PRÍMOSZTÓK SZÁMÁNAK BECSLÉSE DIOFANTIKUSAN SÍMA SOROZATOKON

Írta: KÁTAI IMRE

1. $U(n)$ jelentse n különböző prímosztóinak a számát. HARDY és RAMANUJAN tétele szerint [1] majdnem minden n-re $U(n) = (1+o(1)) \log\log n$. E tételre TURÁN PÁL igen egyszerű bizonyítást adott [2]. Nem sokkal később HARDY és RAMANUJAN tételét általánosítva kimutatta [3], hogy ha $f(x)$ irreducibilis, egész együtthatós polinom, akkor $U(f(n)) = (1+o(1)) \log\log n$ majdnem minden n-re. ERDŐS megmutatta [4], hogy majdnem minden p prímszámra $U(p-1) = (1+o(1)) \log\log p$. H. HALBERSTAM bebizonyította [5], hogy $U(f(p)) = (1+o(1)) \log\log p$ majdnem minden p-re.

Természetes kérdés, hogy mit lehet mondani azon n-ek sűrűségéről, amelyekre $U(n) = c(1+o(1)) \log\log n$, $c \neq 1$ esetén. Az $U(n)$-re vonatkozó centrális határeloszlástétel „nagy-eltéréses" alakjából (l. [6]) megadható az ezen relációt kielégítő n-ek száma aszimptotikusan $c \leqq c_0 (\leqq 2)$ esetén. A $c > 2$ esetben csak szerényebb eredmények vannak. E kérdések vizsgálata polinom helyettesítési értékeinek halmazán, vagy a prím plusz konstans típusú számok halmazán lényegesen nehezebb. Tekintsük például a $\{p+2\}$ halmazt. Míg az az állítás, hogy az $U(n) = 1$, $n \leqq x$ relációt kielégítő természetes számok száma aszimptotikusan $x/\log x$ a prímszámtétellel azonos, addig az az állítás, hogy az $U(p+2) = 1$ reláció végtelen sok p prímre fennáll, az ikerprím problémával. Ebben az irányban még az sem ismeretes, hogy $U(p+2)$ végtelen sok p-re páratlan.

Az $U(p+2) = c(1+o(1), \log\log p$ relációt kielégítő prímek sűrűségéről keveset tudunk, különösen, ha $c < 1$.

E dolgozatban a $c > 1$ esetet vizsgáljuk.

2. *Jelölések.* 2. 1. $c, c_1, c_2, \ldots$ alkalmas pozitív állandókat, $p, p_1, p_2, \ldots$ prímszámokat jelölnek. $p(\mu)$ jelentse μ legnagyobb prímosztóját.

2. 2. Legyen $g(n)$ egészegyütthatójú irreducibilis polinom, amely pozitív n-ekre pozitív értékű. Tegyük fel, hogy $g(x) \not\equiv cx$. Jelölje $\lambda(m)$ a $g(n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$ kongruencia m-hez relatív prím megoldásainak a számát.

2. 3. Legyen $x_1 = \log x$, $x_2 = \log x_1$, $x_3 = \log x_2$. A $\ll$ szimbólum jelentése ugyanaz, mint VINOGRADOVnál.

2. 4. Legyen a_n a természetes számok monoton növő sorozata,

$$A(x) = \sum_{a_n \leqq x} 1; \quad A(x, D, l) = \sum_{\substack{a_n \equiv l(D) \\ a_n \leqq x}} 1.$$

Az a_n sorozatot diofantikusan simának nevezzük, ha

$$A(x) \gg x \cdot x_1^{-c}, \tag{2.1}$$

és

$$\sum_{D \leqq x^{\alpha}} \max_{\substack{l(D) \\ (l,D)=1}} \left| A(x, D, l) - \frac{A(x)}{\varphi(D)} \right| \ll A(x) \cdot x_1^{-B} \qquad (x \to \infty) \tag{2.2}$$

alkalmas pozitív α-val és minden B állandóval.

2. 5. Legyen $h(x)$ tetszőleges monoton növekvő függvény, $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = \infty$. Legyen $z > 1$ állandó, $w = z - 1$.

Jelölje $N(x, z, h)$ azon $a_n (\leqq x)$-ek számát, amelyekre

$$|U(g(a_n)) - zx_2| \leqq h(x) \sqrt{x_2}.$$

Érvényes a következő

TÉTEL. *Ha a_n a 2. 4. alatt definiált sorozat, s $g(x)$ 2. 2. alatti polinom, akkor*

$$\left| \log \frac{N(x, z, h)}{A(x) \cdot x_1^{w - z \log z}} \right| \ll h(x) \sqrt{x_2}.$$

3. Tételünk *bizonyítása* A. I. VINOGRADOV és LINNIK [7], ERDŐS PÁL [8] és BARBAN [9] módszerének kombinálásával történik.

1. LEMMA [10]. *Ha $g(x)$ irreducibilis polinom és $\not\equiv cx$, akkor*

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\lambda(p)}{p} = x_2 + O(1). \tag{3.1}$$

2. LEMMA [11]. $u > 0$, $0 < \delta < 1$ *esetén*

$$e^{-u} \sum_{|m-u| > \delta u} \frac{u^m}{m!} = O(e^{-\gamma u}), \qquad \gamma = \frac{1}{3}\delta^2. \tag{3.2}$$

3. LEMMA. *Legyen $\eta(k)$ monoton növekvő függvény, $\lim\limits_{k \to \infty} \eta(k) = \infty$. Ekkor*

$$z^k = (1 + o(1)) \sum_{\left| r - \frac{w}{z} k \right| \leqq \eta(k) \sqrt{k}} w^r \binom{k}{r} \qquad (k \to \infty). \tag{3.3}$$

(3. 3) a valószínűségszámításban használatos *Csebisev*-egyenlőtlenségből azonnal következik.

A következő állítás M. BARBANtól származik [9].

4. LEMMA. *Legyen $t(n)$ multiplikatív függvény, amelyre*

$$t(p^k) \leqq c_2 k^{c_1}, \quad t(p^{k+1}) \geqq t(p^k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.4}$$

a_n *2. 4. alatt definiált diofantikusan sima sorozat,* $g(x)$ *2. 2. alatti polinom. Ekkor*

$$c_3 \leqq \sum_{a_n \leqq x} t(g(a_n))/A(x) \exp\left(\sum_{p \leqq x} \frac{\lambda(p)(t(p)-1)}{p}\right) \leqq c_4, \tag{3. 5}$$

ahol c_3 *és* c_4 *csupán az* a_n *sorozattól, a* $g(x)$ *polinomtól és a* c_1, c_2 *állandóktól függő pozitív állandók.*

Jelöljük B-vel azon a_n-ek halmazát, amelyre $g(a_n)$ nem tartalmaz az $(y, x^{\alpha/32})$ intervallumba eső prímosztót.

5. LEMMA. $y = x^{1/x_3}$ *választással*

$$\sum_{\substack{a_n \leqq x \\ a_n \in B}} z^{U(g(a_n))} = o(1)A(x)x_1^w. \tag{3. 6}$$

Bizonyítás. Definiáljuk a $t(n)$ multiplikatív függvényt a következő módon: $t(p^k) = z$, ha $p \notin (y, x^{\alpha/32})$ és $t(p^k) = 1$, ha $p \in (y, x^{\alpha/32})$. Világos, hogy (3. 6) bal oldala

$$\leqq \sum_{a_n \leqq x} t(g(a_n)).$$

Felhasználva a 4. lemmát (3. 4) bal oldala

$$\leqq A(x)x_1^w \exp\left(-w \sum_{y \leqq p \leqq x^{\alpha/32}} \frac{\lambda(p)}{p}\right) = o(1)A(x)x_1^w.$$

4. Jelölje A_- illetve A_+ azon a_n-ek halmazát, amelyekre $U(g(a_n)) < zx_2 - h(x)\sqrt{x_2}$, illetve $U(g(a_n)) > zx_2 + h(x)\sqrt{x_2}$. Legyen

$$R(x) = \sum_{a_n \leqq x} z^{U(g(a_n))} = R^-(x) + R_0(x) + R^+(x), \tag{4. 1}$$

ahol $R^-(x)$ az A_-, $R^+(x)$ az A_+ halmazon vett összeget jelenti.

Kimutatjuk, hogy

$$R^-(x) = o(1)A(x)x_1^w, \quad R^+(x) = o(1)A(x)x_1^w, \tag{4. 2)—(4. 3}$$

s innen tételünk állítása rögtön következni fog. A 4. lemmát $t(p^k) = z$ választással, továbbá az 1. lemmát alkalmazva

$$R(x) \asymp A(x)x_1^w.$$

A (4. 2)—(4. 3) egyenlőtlenségeket felhasználva

$$R_0(x) = \sum_{|U(g(a_n)) - zx_2| \leqq h(x)\sqrt{x_2}} z^{U[g(a_n)]} \asymp A(x) \cdot x_1^w,$$

s innen tételünk rögtön következik.

(4. 2) *bizonyítása.* A 3. lemmából következik, hogy

$$z^{U(g(a_n))} = (1 + o(1)) \sum_{\nu | g(a_n)}' w^{U(\nu)} + O(1),$$

ahol a jobb oldalon csak azokra a négyzetmentes ν osztókra összegezünk, amelyekre

$$\left| U(\nu)-\frac{w}{z}U(g(a_n))\right| < \eta(g(a_n))\sqrt{U(g(a_n))}.$$

Így $a_n \in A_-$ esetén

(4.4) $$z^{U(g(a_n))} \ll \sum_{\substack{\nu | g(a_n) \\ U(\nu)\leqq r_1}} w^{U(\nu)}; \quad r_1 = wx_2 - \frac{1}{2}h(x)\sqrt{x_2}.$$

A továbbiakban ν olyan számot jelöl, amelyre $U(\nu)\leqq r_1$.

Bontsuk a $g(a_n)$ számot két tényezőre:

$$g(a_n) = d_n b_n,$$

b_n a $g(a_n)$ összes $x^{\alpha/32}$-nél nagyobb prímosztóiból áll.

Minthogy $U(b_n) = O(1)$, így

$$R^-(x) \ll \sum_{a_n\in A_-} z^{U(d_n)}.$$

(4.4) miatt

(4.5) $$R^-(x) \ll \sum_{a_n\in A_-}\sum_{\nu/d_n} w^{U(\nu)} \ll \sum{}' + \sum{}'',$$

ahol $\sum'$-ben $\nu\leqq x^\alpha$, $\sum''$-ben $\nu > x^\alpha$. $\sum'$-ben az összegezés sorrendjét felcserélve

(4.6) $$\sum{}' \leqq \sum_{\nu\leqq x^\alpha} w^{U(\nu)} \sum_{\substack{g(a_n)\equiv O(\nu) \\ a_n\leqq x}} 1 = A(x)\sum{}_1 + O(S(x)),$$

$$\sum{}_1 = \sum_{\nu\leqq x^\alpha}\frac{\lambda(\nu)w^{U(\nu)}}{\varphi(\nu)}; \quad S(x) = \sum_{\nu\leqq x^\alpha} d^{U(\nu)}\lambda(\nu)\max_{l(\nu)}\left|A(x,\nu,l)-\frac{A(x)}{\varphi(\nu)}\right|.$$

A (2.2) relációból $S(x)\ll A(x)$ következik. Az 1. és a 2. lemma miatt

$$\sum{}_1 \leqq \sum_{r=0}^{r_1}\frac{w^r}{r!}\left\{\sum_{p\leqq x^\alpha}\frac{\lambda(p)}{p-1}\right\}^r \leqq \sum_{r\leqq r_1}\frac{(wx_2)^r}{r!} = o(x_1^w),$$

így

$$\sum{}' = o(1)A(x)x_1^w.$$

Vizsgáljuk $\sum''$-t. Legyen $\nu(>x^\alpha)$ prímtényezős alakja

$$\nu = p_1p_2\dots p_r \qquad (p_1<p_2<\dots<p_r).$$

A μ számot definiáljuk a következő módon:

$$\mu = p_1\dots p_k \leqq x^\alpha, \qquad \mu p_{k+1} > x^\alpha.$$

Ha $g(x)$ foka l, akkor $\nu \ll x^l$, s így egy μ legfeljebb $2^{\frac{lx_1}{\log p(\mu)}}$ számú különböző ν-höz tartozhat. Továbbá $U(\nu) \leqq c_5\frac{x_1}{\log p(\mu)} + U(\mu)$. Így

$$\sum{}'' \ll \sum_{x^{31/32\alpha}\leqq\mu\leqq x^\alpha} w^{U(\mu)} c_6^{\frac{x_1}{\log p(\mu)}} \sum_{\substack{g(a_n)\equiv 0(\mu) \\ a_n\leqq x}} 1, \quad U(\mu)\leqq r_1.$$

A (2. 2) egyenlőtlenséget felhasználva innen

$$\sum{}'' \ll A(x) \sum_{x^{31/32\alpha} \leqq \mu \leqq x^\alpha} \frac{\lambda(\mu) w^{U(\mu)}}{\varphi(\mu)} c_6^{\frac{x_1}{\log p(\mu)}} + O(A(x)) = A(x) \sum{}_2 + O(A(x)).$$

Kimutatjuk, hogy $\sum_2 = o(1) x_1^w$. Ismeretes (l. ERDŐS [8], 6. lemma), hogy elegendő csak azon a_n-ekre összegezni, amelyekre

$$\prod_{\substack{p \mid \mu \\ p \leqq X}} p < x^{\alpha/8}, \quad X = \exp\left(\frac{x_1}{x_2^2}\right). \tag{4. 7}$$

Legyen $x_1/\log p = r(=r(p))$. Ekkor

$$\sum{}_2 \ll \sum_{x^{31/32\alpha} \leqq \mu \leqq x^\alpha} \frac{w^{U(\mu)} \lambda(\mu)}{\varphi(\mu)} c_6^{\frac{x_1}{\log p(\mu)}} \ll \sum_{X < p \leqq x^{\alpha/32}} \frac{c_6^r}{p} \sum_{h \in B_r} \frac{w^{U(\mu)} \lambda(\mu)}{\varphi(\mu)},$$

ahol B_r-rel azon négyzetmentes h számok halmazát jelöltük, amelyekre (4. 7) μ helyett h-val fennáll, $x^{\frac{15}{16}\alpha} \leqq h \leqq x^\alpha$ és $U(h) \leqq r_1$ teljesül.

Könnyen látható, hogy h-nak legalább

$$N_t = \left[\frac{r(t+1)\alpha}{32}\right] + 1$$

számú prímosztója van az $I_t = \left(x^{\frac{1}{r \cdot 2^{t+1}}}, x^{\frac{1}{r \cdot 2^t}}\right)$, $t = 0, \ldots, t_0$ intervallumok valamelyikében. t_0 az a legnagyobb egész szám, amelyre $r \cdot 2^{t_0} \leqq x_2^2$. Jelölje $B_{r,\gamma}$ azon B_r-beli elemek halmazát, amelyeknek I_γ-ban legalább N_γ prímosztójuk van, s $t < \gamma$ esetén I_t-ben legfeljebb $N_t - 1$. Ekkor

$$\sum_{h \in B_r} \frac{w^{U(h)} \lambda(h)}{\varphi(h)} = \sum_\gamma \sum_{h \in B_{r,\gamma}} \frac{w^{U(h)} \lambda(h)}{\varphi(h)}.$$

$h \in B_{r,\gamma}$ esetén írjuk h-t $h = uv$ alakba, ahol u az I_γ intervallumba eső N_γ számú különböző prímszám szorzata. Így

$$\sum_{h \in B_{r,\gamma}} \frac{w^{U(h)} \lambda(h)}{\varphi(h)} \leqq \left(\sum_u \frac{w^{U(u)} \lambda(u)}{\varphi(u)}\right) \left(\sum_v \frac{w^{U(v)} \lambda(v)}{\varphi(v)}\right).$$

Továbbá

$$\sum \frac{w^{U(u)} \lambda(u)}{\varphi(u)} \leqq \frac{1}{N_\gamma!} \left(\sum_{p \in I_\gamma} \frac{w \lambda(p)}{p-1}\right)^{N_\gamma} \ll e^{-c_7 \gamma r \log r}$$

és

$$\sum_v \frac{w^{U(v)} \lambda(v)}{\varphi(v)} \leqq \sum_{\substack{m \leqq x^\alpha \\ U(m) \leqq r_1}} \frac{w^{U(m)} \lambda(m)}{\varphi(m)} = o(1) x_1^w.$$

γ-ra összegezve innen

$$\sum_{h \in B_r} \frac{w^{U(h)} \lambda(h)}{\varphi(h)} = o(1) e^{-c_8 r \log r} x_1^w,$$

majd az r-ekre összegezve könnyen látható, hogy $\sum_2 = o(x_1^w)$.

(4. 3) *bizonyítása* hasonló $R^{-}(x)$ becsléséhez, így csak vázoljuk. (4. 4) helyett a 3. lemmából most

$$z^{U(g(a_n))} \ll \sum_{\substack{v \mid g(a_n) \\ U(v) \geqq r_2}} w^{U(v)}; \quad r_2 = wx_2 + \frac{1}{2} h(x) \sqrt{x_2}.$$

A (4. 5) egyenlőtlenség megfelelője teljesül. Ebben most $U(v) \geqq r_2$-re kell összegezni. $\sum'$ becslése teljesen hasonló, így elhagyjuk. $\sum''$ becslésénél az 5. lemma miatt elég azokra a μ-kre összegezni, amelyekre $p(\mu) \geqq y$. Ilyen esetben $U\left(\frac{v}{\mu}\right) \ll \sqrt{x_2}$, s így

$$U(\mu) \geqq wx_2 + \frac{1}{3} h(x) \sqrt{x_2} \left(\overset{\text{def}}{=} r_3\right).$$

Legyen most $\mu = p(\mu)h$, $h \in B_{r,\gamma}$, $h = uv$. Mivel

$$U(u) = N_\gamma \ll r\gamma \ll rt_0 \ll rx_3/\log r_3 \ll x_3^{\frac{2}{3}},$$

így a v-re való összegezésben

$$U(v) \geqq wx_2 + \frac{1}{4} h(x) \sqrt{x_2} \left(\overset{\text{def}}{=} r_4\right)$$

feltehető.

A bizonyítás további része hasonló (4. 2) bizonyításához. $h \in B_{r,\gamma}$ esetén írjuk h-t $h = uv$ alakba, ahol u az I_γ intervallumba eső N_γ számú különböző prímszám szorzata. Így

$$\sum_{h \in B_{r,\gamma}} \frac{w^{U(h)} \lambda(h)}{\varphi(h)} \leqq \left(\sum_u \frac{w^{U(u)} \lambda(u)}{\varphi(u)}\right) \left(\sum_v \frac{w^{U(v)} \lambda(v)}{\varphi(v)}\right).$$

Továbbá

$$\sum \frac{w^{U(u)} \lambda(u)}{\varphi(u)} \leqq \frac{1}{N_\gamma!} \left(\sum_{p \in I_\gamma} \frac{w\lambda(p)}{p-1}\right)^{N_\gamma} \ll e^{-c\gamma r \log r}$$

és

$$\sum_v \frac{w^{U(v)} \lambda(v)}{\varphi(v)} \leqq \sum_{\substack{m \leqq x^\alpha \\ U(m) \leqq r_1}} \frac{w^{U(m)} \lambda(m)}{\varphi(m)} = o(1) x_1^w.$$

γ-ra összegezve, innen

$$\sum_{h \in B_r} \frac{w^{U(h)} \lambda(h)}{\varphi(h)} = o(1) e^{-c_8 r \log r} x_1^w,$$

majd az r-ekre összegezve könnyen látható, hogy $\sum_2 = o(x_1^w)$.

(4. 3) *bizonyítása* hasonló $R^{-}(x)$ becsléséhez, így csak vázoljuk. (4. 4) helyett a 3. lemmából most

$$z^{U(g(a_n))} \ll \sum_{\substack{v \mid g(a_n) \\ U(v) \geqq r_2}} w^{U(v)}, \quad r_2 = wx_2 + \frac{1}{2} h(x) \sqrt{x_2}\,.$$

A (4. 5) egyenlőtlenség teljesül. Ebben most $U(v) \geqq r_2$-re kell összegezni. $\sum'$ becslése teljesen hasonló, így elhagyjuk. $\sum''$ becslésénél a 4. lemma miatt elég azokra a μ-kre összegezni, amelyekre $p(\mu) \geqq y$. Ilyen esetben $U\left(\frac{v}{\mu}\right) \ll \sqrt{x_2}$, s így

$$U(u) \geqq wx_2 + \frac{1}{3} h(x)\sqrt{x_2} \left(\stackrel{\text{def}}{=} r_3\right).$$

Legyen most $\mu = p(\mu)h$, $h \in B_{r,\gamma}$, $h = uv$. Mivel

$$U(u) = N_\gamma \ll r\gamma \ll rt_0 \ll rx_3/\log r_3 \ll x_3^2,$$

így a v-re való összegezésben

$$U(v) \geqq wx_2 + \frac{1}{4} h(x)\sqrt{x_2} \left(\stackrel{\text{def}}{=} r_4\right)$$

feltehető.

A bizonyítás további része hasonló (4. 2) bizonyításához.

IRODALOM

[1] G. H. HARDY—S. RAMANUJAN: The normal number of prime factors of a number *n*, *Quart. J. Pure and Applied Math.* **48** (1917) 76—92.

[2] P. TURÁN: On a theorem of Hardy and Ramanujan, *J. London Math. Soc.* **9** (1934) 274—276.

[3] P. TURÁN: Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan, *J. London Math. Soc.* **11** (1936) 125—133.

[4] P. ERDŐS: On the number of prime factors of p−1 and some related problems concerning Euler's φ-function, *Quart. J. of Math.* (Oxford) **6** (1935) 205—213.

[5] H. HALBERSTAM: On the distribution of additive number-theoretic functions (III), *J. London Math. Soc.* **31** (1956) 14—27.

[6] И. П. Кубильюс: Вероятностные методы в теории чисел, ГТТИ 1962.

[7] А. И. Виноградов—Ю. В. Линник, Оценки суммы числа делителей в коротком отрезке арифметической прогрессии, УМН, **12** (1957), 277—280.

[8] P. ERDŐS: On the sum $\Sigma df(n)$, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952) 7—15.

[9] М. Б. Барбан, Мультипликативные функции от Σ_R — равнораспределенных последовательностей, ИАН УССР **6** (1964), 13—19.

[10] H. RADEMACHER: Beiträge zu Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie, *Abhandlungen Math. Seminar Hamburg Univ.* **3** (1924) 12—40.

[11] G. H. HARDY: *Divergent series*, Oxford. Univ. Press, 1949.

ESTIMATION OF THE NUMBER OF PRIME DIVISORS ON DIOPHANTINELY SMOOTH SEQUENCES OF INTEGERS

by I. KÁTAI

Summary

Let a_n denote a monotonically increasing sequence of integers,

$$A(x) = \sum_{a_n \leqq x} 1; \quad A(x, D, l) = \sum_{\substack{a_n \equiv l(D) \\ a_n \leqq x}} 1,$$

for which the inequalities

$$A(x) \gg \frac{x}{(\log x)^c}$$

and

$$\sum_{D \leq x^\alpha} \max_{\substack{l(D) \\ (lD)=1}} \left| A(x, D, l) - \frac{A(x)}{\varphi(D)} \right| \ll A(x)(\log x)^{-B}$$

hold with suitable constants $\alpha > 0$, $c > 0$ and with arbitrary constant B.

Let $g(x)$ be an irreducible polynomial with integer coefficients differing from cx.

Let $h(x)$ be an increasing function, $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$. $U(n)$ denote the number of different prime factors of n.

For a constant $Z > 1$ $(w = z - 1)$ let $N(x, z, h)$ denote the number of the a_n-s not exceeding x, for which

$$|U(g(a_n)) - z \log \log x| \leq h(x) \sqrt{\log \log x}.$$

Combining the method of A. I. VINOGRADOV and YU. V. LINNIK [7], P. ERDŐS [8] and M. BARBAN [9] we proved the following

THEOREM:

$$\left| \log \frac{N(x, z, h)}{A(x)(\log x)^{w - z \log z}} \right| \ll h(x)(\log \log x)^{1/2}.$$