_k)\underset{i}{\lfloor}$ [10], akkor $\alpha(\Delta_{s_m}) = 1$ esetén megjelöljük az $\mathfrak{A}$ sémában az $\alpha(p_1, \ldots, p_k)\underset{i}{\lfloor}$-től közvetlenül jobbra álló szimbólumot, és $\alpha(\Delta_{s_m}) = 0$ esetén az $\mathfrak{A}$ sémában az $\underset{i}{\lfloor}$ jobb félzárójeltől közvetlenül jobbra álló szimbólumot.

3. Ha az l-edik lépésben megjelölt szimbólum jobb félzárójel, akkor megjelöljük az $\mathfrak{A}$ sémában azt a szimbólumot, amely ezen félzárójel után közvetlenül következik.

Ha az $\mathfrak{A}$ sémában nincs olyan szimbólum, amelyet 1(—3) értelmében meg kell jelölni, akkor semmiféle szimbólumot nem jelölünk meg, és a következő lépésben az eljárás befejeződik.

Ezen eljárás eredményeként kiírt operátorok sorozatát fogjuk $\mathfrak{A}$ *sémának* az (1) *sorozatra* tekintett *értékének* nevezni, emellett, ha a séma végrehajtásának

[10] Itt és a továbbiakban logikai függvények argumentumaiként az összes $p_1, \ldots, p_k$ változót fogjuk írni, tekintet nélkül arra, hogy közülük némelyektől a függvény-értékek ténylegesen nem függhetnek.

eljárása végtelenül folytatódik, a kiírt operátorok sorozata véges, akkor hozzáírjuk jobbra a ( ) jelet, amelyet *üres periódusnak* nevezünk. Az üres periódusú értékeket végteleneknek vesszük. Például, a $\underset{2}{\lrcorner}\,\bar{p}_1 \underset{1}{\llcorner}\, A_1 \underset{1}{\lrcorner}\, p_2 \underset{2}{\llcorner}\, A_2$ séma értéke a (0, 0), (1, 0), (1, 0), ..., (1, 0), ... sorozatnál: $A_1(\quad)$, és a (0, 0), (0, 0), (1, 1), ... sorozatnál: $A_1 A_1 A_2$.

01. 5. Az $\mathfrak{A}$ séma — (1) sorozatra történő — végrehajtásának eljárásában megjelölt elemi kifejezéseket az (1) *sorozatra* az $\mathfrak{A}$ *sémában végrehajthatóknak* nevezzük. Emellett, ha az adott elemi kifejezés megjelölésének pillanatában a logikai változók értéke Δ_s értékrendszer volt, akkor azt mondjuk, hogy az említett elemi kifejezés az (1) sorozatra Δ_s értékrendszernél végrehajtásra kerül.

A továbbiakban egyszerűség kedvéért néha a sémáknak a $\Delta_s, \Delta_s, \ldots, \Delta_s, \ldots$ alakú stacionárius sorozatokra kapott értékeit a Δ_s *értékrendszerre* kapott értéknek nevezzük.

01. 6. Tekintsük operátorok $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazát és logikai változók $\mathfrak{B} = \{p_1, \ldots, p_k\}$ halmazát. Azt mondjuk, hogy adott az

$$A_i - \mathfrak{A}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, t) \tag{3}$$

változáseloszlás, ha minden $\mathfrak{M}$-beli A_i operátornak a logikai változók valamely $\mathfrak{B}_i \subset \mathfrak{B}$ halmaza van megfeleltetve.

Tartalmilag ez annak kifejezése, hogy az A_i operátor csak $\mathfrak{B}_i$-beli változók értékeit változtathatja meg.

01. 7. Legyen az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ (ahol $n \leqq t$) séma — az értékrendszerek

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots \tag{4}$$

sorozatára kapott értéke:

$$A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_m} A_{i_{m+1}} \ldots,$$

amely l hosszúságú $(0 \leqq l \leqq \infty)$[11]. A (4) sorozatot az $\mathfrak{A}$ séma számára *megengedettnek* nevezzük (3) változáseloszlásnál, ha minden $m(\leqq l)$-re $\Delta_{s_{m+1}}$ vagy egybeesik Δ_{s_m}-mel, vagy attól csak $\mathfrak{B}_{i_m}$-beli változók értékeiben különbözik (azaz a (3) változáseloszlás által A_{i_m}-nek megfeleltetett halmaz elemei értékében).

Megállapodunk abban, hogy megengedett sorozatoknál sémák végrehajtásának eljárását és értékeit megengedett eljárásoknak és értékeknek nevezzük.

01. 8. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k)$ és $\mathfrak{B}(p_1, \ldots, p_k)$ sémák[12] *ekvivalensek adott változáseloszlásnál* (amit így jelölünk: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$), ha bármely — az $\mathfrak{A}$ vagy $\mathfrak{B}$ séma számára megengedett — értékrendszersorozatra értékeik egybeesnek ennél a változáseloszlásnál.

Az alkalmazások szempontjából érdekes az az eset, amikor a sémáknak csak véges megengedett értékeit vizsgáljuk.

01. 9. Az $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k)$ és $\mathfrak{B}(p_1, \ldots, p_k)$ sémákat akkor nevezzük *parciálisan ekvivalenseknek* ($\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$-vel jelöljük) *adott változáseloszlásnál,* ha bármely — az $\mathfrak{A}$ vagy $\mathfrak{B}$ séma számára megengedett — értékrendszer-sorozatra értékeik vagy egybeesnek, vagy közülük annak értéke, amelyre ez a sorozat megengedett, végtelen.

[11] Véges sorozat hosszán tagjai számát értjük, végtelen sorozat hossza egyenlő ∞-nel.

[12] Itt és a továbbiakban nem teszünk korlátozásokat a tekintett sémákban előforduló operátorok halmazára, kivéve azt, hogy ezen halmaz minden operátorának az adott változáseloszlás a logikai változók valamely halmazát (esetleg üres) feleltesse meg.

10. 10. Sémák ekvivalenciájának (megfelelően parciális ekvivalenciájának) problémáját a következőképpen fogalmazzuk meg: keresni kell olyan algoritmust, amellyel sémák bármely párja esetén eldönthető, hogy ekvivalensek (parciálisan ekvivalensek) vagy nem, — adott változáseloszlásnál.

Megemlítjük a változáseloszlások két esetét:

1. üres változáseloszlás, amikor minden operátornak a logikai változók üres halmazát feleltetjük meg;

2. univerzális változáseloszlás, amikor minden operátornak az összes logikai változók halmazát feleltetjük meg.

Univerzális változáseloszlásnál — minden sorozat megengedett, ezért ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémák univerzális változáseloszlásnál ekvivalensek, akkor tetszőleges változáseloszlásnál is ekvivalensek.

2. Az ekvivalenciaprobléma megoldása

Bevezetünk néhány kiegészítő fogalmat.

01. 11. Az $\mathfrak{A}(p_1, ..., p_k)$ sémában a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés végrehajtása *első feltételének* nevezzük az ítéletkalkulus következőképpen definiált $\mathfrak{B}^{\otimes}_{(\mathfrak{A})}(p_1, ... p_2)$ függvényét:

$$\mathfrak{B}^{\otimes}_{(\mathfrak{A})}(\Delta_s) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \mathfrak{B} \text{ végrehajtásra kerül az } \mathfrak{A} \text{ sémában a } \Delta_s, \Delta_s, ..., \Delta_s, ... \\ & \text{szorzatnál;} \\ 0, & \text{az ellenkező esetben.} \end{cases}$$

01. 12. Minden $\mathfrak{A}(p_1, ..., p_k, A_1, ..., A_n)$ sémához az

$$A_i - \mathfrak{Y}_i \quad (i=1, 2, ..., n) \tag{1}$$

változáseloszlás mellett bizonyos speciális sémát építünk fel, amelyet az $\mathfrak{A}$ séma *stacionárius kibővítésének* nevezünk.

1. Bevezetjük a következő jelölést: $\alpha_i^1 = \max_{\mathfrak{Y}_i} A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A})}(p_1, ..., p_k)$ $(i=1, 2, ..., n)$, ahol a maximum a $\mathfrak{Y}_i$-beli változók értékeinek összes lehetséges sorozatain veendő, és tekintsük a következő sémát[13]:

$$\mathfrak{A}^{(1)} \equiv q_1 v \overline{\alpha_1^1} \underset{j_1}{\llcorner} ... q_n v \overline{\alpha_n^1} \underset{j_n}{\llcorner} \mathfrak{A}(p_1, ..., p_k, A_1 \underset{j_1}{\lrcorner}, ..., A_n \underset{j_n}{\lrcorner}),$$

ahol $q_1, ..., q_n$ független logikai változók, $j_1, ..., j_n$ az $\mathfrak{A}$ sémában elő nem forduló félzárójel indexek.

2. Legyenek definiálva az α_i^ν $(i=1, 2, ..., n)$ függvények és az $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ séma, amelyet az $\mathfrak{A}$ séma ν-edik kibővítésének nevezünk. Akkor tegyük fel, hogy:

$$\alpha_i^{\nu+1} = \max_{\mathfrak{Y}_i, q_1, ..., q_n} A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A}^{(\nu)})}(p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_n) \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

[13] A $\equiv$ jelet a grafikus azonosság jelölésére használjuk.

ahol a maximum a $\mathfrak{Y}_i$-beli és $q_1, \ldots, q_n$ változók értékeinek összes lehetséges sorozatain veendő;

$$\mathfrak{A}^{(\nu+1)} \equiv q_1 v \overline{\alpha_1^{\nu+1}} \underset{j_1}{\llcorner} \ldots q_n v \overline{\alpha_n^{\nu+1}} \underset{j_n}{\llcorner} \mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1 \underset{j_1}{\lrcorner}, \ldots, A_n \underset{j_n}{\lrcorner}).$$

Megjegyezzük, hogy az $\mathfrak{A}$ séma lehet olyan, hogy az $A_1, \ldots, A_n$ operátorok közül némelyeket nem tartalmaz. Ebben az esetben azokat a jobb félzárójeleket, amelyeknek a megfelelő operátoroktól jobbra kell állni, közvetlenül az $\mathfrak{A}$ séma elé állítjuk. Világos, hogy ilyen félzárójelek elhelyezése nem befolyásolja a kibővítések értékeit, mivel a hiányzó operátorokra: $A_i^{\otimes} \equiv 0$.

Könnyű meggyőződni arról, hogy az $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ séma minden megengedett értéke az $\mathfrak{A}$ séma valamely megengedett értékének része.

Nyilvánvaló, hogy minden $i(=1, 2, \ldots, n)$-re és $\nu(=1, 2, \ldots)$-re $\alpha_i^\nu \rightarrow \alpha_i^{\nu+1}$ [14] (azaz $\alpha_i^\nu \leqq \alpha_i^{\nu+1}$), ezért található olyan μ természetes szám, hogy $\alpha_i^{\mu+1} \equiv \alpha_i^\mu$ minden $i(=1, 2, \ldots, n)$-re. Az $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ sémát az $\mathfrak{A}$ séma *stacionárius kibővítésének* nevezzük (az (1) változáseloszlásnál).

Bevezetjük a következő jelöléseket:

(2) $$A_i^* = \max_{q_1, \ldots, q_n} A_{i(\mathfrak{A}^{(\mu)})}^{\otimes} (p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_n),$$

(3) $$A_i^{**} = \alpha_i^\mu, \quad \text{azaz} \quad A_i^{**} = \max_{\mathfrak{Y}_i} A_i^* = \max_{\mathfrak{Y}_i, q_1, \ldots, q_n} A_{i(\mathfrak{A}^{(\mu)})}^{\otimes}.$$

Akkor az $\mathfrak{A}$ séma $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ stacionárius kibővítését a következő alakban írhatjuk fel:

(3[1]) $$\mathfrak{A}^{(\mu)} \equiv q_1 \vee \overline{A_1^{**}} \underset{j_1}{\llcorner} \ldots q_n \vee \overline{A_n^{**}} \underset{j_n}{\llcorner} \mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1 \underset{j_1}{\lrcorner}, \ldots, A_n \underset{j_n}{\lrcorner}).$$

Az A_i^* és A_i^{**} függvények jelentése — mint ez a továbbiakból (1. 1—3. 1 lemmák) látható — a következő. Az $\mathfrak{A}$ séma bármely megengedett értékrendszer-sorozatnál történő végrehajtásánál az A_i operátort csak olyan értékrendszernél lehet végrehajtani, amely az A_i^* függvény értékét 1-re változtatja, és e sorozat következő tagja az A_i^{**} értékét változtatja 1-re; fordítva, ha A_i^* $(\Delta_s) = 1$, akkor található olyan

$$\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_s, \ldots$$

megengedett sorozat, hogy ennél a Δ_s értékrendszer mellett az A_i operátor végrehajtásra kerül.

Üres változáseloszlásnál nyilvánvalóan $A_i^* \equiv A_i^{**} \equiv A_i^{\otimes}$.

01. 13. $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k)$ és $\mathfrak{B}(p_1, \ldots, p_k)$ sémákat *gyengén ekvivalenseknek* nevezzük, ha bármely $\Delta_s, \Delta_s, \ldots, \Delta_s, \ldots$ alakú sorozatnál e sémák értékeire fennáll a következő: vagy ugyanaz az első operátoruk, vagy mindkettő üres, vagy mindkettő üres periódusú.

[14] Itt és mindenütt, ahol ez nem vezet kétértelműséghez, a „φ függvény azonosan igaz" vagy $\varphi \equiv 1$ kifejezés helyett egyszerűen φ-t írunk.

Az ekvivalenciaprobléma megoldását a következő tétel adja.

1. TÉTEL. *Ahhoz, hogy* $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ *és* $\mathfrak{B}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$[15] *sémák adott változáseloszlásnál* (1) *ekvivalensek legyenek, szükséges és elegendő, hogy stacionárius kibővítéseik gyengén ekvivalensek legyenek.*[16]

E tétel bizonyításához szükségünk lesz két lemmára.

1. 1. LEMMA. *Legyen az* $\mathfrak{A}$ *sémának — az* (1) *változáseloszlásnál megengedett —*

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots \tag{4}$$

értékrendszer-sorozatra kapott értéke:

$$A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_m} A_{i_{m+1}} \ldots . \tag{5}$$

Akkor minden $m(=1, 2, \ldots)$*-re érvényes az* $A^*_{i_m}(\Delta_{s_m}) = 1$ *egyenlőség, és következésképpen* $A^{**}_{i_m}(\Delta_{s_m}) = A^{**}_{i_m}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1.$

Bizonyítás. Nyilvánvalóan $A^{\otimes}_{i_1}(\Delta_{s_1}) = 1$, és ezért

$$A^*_{i_1}(\Delta_{s_1}) = 1.$$

Tegyük fel, hogy $A^*_{i_m}(\Delta_{s_m}) = 1$, és következésképpen

$$A^{**}_{i_m}(\Delta_{s_m}) = A^{**}_{i_m}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1; \tag{6}$$

bizonyítjuk, hogy akkor a $A^*_{i_{m+1}}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1$ fönnáll. Valóban (6)-ból, a lemma feltételéből és séma végrehajtása eljárásának egyértelműségéből következik, hogy a $p_1, \ldots, p_k$ változók értékeit a $\Delta_{s_{m+1}}$ értékrendszernél véve és $q_{i_m} = 0$, $q_i = 1$ $(i \neq i_m)$ esetén az $\mathfrak{A}$ séma $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ stacionárius kibővítésében $A^{\otimes}_{i_{m+1}} = 1$, ezért (2)-t figyelembe véve:

$$A^{\otimes}_{i_{m+1}}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1,$$

amit bizonyítani kellett.

2. 1. LEMMA. *Legyen* A_i *tetszőleges operátor. Ha az* $\mathfrak{A}$ *sémában az adott változáseloszlásnál* $A^{**}_i(\Delta_s) = 1$, *akkor található olyan — az* $\mathfrak{A}$ *séma számára ennél a változáseloszlásnál megengedett — értékrendszer-sorozat, amelyre az* $\mathfrak{A}$ *sémában a* Δ_{s_t} *értékrendszernél az* A_i *operátor végrehajtása kerül.*

Bizonyítás. Az A^{**}_i függvények definíciója szerint, ha $A^{**}_i(\Delta_s) = 1$, akkor van olyan v, hogy az $\mathfrak{A}$ séma v-edik kibővítésében fennáll az $\alpha^v_i(\Delta_s) = 1$ egyenlőség. Ezért elegendő azon feltétel mellett igazolni állításunkat, hogy valamilyen v természetes számra, $\alpha^v_i(\Delta_s)$ egyenlő 1-gyel. Ezt v szerinti indukció segítségével bizonyítjuk. Ha $\alpha^1_i(\Delta_s) = 1$, akkor ez azt jelenti, hogy létezik egy $\Delta_{s'}$ értékrendszer, amely Δ_s-től csak $\mathfrak{Y}_i$-beli változók értékeiben különbözhet úgy, hogy $A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A})}(\Delta_{s'}) = 1$, azaz A_i végrehajtásra kerül az $\mathfrak{A}$ sémában

$$\Delta_{s'}, \Delta_{s'}, \ldots, \Delta_{s'}, \ldots \tag{7}$$

[15] Ilyen felírás nem jelenti azt, hogy az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémáknak ténylegesen tartalmazni kell az összes $A_1, \ldots, A_n$ operátort és $p_1, \ldots, p_k$ változót.

[16] Feltételezzük, hogy mindkét séma kibővítéséhez a $q_1, \ldots, q_n$ elemi logikai változóknak ugyanazt a halmazát használjuk fel.

sorozatnál. Akkor nyilvánvaló, hogy a keresett sorozat a

$$\underbrace{\Delta_{s'}, \Delta_{s'}, \dots, \Delta_{s'}}_{N+1\text{-szer}}, \Delta_s, \Delta_s, \dots$$

sorozat lesz, ahol N azon operátorok száma, amelyek megelőzik az A_i operátor valamilyen előfordulását az $\mathfrak{A}$ séma — (7) sorozatra kapott — értékében. Tegyük fel, hogy a lemma állítása igaz, ha $\alpha_i^\nu(\Delta_s)=1$, és bizonyítjuk

(8) $$\alpha_i^{\nu+1}(\Delta_s) = 1$$

esetére. A (8) feltétel azt jelenti, hogy találhatók a $p_1, \dots, p_k$ és $q_1, \dots, q_n$ változóknak olyan $\Delta_{s'}$ és Δ' értékrendszerei, hogy

(9) $$A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A}^{(\nu)})}(\Delta_{s'}, \Delta') = 1,$$

emellett $\Delta_{s'}$ értékrendszer a Δ_s-től csak $\mathfrak{Y}_i$-beli változók értékeiben különbözhet.

Két eset lehetséges:

1. A $q_h \vee \overline{\alpha_h^\nu}$ $(h=1, 2, \dots, n)$ függvények a $\Delta_{s'}, \Delta'$ értékrendszernél 1-gyel egyenlők. Akkor az $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ séma értéke a $\Delta_{s'_n}, \Delta'$ értékrendszernél egybeesik az $\mathfrak{A}$ sémának a $\Delta_{s'}$-nél vett értékével, és így (9) miatt $A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A})}(\Delta_{s'})=1$, azaz az indukció első lépésében tisztázott eset áll fenn.

2. Nem minden $q_h \vee \overline{\alpha_h^\nu}$ függvény egyenlő 1-gyel a $\Delta_{s'}, \Delta'$ értékrendszernél. Legyen $q_l \vee \overline{\alpha_h^\nu} \underset{j_l}{\llcorner}$ az $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ séma legbaloldalibb olyan logikai feltétele, melyre $q_l(\Delta') \vee \overline{\alpha_l^\nu}(\Delta_{s'})=0$. Ebből két dolog következik: Először, $\alpha_l^\nu(\Delta_{s'})=1$, és akkor az indukció feltétele szerint található olyan $\Delta_{s_1}, \dots, \Delta_{s_r}, \Delta_{s'}, \Delta_{s'}, \dots$ megengedett sorozat, melyre az $\mathfrak{A}$ sémában Δ_{s_r} értékrendszernél az A_l operátor végrehajtásra kerül. Másodszor, (9) miatt ugyanerre a sorozatra $\Delta_{s'}$ értékrendszer valamely előfordulásánál A_i operátor végrehajtásra kerül. Teljesüljön ez a $\Delta_{s'}$ értékrendszer Δ_{s_r} utáni N-edik előfordulásánál. Akkor, mivel Δ_s a $\Delta_{s'}$-től csak $\mathfrak{Y}_i$-beli változók értékeiben különbözik, a

$$\Delta_{s_1}, \dots, \Delta_{s_r}, \underbrace{\Delta_{s'}, \Delta_{s'}, \dots, \Delta_{s'}}_{N\text{-szer}}, \Delta_s, \Delta_s, \dots$$

sorozat lesz a keresett megengedett sorozat. A lemmát így bizonyítottuk.

Az 1. Tétel bizonyítása.

Szükségesség. Legyen az (1) változáseloszlásnál

(10) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}.$$

Kimutatjuk, hogy akkor $A^{**}_{i(\mathfrak{A})} \equiv A^{**}_{i(\mathfrak{B})}$ $(i=1, 2, \dots, n)$. Valóban, ha valamely Δ_s értékrendszerre fennáll, hogy $A^{**}_{i(\mathfrak{A})}(\Delta_s)=1$, akkor a 2. 1. lemma miatt található olyan, az $\mathfrak{A}$ séma számára megengedett $\Delta_{s_1}, \dots, \Delta_{s_t}, \Delta_s, \dots$ sorozat, hogy Δ_{s_t} értékrendszernél A_i operátor végrehajtásra kerül. (10) alapján ennek a sorozatnak megvannak ugyanezek a sajátságai a $\mathfrak{B}$ sémára vonatkozóan is. Akkor az 1. 1. lemma értelmében $A^{**}_{i(\mathfrak{B})}(\Delta_s)=1$, ezért $A^{**}_{i(\mathfrak{A})} \to A^{**}_{i(\mathfrak{B})}$. Ebben a meggondolásban $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémát felcserélve kapjuk, hogy $A^{**}_{i(\mathfrak{B})} \to A^{**}_{i(\mathfrak{A})}$, azaz $A^{**}_{i(\mathfrak{A})} \equiv A^{**}_{i(\mathfrak{B})}$ $(i=1, 2, \dots, n)$. Világos, hogy akkor (3^1) és (10) figyelembevételével $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémák stacionárius kibővítései ekvivalensek adott változáseloszlásnál, és ebből következik, hogy még inkább gyengén ekvivalensek.

Elégségesség. Legyenek az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ séma $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ és $\mathfrak{B}^{(\mu')}$ stacionárius kibővítései (1) változáseloszlásnál gyengén ekvivalensek, és legyen valamilyen

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots$$

értékrendszer-sorozat például az $\mathfrak{A}$ sémára megengedett, az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémák értékei pedig

$$A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, \ldots \tag{11}$$

és

$$A_{i'_1}, A_{i'_2}, \ldots, A_{i'_m}, A_{i'_{m+1}}, \ldots. \tag{12}$$

Kimutatjuk, hogy ezek az értékek egybeesnek. Nyilvánvaló, hogy $i_1 = i'_1$, mivel $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ és $\mathfrak{B}^{(\mu')}$ sémák gyenge ekvivalenciájából az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémák gyenge ekvivalenciája következik.[17]

Tegyük fel, hogy

$$i_l = i'_l \qquad (l \leqq m), \tag{13}$$

és kimutatjuk, hogy akkor $i_{m+1} = i'_{m+1}$. Valóban, 1. 1. lemma szerint az $\mathfrak{A}$ séma számára

$$A^{**}_{i_m(\mathfrak{A})}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1. \tag{14}$$

Ezenkívül a (13) feltevésből következik, hogy a

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots$$

sorozat megengedett a $\mathfrak{B}$ séma számára. Akkor az 1. 1. lemma alapján

$$A^{**}_{i_m(\mathfrak{B})}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1. \tag{15}$$

Jelöljük Δ-val a $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_n$ változók értékei következő rendszerét: $p_1, \ldots, p_k$-nak adjuk $\Delta_{s_{m+1}}$ értékeit, továbbá legyen $q_{i_m} = 0$ és $q_i = 1$ $(i \neq i_m)$. (11)-et és (15)-öt figyelembe véve, az $A_{i_{m+1}}$ és $A'_{i_{m+1}}$ operátorok az $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ és $\mathfrak{B}^{(\mu')}$ sémák — $\Delta, \Delta, \ldots, \Delta, \ldots$ sorozatnál vett — értékeinek első operátorai. De mivel $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ és $\mathfrak{B}^{(\mu')}$ sémák gyengén ekvivalensek, ezek az operátorok egybeesnek, azaz $i_{m+1} = i'_{m+1}$.

Ugyanezekből a meggondolásokból következik, hogy ha (11) érték üres periódust tartalmaz, akkor (12) érték szintén üres periódust tartalmaz.

A tételt ezzel bebizonyítottuk.

Megjegyezzük az 1. tétel következő nyilvánvaló módosítását.

1'. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{A}$ *és* $\mathfrak{B}$ *sémák valamilyen* (1) *változáseloszlásnál ekvivalensek legyenek, szükséges és elegendő, hogy stacionárius kibővítéseik üres változáseloszlásnál ekvivalensek legyenek.*

Megjegyezzük, hogy üres változáseloszlásnál minden sémának csak véges számú (2^k) véges vagy periodikus értéke van, ezért a sémák ekvivalenciájának problé-

[17] Innen, speciálisan, következik az is, hogy ha (11) érték üres periódusú vagy üres, akkor a (12) érték is üres periódusú vagy megfelelően üres.

mája üres változáseloszlásnál mindig megoldható értékeik közvetlen összehasonlításával.

Megjegyezzük, hogy univerzális változáseloszlásnál az összes A_i^{**} függvény azonosan a 0 vagy 1 konstanssal egyenlő.

3. A parciális ekvivalencia problémájának megoldása

Először bebizonyítjuk a következő állítást:

3. 1. LEMMA. *Ha az* $\mathfrak{A}(p_1, ..., p_k, A_1, ..., A_n)$ *sémára* A_i—$\mathfrak{Y}_i$ $(i=1, 2, ..., n)$ *változáseloszlásnál fennáll* $A_i^* (\Delta_s)=1$, *akkor található olyan*

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, ..., \Delta_{s_m}, \Delta_s, ...$$

megengedett sorozat, hogy a Δ_s *értékrendszernél az* A_i *operátor végrehajtásra kerül.*

Valóban, mivel $A_i^* = \max\limits_{q_1, ..., q_n} A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A}^{(\mu)})}$ (ahol $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ az $\mathfrak{A}$ séma stacionárius kibővítése), ezért található a $q_1, ..., q_n$ változók értékeinek olyan Δ' rendszere, hogy

$$A^{\otimes}_{i(\mathfrak{A}^{(\mu)})}(\Delta_s, \Delta') = 1. \tag{1}$$

Ha Δ' olyan, hogy minden $q_i \vee \overline{A_i^{**}}$ $(\Delta_s)=1$ $(i=1, 2, ..., n)$, akkor nyilvánvalóan a keresett sorozat:

$$\Delta_s, \Delta_s, ..., \Delta_s, ...$$

Ellenkező esetben legyen $q_l \vee \overline{A_l^{**}} \underset{j_l}{\llcorner}$ az $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ séma legbalodalibb olyan logikai feltétele, hogy

$$q_l(\Delta') \vee \overline{A_l^{**}}(\Delta_s) = 0. \tag{2}$$

Ez azt jelenti, hogy A_l^{**} $(\Delta_s)=1$, és akkor a 2. 1. lemma értelmében létezik olyan $\Delta_{s_1}, ..., \Delta_{s_t}, \Delta_s, ...$ megengedett sorozat, hogy Δ_{s_t} értékrendszernél az A_l operátor végrehajtásra kerül. De akkor (2) és (1) miatt a $\Delta_{s_1}, ..., \Delta_{s_t}, \Delta_s, \Delta_s, ...$ megengedett sorozatra Δ_s értékrendszer valamely előfordulásánál A_i operátor végrehajtásra kerül, amit bizonyítani kellett.

A felírások egyértelműsége kedvéért jelen pontban minden sémához hozzáírunk balra és jobbra tőlük bizonyos lerögzített operátorokat (például üreseket, amelyeket A_0-val és A_ω-val jelölünk, azaz feltételezzük, hogy minden séma ilyen alakú:

$$A_0 \mathfrak{A} A_\omega .$$

Emellett minden változáseloszlást kiegészítünk az $A_0 - 0$, $A_\omega - 0$ megfeleltetésekkel, ahol 0 a logikai változók üres halmaza. Világos, hogy $i=1, 2, ..., n$ esetén

$$A^*_{i(\mathfrak{A})} \equiv A^*_{i(A_0 \mathfrak{A} A_\omega)} .$$

Alábbiakban leírunk egy eljárást, amely lehetővé teszi, hogy bármely $\mathfrak{A}$ sémához felépítsünk bizonyos speciális $\tilde{\mathfrak{A}}$ sémát úgy, hogy $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémák parciális ekvivalenciájának problémája az $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ sémák gyenge ekvivalenciájának problémájához vezessen.

01. 14. Tekintsük az $A_0\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)A_\omega$ sémát és A_i—$\mathfrak{Y}_i$ ($i=0, 1, 2, \ldots, n, \omega$) változáseloszlást, ahol $\mathfrak{Y}_0$ és $\mathfrak{Y}_\omega$ üres halmazok.

Bevezetjük minden $i(=0, 1, \ldots, n)$-re a következő jelölést:

$$\hat{\mathfrak{A}}_i \equiv \overline{A^{**}_{i(A_0\mathfrak{A}A_\omega)}} \underset{s}{\llcorner} 0 \underset{t}{\llcorner} A_0\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_i \underset{s}{\lrcorner}, \ldots, A_n) A_\omega \underset{t}{\lrcorner};$$

speciálisan,

$$\hat{\mathfrak{A}}_0 \equiv 0 \underset{s}{\llcorner} 0 \underset{t}{\llcorner} A_0 \underset{s}{\lrcorner} \mathfrak{A} A_\omega \underset{t}{\lrcorner}.$$

Jelölje $\Gamma_{\mathfrak{Y}}(\alpha, \beta)$ a maximális olyan γ függvényt, amelyre $\gamma \leqq \alpha$ és $\max\limits_{\mathfrak{Y}} \gamma \leqq \beta$, ahol $\mathfrak{Y}$ a logikai változók valamilyen halmaza, és a maximumot a $\mathfrak{Y}$-beli változók értékei összes lehetséges értékrendszerein kell venni. Világos, hogy $\Gamma_{\mathfrak{Y}}(\alpha, \beta)$ létezik bármely α, β függvénypárra.

01. 15. Jelöljük ω-t $n+1$-gyel és tekintsük a függvények következő rendszerét, amely $i=0, 1, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n+1$ esetén definiált.

$$\beta^0_{ij} = A^{\otimes}_{j(\hat{\mathfrak{A}}_i)}, \quad \gamma^0_{ij} \Gamma_{\mathfrak{Y}_i}(A^*_{i(A_0\mathfrak{A})}, \beta^0_{ij}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta^{\nu+1}_{ij} = \beta^\nu_{ij} \vee \bigvee_{m=0}^{n} \beta^\nu_{im} \gamma^\nu_{mj}; \quad \gamma^{\nu+1}_{ij} = \Gamma_{\mathfrak{Y}_i}(A^*_{i(A_0\mathfrak{A})}, \beta^{\nu+1}_{ij}).$$

Mivel bármely $i=0, 1, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n+1$ és $\nu=0, 1, \ldots$ esetén nyilvánvalóan $\beta^\nu_{ij} \leqq \beta^{\nu+1}_{ij}$, ezért található olyan λ természetes szám, hogy minden i, j ($0 \leqq i \leqq n$; $1 \leqq j \leqq n+1$) párra: $\beta^{\lambda+1}_{ij} \equiv \beta^\lambda_{ij}$.

Bevezetjük a következő jelöléseket: $\beta_i = \beta^\lambda_{i,n+1}$ és

$$\tilde{\mathfrak{A}} \equiv \bar{\beta}_0 \vee q_0 \underset{j_0}{\llcorner} \ldots \bar{\beta}_n \vee q_n \underset{j_n}{\llcorner} \underset{t}{\lrcorner} 0 \underset{t}{\llcorner} A_0 \underset{j_0}{\lrcorner} \mathfrak{A}(p_1, \ldots p_k, A_1 \underset{j_1}{\lrcorner}, \ldots, A_n \underset{j_n}{\lrcorner}) A_{n+1}.$$

Érvényes a következő tétel:

2. TÉTEL. *Az* $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ *és* $\mathfrak{B}(p_1, \ldots, p_k, A_1, \ldots, A_n)$ *sémák akkor és csakis akkor parciálisan ekvivalensek, ha* $\tilde{\mathfrak{A}}$ *és* $\tilde{\mathfrak{B}}$ *sémák gyengén ekvivalensek.*

E tétel bizonyítása világossá válik, ha megvizsgáljuk a β_i függvények jelentését.

01. 16. Az

(3) $$A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, A_{i_{m+2}}, \ldots$$

sorozat A_{i_m} *elemet követő maradékának* nevezzük az $A_{i_{m+1}}, A_{i_{m+2}}, \ldots$ sorozatot, amelyet (3)-ból az $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ szelet elhagyásával nyerünk.

Az 1. 1. és 2. 1. lemmák miatt nyilvánvaló, hogy az $\hat{\mathfrak{A}}_i (0 \leqq i \leqq n)$ sémák minden (nem üres) megengedett értéke az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma megengedett értékének az A_i operátort követő maradéka, és fordítva, az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma megengedett értékének minden — az A_i operátort követő — maradéka az $\hat{\mathfrak{A}}_i$ sémák megengedett értéke. Akkor nyilvánvalóan β^0_{ij} maximális a következő tulajdonsággal rendelkező függvények közül: ha az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ sémában valamely

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_{m-1}}, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_m}, \ldots, \Delta_{s_m}, \ldots$$

megengedett sorozatra a $\Delta_{s_{m-1}}$ értékrendszernél A_i operátor végrehajtásra kerül és $\beta_{ij}^0(\Delta_{s_m})=1$, akkor az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma értékének A_i-t követő maradéka tartalmazza az A_j operátort.

Más szóval β_{ij}^0 a maximális olyan függvény, hogy ha A_i operátorral kezdjük az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma végrehajtását a β_{ij}^0-t 1-re változtató értékrendszernél, akkor — az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma végrehajtása közben a logikai változók értékeit nem változtatva — szükségszerűen végrehajtjuk az A_j operátort. A 3. 1. lemma miatt γ_{ij}^0 maximális a következő feltételt kielégítő függvények közül: ha $\gamma_{ij}^0(\Delta_{s_m})=1$, akkor létezik az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ sémára megengedett olyan

$$\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots$$

értékrendszer-sorozat, hogy a Δ_{s_m} értékrendszernél végrehajtásra kerül az A_i operátor, és az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma értékének A_i ezen előfordulását követő maradéka tartalmazza az A_j operátort. Ebből következik, hogy bármely:

$$\Delta_{r_1}, \Delta_{r_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots$$

megengedett sorozatra fennáll, hogy ha $\gamma_{ij}^0(\Delta_{s_m})=1$ és a Δ_{s_m} értékrendszernél az A_i operátor vágrehajtásra kerül, akkor a $\Delta_{s_{m+1}}$ értékrendszer valamely előfordulásánál az A_j operátor is végrehajtásra kerül.

Hasonlóan látható, hogy β_{ij}^1 a maximális azon függvények közül, amelyekre az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma minden megengedett végrehajtásánál fennáll a következő: ha közvetlenül az A_i operátor végrehajtása után a $p_1, \ldots, p_k$ változók a β_{ij}^1-et 1-re változtató értékeket kaptak, akkor mindig van olyan megengedett folytatása az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma végrehajtása ezen eljárásának, amelynél a logikai változók értékei legfeljebb egyszer változnak meg és az A_j operátor végrehajtásra kerül.

Ezeket a meggondolásokat folytatva, azt kapjuk, hogy β_{ij}^ν maximális a következő feltételnek eleget tevő függvények közül: az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma minden megengedett végrehajtásánál fennáll, hogy ha az A_i operátor végrehajtása után a $p_1, \ldots, p_k$ változók a β_{ij}^ν-t 1-re változtató értékek rendszerét kapják, akkor ezen eljárásnak van olyan megengedett folytatása, amelynél a logikai változók értékei legfeljebb ν-ször változnak meg, és az A_j operátor végrehajtásra kerül. Következésképpen, a β_{ij}^λ függvények ($\beta_{ij}^{\lambda+1}$-gyel ekvivalensek minden $i(=0, 1, \ldots, n)$-re és $j(=1, 2, \ldots, n+1)$-re) maximálisak a következő tulajdonságú függvények között: az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma bármely megengedett végrehajtásának eljárásánál, ha az A_i operátor végrehajtása után a $p_1, \ldots, p_k$ változók egyszerre veszik fel értékek olyan rendszerét, amely a β_{ij}^λ függvényt 1-re változtatja, akkor van ennek az eljárásnak olyan megengedett folytatása, amelynél az A_j operátor végrehajtásra kerül. Az a tény, hogy a β_{ij}^ν-k maximálisak az említett tulajdonságú függvények között, azt jelenti, hogy a $p_1, \ldots, p_k$ értékeinek *minden* olyan rendszere, amely a felsorolt követelményeknek eleget tesz, a $\beta_{ij}^\nu(p_1, \ldots, p_k)$ függvényeket 1-re változtatja. A β $(i=0, 1, \ldots, n)$ függvények definíció szerint annak az esetnek felelnek meg, amikor $j=n+1$, és meghatározott értelemben jellemzik az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma értékeit, mivel ilyen séma értéke akkor és csak akkor véges, ha az A_{n+1} operátort tartalmazza.

Most bebizonyítjuk a 2. tételt.

Szükségesség. Legyen $\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_n) \cong \mathfrak{B}(A_1, \ldots, A_n)$. A β_i függvényekről megállapítottak szerint ez azt jelenti, hogy $\beta_{i(\mathfrak{A})} \equiv \beta_{i(\mathfrak{B})}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$. Ezért az $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ sémák parciálisan ekvivalensek. Továbbá, bármely $(\Delta', \Delta_s), (\Delta', \Delta_s), \ldots$ $\ldots, (\Delta', \Delta_s), \ldots$ értékrendszer-sorozatra (ahol Δ' a $q_0, q_1, \ldots, q_n$ értékeinek rendszere, Δ_s a $p_1, \ldots, p_k$ értékeinek rendszere), amelyre $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ séma értéke nem üres periódusú, található olyan i, hogy $\beta_i(\Delta_s) = 1$, és így létezik olyan — (Δ', Δ_s)-sel kezdődő — megengedett sorozat, amelyre $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ sémák azonos véges értékűek. De mivel $\tilde{\mathfrak{A}} \cong \tilde{\mathfrak{B}}$, ez azt jelenti, hogy $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\mathfrak{B}$ sémák gyengén ekvivalensek.

Elégségesség. Tegyük fel, hogy $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ gyengén ekvivalensek. Kimutatjuk, hogy akkor $\beta_{i(\mathfrak{A})} \equiv \beta_{i(\mathfrak{B})}$. Valóban, ha $\beta_{i(\mathfrak{A})}(\Delta_s) = 0$, $\beta_{i(\mathfrak{B})}(\Delta_s) = 1$, akkor a (Δ', Δ_s), $(\Delta', \Delta_s), \ldots$ értékrendszer-sorozatra — ahol Δ' a $q_0, \ldots, q_n$ változók értékeinek olyan rendszerét jelenti, amelyben $q_i = 0$ és $q_j = 1$ $(j \neq i)$ —, $\tilde{\mathfrak{A}}$ séma értéke üres (üres periódusú), a $\tilde{\mathfrak{B}}$ sémáé pedig nem. (Mivel abból, hogy $\beta_{i(\mathfrak{B})}(\Delta_s) = 1$ következik olyan — az $A_0\mathfrak{B}A_{n+1}$-re megengedett — $\Delta_{r_1}, \ldots, \Delta_s, \Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots$ sorozat létezése, amelyre az $A_0\mathfrak{B}A_{n+1}$ séma értéke az A_{n+1} operátort tartalmazza.) Ezért, ha $\beta_{i(\mathfrak{A})}(\Delta_s) = 0$, akkor $\beta_{i(\mathfrak{B})}(\Delta_s) = 0$, azaz $\beta_{i(\mathfrak{B})} \to \beta_{i(\mathfrak{A})}$. Mivel ebben a meggondolásban az $\mathfrak{A}$ és a $\mathfrak{B}$ séma ekvivalens, így

$$\beta_{i(\mathfrak{A})} \to \beta_{i(\mathfrak{B})}, \quad \text{azaz} \quad \beta_{i(\mathfrak{A})} \equiv \beta_{i(\mathfrak{B})} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Legyen most valamely megengedett

$$\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \ldots, \Delta_{s_m}, \Delta_{s_{m+1}}, \ldots$$

értékrendszer-sorozatra

$$A_0, A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, \ldots, A_{n+1}$$

az $A_0\mathfrak{A}A_{n+1}$ séma véges értéke. Továbbá legyen ugyanerre a sorozatra

$$A_0, A_{i'_1}, A_{i'_2}, \ldots, A_{i'_m}, A_{i'_{m+1}}, \ldots$$

az $A_0\mathfrak{B}A_{n+1}$ séma értéke. Tegyük fel, hogy $i_l = i'_l$ $(l \leqq m)$, és kimutatjuk, hogy akkor $i_{m+1} = i'_{m+1}$. Valóban, a β_i függvényekről megállapítottak szerint $\beta_{i_m}(\Delta_{s_{m+1}}) = 1$. De akkor az $A_{i_{m+1}}$ és $A_{i'_{m+1}}$ operátorok az $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ sémák értékeinek első operátorai a

$$(\Delta', \Delta_{s_{m+1}}), (\Delta', \Delta_{s_{m+1}}), \ldots$$

értékrendszer-sorozatra, ahol Δ' a $q_0, \ldots, q_n$ értékeinek olyan rendszere, amelyben $q_{i_m} = 0$ és $(j \neq i_m)$-re $q_j = 1$. $\tilde{\mathfrak{A}}$ és $\tilde{\mathfrak{B}}$ sémák gyengén ekvivalens volta miatt ezeknek az operátoroknak egybe kell esniök, azaz $i_{m+1} = i'_{m+1}$, amit bizonyítani kellett.

2. §. Algoritmusok logikai sémáinak átalakításai

1. Elemi kifejezés logikai függvénynek való alárendeltsége

Ebben a paragrafusban olyan kalkulust építünk fel, amelyben az összes $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ alakú igaz állítások megkaphatók (adott változáseloszlásnál), ahol $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ sémák. Ehhez szükségünk van az elemi kifejezés logikai függvénynek való alárendeltsége fogalmára.

02. 1. Kiterjesztjük tetszőleges elemi kifejezésekre az A_i függvényeknek a 01. 12-ben operátorokra adott definícióját. Tekintsük a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezést és az $\mathfrak{A}(p_1, ..., p_k, A_1, ..., A_n)$ sémát $A_i - \mathfrak{Y}_i$ (1) változáseloszlásnál. Bevezetjük a következő jelölést:

$$\mathfrak{B}^* = \max_{q_1, ..., q_n} \mathfrak{B}^{\otimes}_{(\mathfrak{B})^{(\mu)}},$$

ahol $\mathfrak{A}^{(\mu)}$ az $\mathfrak{A}$ séma stacionárius kibővítése az (1) változáseloszlásnál (l. 94. old.).

Nyilvánvalóan üres változáseloszlásnál $\mathfrak{B}^* \equiv \mathfrak{B}^{\otimes}$.

02. 2. Akkor mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}(p_1, ..., p_k)$ sémában $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés az $\alpha(p_1, ..., p_k)$ függvénynek alá van rendelve adott változáseloszlásnál, és ezt $\mathfrak{B} \prec \alpha$-val jelöljük, ha ennél a változáseloszlásnál

$$\mathfrak{B}^* \to \alpha.$$

Az alárendeltség fogalmának jelentése a következő. Ha

$$\mathfrak{B} \prec \alpha(p_1, ..., p_k),$$

akkor $p_1, ..., p_k$ értékeinek az α-t 0-ra változtató rendszerénél $\mathfrak{B}$ semmilyen megengedett sorozatra nem hajtható végre. Ha $\mathfrak{B}$ operátor, akkor ez az állítás az 1. §. 1. 1. lemmából közvetlenül következik. Abban az esetben, ha a $\mathfrak{B}$ logikai feltétel, akkor szükséges az 1. 1. lemmát úgy élesíteni, hogy az $\mathfrak{A}$ séma értékei helyett az összes végrehajtott elemi kifejezések sorozatát tekintjük. Akkor a Δ_{s_m} értékrendszernél $\mathfrak{B}_{i_m 1}, \mathfrak{B}_{i_m 2}, ..., \mathfrak{B}_{i_m j_m}$ elemi kifejezések valamely halmaza kerül végrehajtásra, amelyek közül a legutolsó az A_{i_m}. Azzal analóg módon, ahogy ezt az 1. §. 1. 1. lemmában tettük, bebizonyítható, hogy

$$\mathfrak{B}^*_{i_m j}(\Delta_{s_m}) = 1 \qquad (j = 1, 2, ..., j_m)$$

minden $m (= 1, 2, ...)$-re, ahonnan állításunk már következik.

Nyilvánvaló, hogy a stacionárius kibővítések — és következőképpen a $\mathfrak{B}^*$ függvények — felépítéséhez tetszőleges változáseloszlásnál elegendő csak a $\mathfrak{B}^{\otimes}$ függvények ismerete (azaz üres változáseloszlásnál $\mathfrak{B}^*$ függvények ismerete), amelyeket mindig véges eljárással kaphatunk meg. Ebből következik, hogy az alárendeltségnek fentebb adott definíciója effektív.

A továbbiakban (2. pont) ekvivalenciák olyan rendszereit vezetjük be, amelyek megoldásai a $\mathfrak{B}^*$ függvények és amelyek biztosítják, hogy e függvényeket megkapjuk anélkül, hogy a stacionárius kibővítések felépítéséhez folyamodnánk. Ezenkívül nagyon gyakran — a definiált feltételek értelmében — adott változáseloszlásnál vett alárendeltség egybeesik az üres változáseloszlásnál vett alárendeltséggel, ezért az üres változáseloszlás esetére az 5. pontban úgy definiáljuk az alárendeltség fogalmát, hogy a séma topológiai felépítéséből indulunk ki, nem támaszkodva a séma értékének fogalmára.

Gyakorlatilag nem szükséges a $\mathfrak{B}^*$ függvények ismerete azon függvények meghatározásához, amelyeknek alá van rendelve valamely elemi kifejezés. Mint ismeretes, a tartalmi meggondolások felhasználása lehetővé teszi, hogy viszonylag könnyen találjunk olyan értékrendszereket, amelyeknél az adott elemi kifejezés nem hajtható végre semmiféle megengedett sorozatra, és akkor minden olyan függvény, amely ilyen értékrendszerek tetszőleges részhalmazán 0-val egyenlő, olyan függvény lesz, amelynek az adott elemi kifejezés alá van rendelve. Vizsgáljunk meg néhány példát. Megállapodunk abban, hogy valamely i indexű jobb félzárójelre azt mondjuk, hogy ahhoz a logikai feltételhez *hozzátartozik*, amelynek bal félzárójele ugyanolyan i indexű.

1. Az $\ldots\alpha\underset{i}{\llcorner}\mathfrak{B}\ldots$ alakú sémában nyilvánvalóan a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés az α függvénynek alá van rendelve tetszőleges változáseloszlásnál, emellett, ha $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ logikai feltétel alá van rendelve β függvénynek, akkor $\mathfrak{B}$ alá van rendelve $\alpha\cdot\beta$ függvénynek.

2. Az $\ldots\alpha\underset{i}{\llcorner}\underset{j_1}{\lrcorner}\underset{j_2}{\lrcorner}\ldots\underset{j_s}{\lrcorner}\mathfrak{B}\ldots$ alakú sémában, ahol a $\underset{j_1}{\lrcorner},\ldots,\underset{j_s}{\lrcorner}$ jobb félzárójelek hozzátartoznak a $\beta_1\underset{j_1}{\llcorner},\ldots,\beta_s\underset{j_s}{\llcorner}$ logikai feltételekhez, a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés nyilvánvalóan bármely változáseloszlásnál alá van rendelve $\alpha\vee\bar{\beta}_1\vee\ldots\vee\bar{\beta}_s$ függvénynek. Emellett, ha

$$\beta_l\underset{j_l}{\llcorner}\prec\gamma_l \qquad (l=1,2,\ldots,s),$$

akkor $\mathfrak{B}\prec\alpha\vee\gamma_1\bar{\beta}_1\vee\ldots\vee\gamma_s\cdot\bar{\beta}_s$.

3. Az $\ldots\alpha\underset{i}{\llcorner}A_j\mathfrak{B}\ldots$ alakú sémában $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés nyilvánvalóan alá van rendelve a $\max\limits_{\mathfrak{D}_j}\alpha$ függvénynek az $A_j-\mathfrak{D}_j$ változáseloszlásnál, mivel $A_j\prec\alpha$.

02. 3. *Kifejezésnek* nevezünk minden olyan véges sorozatot, amely operátorok szimbólumaiból, logikai feltételekből és jobb félzárójelekből áll úgy, hogy minden benne előforduló i természetes számra legfeljebb egy i indexű bal és jobb félzárójel van.

A kifejezéseket tartalmilag sémák részeinek kell tekintenünk.

Továbbiakban beszélni fogunk logikai függvényeknek alárendelt elemi kifejezésekről adott *kifejezésben* is, ezen az adott kifejezést tartalmazó minden sémában való alárendeltséget értve. Ez a fogalom nem annyira effektív, mint az alárendeltség fogalma sémában, mivel minden kifejezéshez lehet találni olyan sémát, amely azt tartalmazza, és ebben a sémában vett alárendeltség ekvivalens a tekintett kifejezésben vett alárendeltséggel.

2. Ekvivalenciák rendszerei a $\mathfrak{B}^*$ függvényekre

Jelen pontban olyan összefüggéseket vizsgálunk, amelyeket könnyen megkaphatunk a séma külső alakjából, és amelyek az esetek többségében lehetővé teszik a séma összes elemi kifejezéseire a $\mathfrak{B}^*$ függvények megtalálását.

02. 4. Legyen valamely $\mathfrak{A}$ kifejezés $\mathfrak{A}_l\mathfrak{B}\mathfrak{L}\vartheta\mathfrak{A}_2$ alakú, ahol $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$ és ϑ kifejezések. Akkor a $\mathfrak{B}\mathfrak{L}\vartheta$ kifejezést az $\mathfrak{A}$ kifejezés $[\mathfrak{B}\vartheta]$ *zárt intervallumának*, a $\mathfrak{L}$ kifejezést $(\mathfrak{B}, \vartheta)$ *nyitott intervallumának* nevezzük.

02. 5. Valamely kifejezésben $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ logikai feltételt *egyenesnek* nevezünk, ha $\underset{i}{\lrcorner}$ jobb félzárójele ebben a kifejezésben a bal félzárójeltől jobbra áll, és *fordítottnak*, ha jobb félzárójele a bal félzárójeltől balra áll.

02. 6. Az $\mathfrak{A}(\alpha\underset{i}{\llcorner})$ kifejezésben $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ egyenes logikai feltétel *hatástartományának* az $(\alpha\underset{i}{\llcorner},\underset{i}{\lrcorner})$ intervallumot nevezzük. Az $\mathfrak{A}$ kifejezésben $\alpha\underset{i}{\llcorner}$ fordított logikai feltétel hatástartományának az $\mathfrak{A}$ kifejezés azon részeit nevezzük, amelyek az $\underset{i}{\llcorner}$ bal fél-

zárójeltől jobbra és az $\lrcorner_i$, ezen logikai feltételhez tartozó, jobb félzárójeltől balra találhatók.

Az $\alpha\llcorner_i$ logikai feltétel hatástartományát $\sigma(\alpha\llcorner_i)$-val jelöljük.

Az $\alpha\llcorner_i$ logikai feltétel hatástartományának a bal félzárójeltől jobbra fekvő részét $\alpha\llcorner_i$ hatástartománya egyenes részének nevezzük, és $\sigma^+(\alpha\llcorner_i)$-vel jelöljük.

Abban az esetben, ha $\mathfrak{A}(\alpha\llcorner_i)$ kifejezés nem tartalmazza az $\lrcorner_i$ jobb félzárójelet, úgy tekintjük, hogy $\sigma^+(\alpha\llcorner_i)$ egybeesik az $\mathfrak{A}$ kifejezésnek az $\llcorner_i$ bal félzárójeltől jobbra eső részével.

Nyilvánvaló, hogy minden kifejezésben bármely logikai feltétel hatástartományának egyenes része kifejezés.

02. 7. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}$ sémában $\alpha\llcorner_i$ logikai feltétel a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezést *átfogja*, ha $\alpha\llcorner_i$ a legjobboldalibb az $\mathfrak{A}$ séma azon logikai feltételei közül, amelyek $\mathfrak{B}$-t hatástartományuk egyenes részében tartalmazzák.

02. 8. A $\gamma\llcorner_k$ logikai feltételt az $\mathfrak{A}$ sémában $\mathfrak{B}$ elemi kifejezéshez *vezetőnek* nevezzük, ha az $\mathfrak{A}$-ban van olyan $\mathfrak{B}$-t átfogó $\alpha\llcorner_i$ logikai feltétel, hogy

$$\gamma\llcorner_k \,\bar{\in}\, (\alpha\llcorner_i, \mathfrak{B}) \quad \text{és} \quad \lrcorner_k \in (\alpha\llcorner_i, \mathfrak{B}).$$

Vizsgáljuk először a $\mathfrak{B}^*$ függvények előállításának módszereit üres változáseloszlásnál, azaz amikor a függvények egybeesnek $\mathfrak{B}^{\otimes}$ függvényekkel.

Valamely $\mathfrak{A}(p_1, \ldots p_k)$ sémában $\alpha\llcorner_i$ logikai feltétel legyen $\mathfrak{B}$ elemi kifejezést átfogó, és az összes, $\mathfrak{A}$-ban $\mathfrak{B}$-hez vezető logikai feltétel: $\gamma_1\llcorner_{k_1}, \ldots, \gamma_l\llcorner_{k_l}$. Akkor nyilvánvaló, hogy:

$$\mathfrak{B}^{\otimes}_{(\mathfrak{A})} \equiv \alpha\cdot(\alpha\llcorner_i)^{\otimes} \vee \bar{\gamma}_1\cdot(\gamma_1\llcorner_{k_1})^{\otimes} \vee \ldots \vee \bar{\gamma}_l\cdot(\gamma_l\llcorner_{k_l})^{\otimes}. \tag{1}$$

Valóban, az $\mathfrak{A}$ séma végrehajtásánál — $\Delta_s, \Delta_s, \ldots$ stacionárius értékrendszersorozatra — $\mathfrak{B}$-hez eljuthatunk: vagy $\alpha\llcorner_i$-t végrehajtva $\alpha(\Delta_s)=1$ feltétel mellett, vagy $\gamma_j\llcorner_{k_j}$ $(1 \leqq j \leqq l)$-k közül valamelyiket végrehajtva $\gamma_j(\Delta_s)=0$ feltételnél, azaz

$$\mathfrak{B}^{\otimes} \to \alpha\cdot(\alpha\llcorner_i)^{\otimes} \vee \bar{\gamma}_1\cdot(\gamma_1\llcorner_{k_1})^{\otimes} \vee \ldots \vee \bar{\gamma}_l\cdot(\gamma_l\llcorner_{k_l})^{\otimes}.$$

Fordítva, legyen Δ_s értékrendszernél az (1) ekvivalencia jobb oldala 1-gyel egyenlő. Ez azt jelenti, hogy vagy $\alpha(\Delta_s)=1$ és $(\alpha\llcorner_i)^{\otimes}_{\Delta_s}=1$, vagy van olyan $j(1 \leqq j \leqq l)$, hogy $\gamma_j(\Delta_s)=0$ és $(\gamma_j\llcorner_{k_j})^{\otimes}_{\Delta_s}=1$. Nyilvánvaló, hogy akkor a $\Delta_s, \Delta_s, \ldots$ sorozatra a $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés a $\mathfrak{B}$ sémában végrehajtásra kerül, azaz $\mathfrak{B}^{\otimes}(\Delta_s)=1$.

Ha nincs $\mathfrak{B}$-t átfogó logikai feltétel, azaz nem tartozik valamely hatástartomány egyenes részébe, akkor nyilvánvalóan

$$\mathfrak{B}^{\otimes}_{(\mathfrak{A})} \equiv 1. \tag{2}$$

Ily módon, ha az $\mathfrak{A}$ séma minden elemi kifejezésére felírjuk az (1) (vagy (2), ha nincs megfelelő átfogó logikai feltétel) alakú ekvivalenciát, akkor ekvivalenciák olyan rendszerét kapjuk, amelynek megoldása az $\mathfrak{A}$ séma összes elemi kifejezése végrehajtása első feltételeinek halmaza. Emellett, mivel az (1) és (2) ekvivalencia jobb oldala nem tartalmazza operátorok végrehajtása első feltételét, ezért a séma összes elemi kifejezése végrehajtása első feltételének megkapásához elegendő ekvivalenciák olyan rendszerének megoldását megtalálni, amely csak logikai feltételekre van felírva (ha ennek a rendszernek van egyetlen megoldása), és akkor az operátorok végrehajtása első feltételét egyértelműen meghatározzák az (1) és (2) formulák. Azokban az esetekben, amikor az említett rendszernek nincs egyetlen megoldása, a sémából kiegészítő feltételeket kell nyerni, például úgy, hogy megvizsgáljuk az értékeit bizonyos értékrendszerekre.

1. *Példa.* A

$$p_1 \underset{1}{\llcorner} A_1 p_2 \underset{2}{\llcorner} A_2 \underset{1}{\lrcorner} A_3 p_3 \underset{3}{\llcorner} A_4 \underset{2}{\lrcorner} A_5 p_4 \underset{4}{\llcorner} A_6 \underset{5}{\lrcorner} A_7 \underset{6}{\lrcorner} A_8 \underset{3}{\lrcorner} A_9 \underset{4}{\lrcorner} A_{10} p_5 \underset{5}{\llcorner} A_{11} p_6 \underset{6}{\llcorner}$$

sémára:

$$(p_1 \underset{1}{\llcorner})^{\otimes} \equiv 1,$$

$$(p_2 \underset{2}{\llcorner})^{\otimes} \equiv p_1 \cdot (p_1 \underset{1}{\llcorner})^{\otimes},$$

$$(p_3 \underset{3}{\llcorner})^{\otimes} \equiv p_2 \cdot (p_2 \underset{2}{\llcorner})^{\otimes} \vee \bar{p}_1 (p_1 \underset{1}{\llcorner})^{\otimes},$$

$$(p_4 \underset{4}{\llcorner})^{\otimes} \equiv p_3 \cdot (p_3 \underset{3}{\llcorner})^{\otimes} \vee \bar{p}_2 \cdot (p_2 \underset{2}{\llcorner})^{\otimes},$$

$$(p_5 \underset{5}{\llcorner})^{\otimes} \equiv 1,$$

$$(p_6 \underset{6}{\llcorner})^{\otimes} \equiv p_5 (p_5 \underset{5}{\llcorner})^{\otimes},$$

ahonnan

$$(p_3 \underset{3}{\llcorner})^{\otimes} \equiv p_2 p_1 \vee \bar{p}_1 \equiv p_2 \vee p_1; \quad (p_4 \underset{4}{\llcorner})^{\otimes} \equiv p_3 (p_1 \vee p_2) \vee p_1 \cdot \bar{p}_2 \equiv p_3 \vee p_1 \bar{p}_2.$$

Akkor, például:

$$A_8^{\otimes} \equiv p_4 (p_4 \underset{4}{\llcorner})^{\otimes} \vee \bar{p}_5 \vee \bar{p}_6 p_5 \equiv p_4 (p_3 \vee p_1 \bar{p}_2) \vee \bar{p}_5 \vee p_6.$$

A többi operátor végrehajtása első feltételét analóg módon kaphatjuk.

Megjegyezzük, hogy a logikai feltételek végrehajtása első feltételének meghatározásánál elegendő csak a séma „logikai váz”-át vizsgálni, azaz azt, ami az összes operátor törlése után a sémából marad.

2. *Példa.* Legyen a séma logikai váza a következő:

$$p_1 \underset{1}{\llcorner} \underset{3}{\lrcorner} \underset{5}{\lrcorner} p_2 \underset{2}{\llcorner} \underset{4}{\lrcorner} p_1 \vee \bar{p}_2 \underset{3}{\llcorner} \underset{1}{\lrcorner} \bar{p}_1 \underset{4}{\llcorner} \underset{2}{\lrcorner} \bar{p}_2 \underset{5}{\llcorner}.$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$x_1 = (p_1 \underset{1}{\llcorner})^{\otimes}, x_2 = (p_2 \underset{2}{\llcorner})^{\otimes}, x_3 = (p_1 \vee \bar{p}_2 \underset{3}{\llcorner})^{\otimes}, x_4 = (p_1 \underset{4}{\llcorner})^{\otimes}, x_5 = (p_2 \underset{5}{\llcorner})^{\otimes}.$$

Akkor, nyilvánvalóan:

$$x_1 \equiv 1,$$
$$x_2 \equiv p_1 \vee \bar{p}_1 p_2 x_3 \vee p_2 x_5,$$
$$x_3 \equiv p_2 x_2 \vee p_1 x_4,$$
$$x_4 \equiv (p_1 \vee \bar{p}_2) x_3 \vee \bar{p}_1,$$
$$x_5 \equiv \bar{p}_1 x_4 \vee \bar{p}_2 x_2.$$

Tegyük fel, hogy $p_1 = 0$. Akkor a rendszer ilyen alakú lesz:

$$x_2 \equiv p_2 x_3 \vee p_2 x_5,$$
$$x_3 \equiv p_2 x_2,$$
$$x_4 \equiv 1,$$
$$x_5 \equiv x_4 \vee \bar{p}_2 \cdot x_2 \equiv 1,$$

ahonnan $x_2 \equiv p_2$ és következésképpen $x_3 \equiv p_2$.

Tegyük fel most, hogy $p_1 = 1$. Akkor

$$x_2 \equiv 1,$$
$$x_3 \equiv p_2 \vee x_4,$$
$$x_4 \equiv x_3,$$
$$x_5 \equiv \bar{p}_2,$$

ahonnan $x_3 \equiv p_2 \vee x_3$, azaz vagy $x_3 \equiv 1$, vagy $x_3 \equiv p_2$. A szükséges megoldás kiválasztásához megvizsgáljuk a sémát. Mivel $p_1 = 1$, $p_2 = 0$-nál a $p_1 \vee \bar{p}_2 \underset{3}{\llcorner}$ logikai feltétel nem kerül végrehajtásra (azaz x_3 $(1, 0) = 0$), így $p_1 = 1$-nél x_3-ra a második megoldást kell tekinteni: $x_3 \equiv p_2$.

Ily módon kapjuk:

p_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	p_2	p_2	1	1
1	1	p_2	p_2	$\bar{p}_2$

ahonnan

$$x_2 \equiv p_1 \vee p_2, \quad x_3 \equiv p_2, \quad x_4 \equiv \bar{p}_1 \vee p_2, \quad x_5 \equiv \bar{p}_1 \vee \bar{p}_2.$$

Vizsgáljuk most tetszőleges változáseloszlás esetét. Keressük ekvivalenciák olyan rendszerét, amelyet a $\mathfrak{B}^*$ függvények kielégítenek.

02. 9. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{B}$ elemi kifejezés az $\mathfrak{A}$ sémában *alá van rendelve* az A_i operátornak, ha A_i az $\mathfrak{A}$ sémában a $\mathfrak{B}$-től balra álló operátorok közül a legjobboldalibb, továbbá az A_i-t és $\mathfrak{B}$-t átfogó logikai feltétel azonos (vagy egyiküknek sincs).

Vizsgáljuk az $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ sémát valamely $A_i - \mathfrak{Y}_i$ változáseloszlásnál. A következő esetek lehetségesek:

1. $\mathfrak{B}$ alá van rendelve valamelyik A_i operátornak. Legyen az összes $[A_i, \mathfrak{B}]$ zárt intervallumon kívül álló olyan logikai feltétel, amelyek jobb félzárójele ebben a zárt intervallumban van: $\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}$. Akkor, nyilvánvalóan

$$\mathfrak{B}^* \equiv \max_{\mathfrak{Y}_i} A_i^* \vee \bar{\gamma}_1 \cdot (\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner})^* \vee \ldots \vee \bar{\gamma}_l \cdot (\gamma_l \underset{k_l}{\llcorner})^*. \tag{3}$$

2. $\mathfrak{B}$ egyetlen operátornak sincs alárendelve, de $\alpha \underset{i}{\llcorner}$ a $\mathfrak{B}$-t átfogó logikai feltétel. Legyen az összes $\mathfrak{B}$-hez vezető logikai feltétel: $\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner}, \ldots, \gamma_l \underset{k_l}{\llcorner}$. Akkor

$$\mathfrak{B}^* \equiv \alpha \cdot (\alpha \underset{i}{\llcorner})^* \vee \bar{\gamma}_1 \cdot (\gamma_1 \underset{k_1}{\llcorner})^* \vee \ldots \vee \bar{\gamma}_l \cdot (\gamma_l \underset{k_l}{\llcorner})^*. \tag{4}$$

3. $\mathfrak{B}$ egyetlen operátornak sincs alárendelve, és nincs $\mathfrak{B}$-t átfogó logikai feltétel. Akkor nyilvánvalóan:

$$\mathfrak{B}^* \equiv 1. \tag{5}$$

Ily módon, ha az $\mathfrak{A}$ séma minden $\mathfrak{B}$ elemi kifejezésére felírjuk a (3), (4) vagy (5) ekvivalenciát attól függően, hogy az (1)—(3) esetek közül melyik áll fenn, akkor ekvivalenciák olyan rendszerét kapjuk, amelynek megoldásai a $\mathfrak{B}^*$ függvények.

3. *Példa.* Tekintsük a következő sémát:

$$\mathfrak{A} \equiv p_1 \underset{1}{\llcorner} A_1 \underset{3}{\lrcorner} A_2 \underset{5}{\lrcorner} A_3 p_2 \underset{2}{\llcorner} \underset{4}{\lrcorner} A_4 p_1 \vee \bar{p}_2 \underset{3}{\llcorner} A_5 \underset{1}{\lrcorner} A_6 \bar{p}_1 \underset{4}{\llcorner} \underset{2}{\lrcorner} A_7 \bar{p}_2 \underset{5}{\llcorner},$$

amelynek logikai vázát a 102. oldal 2. példájában vizsgáltuk. Jelölések: $x_1 = (p_1 \underset{1}{\llcorner})^*$, $x_2 = (p_2 \underset{2}{\llcorner})^*$, $x_3 = (p_1 \vee \bar{p}_2 \underset{3}{\llcorner})^*$, $x_4 = (\bar{p}_1 \underset{4}{\llcorner})^+$, $x_5 = (\bar{p}_2 \underset{5}{\llcorner})^*$. Akkor az $A_3 - \{p_2\}$, $A_4 - \{p_1\}$, $A_i - 0$ $(i \neq 3, 4)$ változáseloszlásnál:

$$\begin{array}{ll}
x_1 \equiv 1, & x_3 \equiv \max\limits_{\{p_1\}} A_4^*, \\
A_1^* \equiv p_1, & A_5^* \equiv (p_1 \vee \bar{p}_2) x_3, \\
A_2^* \equiv A_1^* \vee \bar{p}_1 p_2 x_3, & A_6^* \equiv A_5^* \vee \bar{p}_1, \\
A_3^* \equiv A_2^* \vee p_2 x_5, & x_4 \equiv A_6^*, \\
x_2 \equiv \max\limits_{\{p_2\}} A_3^*, & A_7^* \equiv \bar{p}_1 x_4 \vee \bar{p}_2 x_2, \\
A_4^* \equiv p_2 \cdot x_2 \vee p_1 x_4, & x_5 \equiv A_7^*.
\end{array}$$

Innen a következőt kapjuk:

$$A_2^* \equiv p_1 \vee p_2 x_3,$$

$$x_2 \equiv \max_{\{p_2\}} A_2^* \vee x_5 \equiv p_1 \vee x_3 \vee x_5,$$

$$x_3 \equiv \max_{\{p_1\}} p_2 x_2 \vee x_4 \equiv p_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5,$$

$$x_4 \equiv (p_1 \vee p_2) x_3 \vee \bar{p}_1 \equiv \bar{p}_1 \vee x_3,$$

$$x_5 \equiv \bar{p}_1 x_4 \vee \bar{p}_2 x_2,$$

ahonnan

$$x_2 \equiv p_1 \vee p_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \equiv p_1 \vee p_2 \vee x_3 \vee \bar{p}_1 \vee x_5 \equiv 1,$$

$$x_5 \equiv A_7^* \equiv \bar{p}_1 (\bar{p}_1 \vee x_3) \vee \bar{p}_2 \equiv \bar{p}_1 \vee \bar{p}_2,$$

$$x_3 \equiv p_2 \vee x_3 \vee \bar{p}_1 \vee \bar{p}_2 \equiv 1,$$

$$A_2^* \equiv p_1 \vee p_2,$$

$$A_3^* \equiv p_1 \vee p_2,$$

$$x_4 \equiv A_6^* \equiv 1,$$

$$A_4^* \equiv p_1 \vee p_2,$$

$$A_5^* \equiv p_1 \vee \bar{p}_2.$$

Univerzális változáseloszlásnál ugyanerre a sémára kapjuk:

$$x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \equiv x_5 \equiv 1, \quad A_1^* \equiv p_1, \quad A_4^* \equiv p_1 \vee p_2,$$

$$A_5^* \equiv p_1 \vee \bar{p}_2, \quad A_7^* \equiv \bar{p}_1 \vee \bar{p}_2, \quad A_2^* \equiv A_3^* \equiv A_6^* \equiv 1.$$

3. Algoritmusok logikai sémái átalakításainak teljes rendszere

Ebben a pontban axiómák (pontosabban, axiómák sémái) és következtetési szabályok olyan rendszerét vizsgáljuk, amely leírja algoritmusok logikai sémái ekvivalenciájának fogalmát adott változáseloszlásnál. A vizsgálandó kalkulus formulái

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$$

alakú sorozatok lesznek, ahol $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ kifejezések. Abban az esetben, amikor $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ alagoritmusok logikai sémái, az (1) alakú formulákban a $=$ jelet úgy interpretáljuk, mint ekvivalenciát adott változáseloszlásnál. Ha pedig $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ kifejezések, amelyek nem sémák, akkor az $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ alakú formulákat úgy lehet interpretálni, mint $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{B})$ alakú formulák egyszerűsített felírását, ahol $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ tetszőleges, az $\mathfrak{A}$ kifejezést tartalmazó séma, a $\mathfrak{L}(\mathfrak{B})$ olyan séma, amelyet $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$-ból $\mathfrak{A}$ kifejezésnek $\mathfrak{B}$ kifejezéssel való helyettesítésével nyerünk.[18] Az adott kalkulus axiómáit és követ-

[18] Az a tény, hogy $\mathfrak{L}(\mathfrak{B})$ szintén séma, azt jelenti, hogy a $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ sémában $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-vel való helyettesítésénél nem szükségszerű, hogy zárójelek vagy operátorok összeütközése történjék, azaz $\mathfrak{L}$-ben előforduljon két egynevű azonos indexű félzárójel vagy két azonos operátor.

keztetési szabályait úgy lehet tekinteni, mint sémák azonos átalakításainak szabályait, azaz, mint olyan szabályokat, amelyek a sémákat velük ekvivalensbe viszik át adott változáseloszlásnál. Például, ha $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ alakú következtetési formula adott, akkor minden $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ sémában $\mathfrak{A}$ kifejezést $\mathfrak{B}$ kifejezéssel pótólhatjuk (azon feltétel mellett, hogy nem történik összeütközés), amelytől a séma megengedett értékei nem változnak. Formálisan ezt a tényt a IX. szabály fejezi ki. A többi következtetési szabályt (VIII, X, XI) úgy fogalmaztuk meg, hogy közvetlenül sémák átalakítási szabályaiként foghatjuk fel őket.

Az alább ismertetendő axiómarendszerben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ betűk helyett állhatnak tetszőleges kifejezések azzal a feltétellel, hogy ilyen behelyettesítésnél az axiómák formulákba mennek át; az A betűvel tetszőleges operátort jelölünk; α, β a klasszikus ítételkalkulus tetszőleges formulái, 0 azonosan hamis formula, 1 azonosan igaz formula.

I. 1. $0 \lfloor_i A \rfloor_i = 0 \lfloor_i \rfloor_i .$

2. $1 \lfloor_i \mathfrak{A} \rfloor_i = \mathfrak{A}.$

3. $3 \rfloor_i \mathfrak{A} 1 \lfloor_i = \mathfrak{A}.$

II. 1. $\alpha\beta \lfloor_i \mathfrak{A} \rfloor_i = \alpha \lfloor_i \beta \lfloor_j \mathfrak{A} \rfloor_i \rfloor_j .$

2. $\rfloor_i \mathfrak{A}\alpha\beta \lfloor_i = \rfloor_i \rfloor_j \mathfrak{A}\alpha \lfloor_i \beta \lfloor_j .$

3. $\alpha \vee \beta \lfloor_i = \bar{\alpha} \lfloor_j \beta \lfloor_i \rfloor_j .$

III. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0 \lfloor_i \rfloor_j \mathfrak{B} 0 \lfloor_k \rfloor_i \mathfrak{A} 0 \lfloor_j \rfloor_k .$

IV. $\rfloor_i \rfloor_j = \rfloor_j \rfloor_i .$

V. $\alpha \lfloor_i \rfloor_i = \Lambda$, ahol Λ üres kifejezés.

VI. 1. $\alpha \lfloor_i \mathfrak{A} \rfloor_i \alpha \lfloor_j \mathfrak{B} \rfloor_j = \alpha \lfloor_i \mathfrak{A}\alpha \lfloor_j \mathfrak{B} \rfloor_j \rfloor_i .$

2. $\alpha \lfloor_i \mathfrak{A} \rfloor_j \mathfrak{B} \rfloor_i \alpha \lfloor_j = \alpha \lfloor_i \mathfrak{A} \rfloor_j \rfloor_i \mathfrak{B}\alpha \lfloor_j .$

3. $\rfloor_j \mathfrak{A}\alpha \lfloor_i \mathfrak{B} \rfloor_i \alpha \lfloor_j = \rfloor_j \rfloor_i \mathfrak{A}\alpha \lfloor_i \mathfrak{B}\alpha \lfloor_j .$

4. $\rfloor_i \alpha \lfloor_j \mathfrak{A}\alpha \lfloor_i \mathfrak{B} \rfloor_j = \alpha \lfloor_j \mathfrak{A}\alpha \lfloor_i \mathfrak{B} \rfloor_j \rfloor_i .$

5. $\rfloor_i \alpha \lfloor_j \mathfrak{A} \rfloor_j \mathfrak{B}\alpha \lfloor_i = \alpha \lfloor_j \mathfrak{A} \rfloor_j \rfloor_i \mathfrak{B}\alpha \lfloor_i .$

6. $\rfloor_j \mathfrak{A} \rfloor_i \alpha \lfloor_j \mathfrak{B}\alpha \lfloor_i = \rfloor_j \rfloor_i \mathfrak{A}\alpha \lfloor_j \mathfrak{B}\alpha \lfloor_i .$

VII. $\quad \lrcorner_i \alpha \llcorner_i \mathfrak{A} \lrcorner_j \alpha \llcorner_j = \alpha \llcorner_i \mathfrak{A} \lrcorner_i \lrcorner_j \alpha \llcorner_j .$

VIII. $\quad \dfrac{\vdash \alpha \equiv \beta}{\vdash \mathfrak{A}(\alpha) = \mathfrak{A}(\beta)}$ [19]

IX. $\quad \dfrac{\vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \vdash \mathfrak{L}(\mathfrak{A}) = \vartheta}{\vdash \mathfrak{L}(\mathfrak{B}) = \vartheta}$

X. Az egy kifejezésbe tartozó $\llcorner_i, \lrcorner_i$ félzárójel-pár tetszőleges $\llcorner_j, \lrcorner_j$ párra átjelölhető, de csak úgy, ha félzárójelek összeütközése nem lép fel.

XI. Ha $\alpha \llcorner_i$ logikai feltétel β-nak alá van rendelve (a változások adott eloszlásánál), akkor $\alpha \llcorner_i$ helyettesíthető $\alpha \cdot \beta \llcorner_i$-vel.

A VI. 1—6 formulák azt jelentik, hogy ha $\alpha \llcorner_i$ logikai feltétel $\lrcorner_i$ jobb félzárójele közvetlenül az $\alpha \llcorner_j$ logikai feltétel előtt áll, akkor $\lrcorner_i$ áthelyezhető $\lrcorner_j$-hez.

Az I—VII. formulák és a VIII—XI. szabályok helyessége a bennünket érdeklő értelmezésben nyilvánvaló. Világítsuk meg, például a XI. szabályt. Ha $\alpha \llcorner_i$ logikai feltétel alá van rendelve β-nak, azaz $(\alpha \llcorner_i)^* \to \beta$, akkor a 20. oldalon elmondottak szerint ez azt jelenti, hogy $\alpha \llcorner_i$ csak igaz β-nál kerül végrehajtásra, de igaz β-nál az $\alpha \cdot \beta$ formula ekvivalens α-val.

Mielőtt az I—XI rendszer teljességét bizonyítanánk, bevezetünk bizonyos formulákat és szabályokat.

1°. $\vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ a VIII. szabály alapján $\beta \equiv \alpha$ mellett.

2°. $\dfrac{\vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{B}}{\vdash \mathfrak{B} = \mathfrak{A}}$ a IX. szabály szerint $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}) \equiv \vartheta \equiv \mathfrak{A}$-nál.

3°. $\dfrac{\vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{L}}{\vdash \mathfrak{B} = \mathfrak{L}}$ a IX. értelmében $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A}$, $\vartheta \equiv \mathfrak{L}$ mellett.

4°. $\dfrac{\vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \vdash \mathfrak{B} = \mathfrak{L}}{\vdash \mathfrak{A} = \mathfrak{L}}$ a 2° és 3° miatt.

5°. Ha $\alpha \llcorner_i$ logikai feltétel a β-nak alá van rendelve, akkor $\alpha \llcorner_i$ pótolható $\alpha \vee \bar{\beta} \llcorner_i$-vel. — Valóban, $\mathfrak{A} \equiv \alpha \llcorner_i$-nél I. 2-ből és 2°-ból kapjuk, hogy $\vdash \alpha \llcorner_i = 1 \llcorner_j \alpha \llcorner_i \lrcorner_j$. IX értelmében a jobb oldalt az eredeti sémába beírva nyerjük, hogy $1 \llcorner_j$ logikai feltétel ugyanannak a logikai feltételnek van alárendelve, mint $\alpha \llcorner_i$, nevezetesen β-nak.

[19] A $\vdash$ jellel a következtetési formulákat jelöljük, miközben a VIII. szabály premisszájában, és mindenütt ahol logikai formulákról van szó, a következtethetőséget a klasszikus ítéletkalkulus értelmében tekintjük.

Akkor a XI. szabály alapján $1\llcorner_{j}$-t az $1\beta\llcorner_{j}$-vel pótoljuk, azaz a VIII. szabály miatt $\beta\llcorner_{j}$-vel; — II. 3. figyelembevételével kapjuk a kívánt szabályt.

6°. Ha egy logikai feltétel 0-nak van alárendelve, akkor az törölhető (jobb félzárójelével együtt). Ez a szabály 5°-ból és I. 2. és I. 3. axiómákból következik.

6^1. Ha egy operátor nullának van alárendelve, akkor törölhető. Valóban, a vizsgálandó A operátort az I. 2. axióma értelmében cseréljük fel az $1\llcorner_{i} A \lrcorner_{i}$ kifejezéssel. Az $1\llcorner_{i}$ logikai feltétel szintén alá van rendelve nullának, ezért a XI. szabály szerint pótolhatjuk $0\llcorner_{i}$-vel, azután az I. 1. és V. axióma alapján törölhetjük A-t és $0\llcorner_{i}\lrcorner_{i}$-t.

7°. $\vdash\alpha\llcorner_{1}=\alpha\llcorner_{j}0\llcorner_{i}\lrcorner_{j}$. Valóban, a VIII. szerint $\vdash\alpha\llcorner_{i}=\alpha\vee\alpha\llcorner_{i}$, azaz II. 3. értelmében $\vdash\alpha\llcorner_{1}=\bar{\alpha}\llcorner_{j}\alpha\llcorner_{i}\lrcorner_{j}$. Innen, mivel $\alpha\llcorner_{i}\prec\bar{\alpha}$, ezért XI. szabály alapján a 7° formulát kapjuk. Azokat a kifejezéseket, amelyekben minden jobb (illetve bal) félzárójelhez található ugyanolyan indexű, bal (jobb) félzárójel, *bal-* (illetve *jobb-*) kifejezéseknek nevezzük.

Legyen $\mathfrak{A}_l$ bal kifejezés, amely nem tartalmaz olyan operátorokat, amelyeknek az adott változáseloszlás a logikai változók nem üres halmazát felelteti meg. Akkor a következő formulákat kaphatjuk:

$$8^\circ.\quad \vdash\alpha\llcorner_{i}\mathfrak{A}_l\lrcorner_{i}\alpha\llcorner_{j}\mathfrak{B}\lrcorner_{j}=\alpha\llcorner_{i}\mathfrak{A}_l\mathfrak{B}\lrcorner_{i},$$

$$8^1.\quad \vdash\lrcorner_{j}\mathfrak{B}\alpha\llcorner_{i}\mathfrak{A}_l\lrcorner_{i}\alpha\llcorner_{j}=\lrcorner_{j}\mathfrak{B}\alpha\llcorner_{i}\mathfrak{A}_l.$$

Ha a jobb oldalakon az $\llcorner_{i},\lrcorner_{i}$ félzárójeleket átjelöljük $\llcorner_{j},\lrcorner_{j}$-re, akkor 8°-at és 8^1-et egy formula alakjában írhatjuk fel:

$$8.\quad \alpha\llcorner_{i}\mathfrak{A}_l\lrcorner_{i}\alpha\llcorner_{j}=\alpha\llcorner_{j}\mathfrak{A}_l.$$

Tekintsük például a 8°-at. A VI. 1-ből

$$\vdash\alpha\llcorner_{i}\mathfrak{A}_l\lrcorner_{i}\alpha\llcorner_{j}\mathfrak{B}\lrcorner_{j}=\alpha\llcorner_{i}\mathfrak{A}_l\alpha\llcorner_{j}\mathfrak{B}\lrcorner_{j}\lrcorner_{i}.$$

A jobb oldalon nyilvánvalóan $\alpha\llcorner_{j}\prec\alpha$. Akkor 5° és I. 2. alapján a 8° formulát kapjuk. A 8^1 formula analóg módon adódik.

$$9^\circ.\quad \frac{\vdash\bar{\alpha}\to\beta}{\vdash\alpha\llcorner_{i}\beta\llcorner_{j}=\beta\llcorner_{j}\alpha\llcorner_{i}}$$

Valóban, $\dfrac{\vdash\bar{\alpha}\to\beta}{\vdash\alpha\equiv\alpha\vee\beta}$. Akkor VIII értelmében

$$\frac{\vdash \bar{\alpha} \to \beta}{\alpha \llcorner_i \beta \llcorner_j = \bar{\beta} \vee \alpha \llcorner_i \beta \llcorner_j}, \quad \text{azaz} \quad \frac{\vdash \bar{\alpha} \to \beta}{\vdash \alpha \llcorner_i \beta \llcorner_j = \beta \llcorner_k \alpha \llcorner_i \lrcorner_k \beta \llcorner_j},$$

ahonnan 8-at figyelembe véve kapjuk 9°-at.

10°. $\vdash \alpha \llcorner_i \mathfrak{A}_l \alpha \llcorner_j = \alpha \llcorner_i \mathfrak{A}_l$, ahol $\mathfrak{A}_l$ olyan balkifejezés, amely kielégíti ugyanazokat a feltételeket, amelyek a 8°-ban is szerepelnek. Valóban, nyilvánvalóan $\alpha \llcorner_j \prec \alpha$, mivel $\mathfrak{A}_l$ nem tartalmaz olyan operátorokat, amelyek a logikai változók értékeit megváltoztathatnák. De akkor, 5°-t tekintve, $\vdash \alpha \llcorner_i \mathfrak{A}_l \alpha \llcorner_j = \alpha \llcorner_i \mathfrak{A}_l \alpha \vee \bar{\alpha} \llcorner_j$, ahonnan I. 1, 2. alapján kapjuk 10°-et.

Megjegyezzük, hogy az összes levezetett formulák és következtetési szabályok, amelyek sémák átalakításai szabályainak tekinthetők, megfordíthatók, azaz minden levezethető átalakításhoz a fordított átalakítás is levezethető. Formulákra a 2° alapján ez nyilvánvaló. A VIII., IX., X. szabályok megfordíthatósága szintén nyilvánvaló. Megmutatjuk, hogy a XI. szabály is megfordítható. Lényegében, ha az $\alpha \cdot \beta \llcorner_i$ logikai feltétel a β függvénynek alá van rendelve, akkor 5° miatt helyettesíthetjük azt $\alpha \cdot \beta \vee \bar{\beta} \llcorner_i$-vel, azaz $\alpha \vee \bar{\beta} \llcorner_i$-val. A legutolsó logikai feltételt II. 3. miatt $\beta \llcorner_j \alpha \llcorner_i \lrcorner_j$ alakban előállíthatjuk. Akkor a 5° szabály szerint $\beta \llcorner_j$-t pótolhatjuk $\beta \vee \bar{\beta} \llcorner_j$-vel, azaz $1 \llcorner_j$-vel, amelyet I. 2 miatt törölhetünk ($\lrcorner_j$-vel együtt).

IRODALOMJEGYZÉK

1] А. А. Марков, Теория алгорифмов, Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР XLII (1954).

[2] А. А. Ляпунов, О логических схемах программ, Проблемы кибернетики 1 (1958).

[3] С. С. Камынин, Э. З. Любимский, М. Р. Шура—Бура, Об автоматизации программирования, Проблемы кибернетики 1 (1958).

[4] Ю. И. Янов, О равносильности и преобразованиях схем программ, ДАН 113, № 1 (1957).

[5] Ю. И. Янов, О матричных схемах ДАН 113, № 2 (1957).

[6] Ю. И. Янов, О равносильности и преобразованиях схем программ. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук.

[7] Д. Гильберти В. Аккерман, Основы теоретической логики, ИЛ, Москва, 1947.

Fordította: Gyuris László aspiráns

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1968. I. 12. — Terjedelem: 9,4 (A/5) ív, 4 ábra

68-5829 — Szegedi Nyomda