A VÉGES-DIFFERENCIA MÓDSZER HIBÁJÁNAK BECSLÉSE ELLIPTIKUS PEREM- ÉS SAJÁTÉRTÉK FELADATOKNÁL

Írta: VEIDINGER LÁSZLÓ

A jelen dolgozatban rövid áttekintést adunk a másodrendű önadjungált elliptikus egyenletekre vonatkozó perem- és sajátérték-feladatok véges-differencia közelítéseinek hibabecslésével kapcsolatos kutatások legújabb eredményeiről. A teljességre nem törekedve, kizárólag kétdimenziós feladatokkal és a legegyszerűbb, régóta ismert véges-differencia közelítésekkel foglalkozunk. A jobb áttekinthetőség céljából külön fejezetben tárgyaljuk a *Laplace*-operátorra vonatkozó feladatokkal kapcsolatos eredményeket.

I. A véges-differencia módszer hibájának becslése a Laplace-operátorra vonatkozó feladatoknál

1. Tekintsük a következő két feladatot:

$$\text{(1)}\qquad 1.\quad \Delta u(x,y)=f(x,y),\qquad (x,y)\in R,$$
$$u(x,y)=\varphi(x,y),\qquad (x,y)\in C,$$

$$\text{(2)}\qquad 2.\quad \Delta u(x,y)+\lambda u(x,y)=0,\qquad (x,y)\in R,$$
$$u(x,y)=0,\qquad (x,y)\in C,$$

ahol R korlátos, nyílt síkbeli tartomány, amelynek C határa véges sok szakaszonként analitikus egyszerű zárt görbéből áll. Feltesszük, hogy $f(x,y)$ analitikus egy olyan G tartományban, amely az R-et határával együtt tartalmazza.[1] A $\varphi(x,y)$ függvényről feltesszük, hogy C-n folytonos és C minden analitikus görbeszakaszán analitikus.

Az (1) feladat a *Poisson*-egyenletre vonatkozó *Dirichlet*-feladat, a (2) feladat a *Laplace*-operátorra vonatkozó sajátérték-feladat (másnéven membrán sajátérték-feladat). Az elliptikus egyenletek elméletéből ismeretes, hogy a tett feltevések mellett az (1) feladat $u(x,y)$ megoldása létezik, egyértelmű és R-ben, valamint a C analitikus görbeszakaszain analitikus (lásd például [17]). A (2) feladat $\lambda^1\leqq\lambda^2\leqq\ldots$ sajátértékei pozitívok és minden egyes sajátérték véges multiplicitású. A $\lambda^1,\lambda^2,\ldots$

[1] Ez a feltétel az alkalmazásokban előforduló feladatok jelentős részénél nem teljesül. Legújabban BRAMBLE, HUBBARD és ZLÁMAL az $f(x,y)$ függvényre vonatkozó igen általános feltevések mellett becsülték meg a véges-differencia módszer hibáját (lásd [10]), eredményeik azonban a jelen dolgozat megírásakor még nem voltak végleges formában publikálva.

sajátértékeknek megfelelő $u^1, u^2, \ldots$ sajátfüggvények megválaszthatók úgy, hogy ortonormált rendszert alkossanak abban az értelemben, hogy

$$\iint_R u^k u^l \, dx\, dy = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k=l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Az $u^k(x, y)$ sajátfüggvény R-ben, valamint a C analitikus görbeszakaszain analitikus.

Az R tartomány síkját egy h sortávolságú négyzetes ráccsal fedjük le. Az $x=mh$, $y=nh$ egyeneseket $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ rácsegyeneseknek, a négy rácsegyenessel határolt legkisebb négyzeteket rácsnégyzeteknek nevezzük. Legyen R^* az R-ben elhelyezkedő összes rácsnégyzet egyesítése és C^* az R^* határa. Jelöljük R_h^*-val, illetve C_h^*-val az R^* belsejében, illetve határán elhelyezkedő rácspontok halmazát. Végül jelöljük R_h-val az R-ben elhelyezkedő rácspontok halmazát és C_h-val a rácsegyenesek C-vel való metszéspontjainak halmazát.

2. Tekintsük először azt az esetet, amikor az R tartomány olyan h_0 oldalú egybevágó négyzetek egyesítéseként állítható elő, amelyeket rácsegyenesek határolnak. Ha $h=\frac{h_0}{p}$, ahol p pozitív egész szám, akkor nyilvánvalóan $R=R^*$, $C=C^*$, $R_h=R_h^*$, $C_h=C_h^*$. Az (1) és (2) feladatot rendre a

$$\begin{aligned} &\Delta_h U(P)=f(P), && P\in R_h, \\ &U(P)=\varphi(P), && P\in C_h \end{aligned} \tag{3}$$

és a

$$\begin{aligned} &\Delta_h U(P)+\lambda_h U(P) = 0, && P\in R_h, \\ &U(P)=0, && P\in C_h \end{aligned} \tag{4}$$

feladattal közelítjük, ahol

$$\Delta_h U(P) = h^{-2}[U(E)+U(N)+U(W)+U(S)-4U(P)]$$

a Laplace-operátor „ötpontos" véges-differencia analogonja, $E = (x_P+h, y_P)$ $N = (x_P, y_P+h)$, $W = (x_P-h, y_P)$, $S = (x_P, y_P-h)$ a $P=(x_P, y_P)$ rácspont négy szomszédja.

Legyen U a (3) feladat megoldása, $\lambda_h^1 \leqq \lambda_h^2 \leqq \ldots$ a (4) feladat sajátértékei, U^1, $U^2, \ldots$ a megfelelő sajátfüggvények. Az $U^1, U^2, \ldots$ sajátfüggvények megválaszthatók úgy, hogy ortonormált rendszert alkossanak, abban az értelemben, hogy

$$h^2 \sum_{P\in R_h} U^k(P)U^l(P)=\delta_{kl}.$$

A továbbiakban az $u-U$, $\lambda^k-\lambda_h^k$, u^k-U^k különbségek becslésével foglalkozunk.

Az $u-U$ különbségre a legrégibb egzakt becslés GERSGORINtól származik. GERSGORIN becslése a jelen pontban vizsgált speciális alakú R tartományok esetében a következő (lásd [1] és [14])

$$\max_{P\in R_h} |u(P)-U(P)| \leqq \frac{M_4 d^2}{96} h^2, \tag{5}$$

ahol d az R-et tartalmazó legkisebb kör átmérője, M_i az $u(x, y)$ megoldás i-edrendű parciális deriváltjai abszolút értékének maximuma $\bar{R}$-ban. Azonban általában $M_4=\infty$, még akkor is, ha R téglalap, így például a

$$\Delta u = -2 \quad R\text{-ben},$$

$$u=0 \quad C-\text{n}$$

„torzió-feladatnál", ugyanis a szögpontok környezeteiben az $u(x, y)$ megoldás negyedrendű parciális deriváltjai általában nem korlátosak. A *Gersgorin*-becslés ilyenkor nem mond semmit.

VOLKOVnak sikerült meghatározni azokat a szükséges és elégséges feltételeket, amelyeket abban az esetben, ha az R tartomány egy sokszög belseje, az f és φ függvényeknek ki kell elégíteniök ahhoz, hogy M_4 véges legyen (lásd [2], [3]). Ezek a feltételek az alkalmazásokban előforduló feladatoknál általában nem teljesülnek. Azokban a speciális esetekben, amikor M_4 véges, az (5) becslés átalakítható kizárólag az ismert adatokat tartalmazó ún. a priori hibabecsléssé (lásd [2], [3]).

Kérdés, hogy a jelen pontban vizsgált speciális alakú R tartományok esetén általában mekkora az $u-U$ különbség nagyságrendje. LAASONENtől származik az az empirikus úton alátámasztott sejtés, hogy (lásd [4])

$$\max_{P\in R_h} |u(P)-U(P)| = 0\left(h^{\frac{4}{3}}\right)$$

és ez a becslés tovább nem javítható. Legújabban LAASONENnek sikerült bebizonyítania, hogy (lásd [5])

$$\max_{P\in T_h} |u(P)-U(P)| = 0\left(h^{\frac{4}{3}-\varepsilon}\right), \tag{6}$$

ahol $T_h = R_h - S_h$, S_h a szögpontok r_1 sugarú környezeteiben elhelyezkedő rácspontok halmaza, r_1 és ε tetszőleges pozitív számok. Sajnos, LAASONEN becslési módszere csak a hiba nagyságrendjét adja meg, konkrét hibakorlát kiszámítására nem alkalmas.

A priori (csak az adatokat tartalmazó) hibabecslések kizárólag abban az esetben ismeretesek, ha M_4 véges vagy ha R téglalap. Ha R téglalap és $\varphi=0$, akkor fennáll a következő a priori hibabecslés (lásd [6])

$$\max_{P\in R_h} |u(P)-U(P)| \leqq \left[\left(21{,}4+18{,}8\log\frac{a}{h}\right)F+8{,}1aF_1+2{,}7a^2F_2\right]h^2,$$

ahol F az $f(x, y)$ függvény abszolút értékének, F_1 és F_2 az $f(x, y)$ első- illetve másodrendű parciális deriváltjai abszolút értékének maximuma $\bar{R}$-ban, a a téglalap hosszabbik oldala. Az $f(x, y)$ függvényről ebben az esetben csak azt kell feltenni, hogy első- és másodrendű parciális deriváltjaival együtt folytonos $\bar{R}$-ban. FREY és RÓZSA hasonló jellegű a priori hibabecsléseket kaptak az $f(x, y)$ függvényre vonatkozó még gyengébb feltevések mellett (lásd [16]).

A $\lambda^k - \lambda_h^k$ különbségre a jelen pontban vizsgált speciális alakú R tartományok esetén fennáll a következő kétoldalú becslés (lásd [7])

$$-c_1 h^{\frac{4}{3}} < \lambda^k - \lambda_h^k < c_2 h^2, \tag{7}$$

ahol c_1 és c_2 pozitív állandók, amelyeknek számértéke csak k-tól és az R tartománytól függ.

Empirikus adatok azt mutatják, hogy a (7) becslés tovább nem javítható. Nevezetesen, az L-alakú membrán esetében λ_h^1 felülről közelít λ^1-hez és a hiba $O(h^{4/3})$ nagyságrendű, λ_h^2 pedig alulról közelít λ^2-höz és a hiba $O(h^2)$ nagyságrendű (lásd [8], 351—353. old.).

Az $u^k - U^k$ különbségre SZAULJEV az (5)-höz hasonló *Gersgorin*-típusú becsléseket kapott (lásd [18]). Ezek a becslések azonban teljesen irreálisak, mert ha R nem téglalap, akkor $u^k(x, y)$-nak már az elsőrendű parciális deriváltjai sem korlátosak $\bar{R}$-ban (lásd [19]). A *Dirichlet*-feladathoz hasonlóan ebben az esetben is az várható, hogy

$$\max_{P \in R_h} |u^k(P) - U^k(P)| = O\left(h^{\frac{4}{3}}\right),$$

ha λ^k egyszeres sajátérték és

$$\max_{P \in R_h} \left| u^k(P) - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_h^{k+i} U^{k+i}(P) \right| = O\left(h^{\frac{4}{3}}\right),$$

ha $\lambda^k = \lambda^{k+1} = \ldots = \lambda^{k+n-1}$ n-szeres sajátérték (β_h^k; $\beta_h^{k+1}, \ldots, \beta_h^{k+n-1}$ valós együtthatók); ez a sejtés azonban még nincs bizonyítva.

3. Tekintsük most az általános esetet, amikor az R tartomány C határa véges sok szakaszonként analitikus egyszerű zárt görbéből áll. Az (1) és (2) feladat egyik legegyszerűbb véges-differencia közelítése

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} &\Delta_h U(P) = f(P), \quad P \in R_h^*, \\ &U(P) = \varphi(P'), \quad P \in C_h^*, \end{aligned}$$

illetve a

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} &\Delta_h U(P) + \lambda_h U(P) = 0, \quad P \in R_h^*, \\ &U(P) = 0, \quad P \in C_h^* \end{aligned}$$

feladat, ahol P' a C_h-nak P-hez legközelebb eső pontja.

Legyen U a (8) feladat megoldása, $\lambda_h^1 \leqq \lambda_h^2 \leqq \ldots$ a (9) feladat sajátértékei, U^1, $U^2, \ldots$ a megfelelő sajátfüggvények. Az $U^1, U^2, \ldots$ sajátfüggvények megválaszthatók úgy, hogy ortonormált rendszert alkossanak, abban az értelemben, hogy

$$h^2 \sum_{P \in R_h^*} U^k(P) U^l(P) = \delta_{kl}.$$

Az $u - U$ különbségre fennáll a következő *Gersgorin*-típusú becslés (lásd [14])

$$\text{(10)} \qquad \max_{P \in R_h^*} |u(P) - U(P)| \leqq \sqrt{2} h M_1 + \frac{M_4 d^2}{96} h^2.$$

Az elliptikus egyenletek elméletéből ismeretes (lásd [17]), hogy ha C és φ elég sima, nevezetesen, ha a C egyenletét paraméteres alakban megadó $x(s), y(s)$ függvények és a $\varphi(s)=\varphi(x(s), y(s))$ függvény a C minden egyes pontjában ötször folytonosan differenciálható, akkor M_4 véges. (Az $f(x, y)$ függvényről eleve feltettük, hogy analitikus.) Ennek ellenére, a (10) becslésnek gyakorlatilag használható a priori hiba becsléssé való átalakítása még tetszőlegesen sima C és φ esetén is igen nehéz probléma. Az (1) feladatnak egy, a továbbiakban ismertetendő, (8)-nál pontosabb véges-differencia közelítésénél BRAMBLE és HUBBARD a priori hibabecslést adtak meg (lásd [9]). Valószínűnek látszik, hogy hasonló a priori hibabecslést lehet kapni a jelen esetben is.

Régebbi tankönyvekben gyakran szerepel az a megjegyzés, hogy a (10)-hez hasonló *Gersgorin*-típusú becslésekből nem egzakt, de a gyakorlatban használható becsléseket lehet kapni oly módon, hogy M_1-et illetve M_4-et az U rácsfüggvény első-, illetve negyedrendű differenciahányadosai abszolút értékének maximumával közelítjük. Sajnos, ez a megjegyzés sem elméleti, sem empirikus úton nem támasztható alá.

Az általános esetben legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a C szögpontjai és $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \ldots, \pi\alpha_m$ $(0<\alpha_i<2)$ a hozzájuk tartozó belső szögek. (Szögpontoknak nevezzük a C-nek azokat a pontjait, ahol két különböző analitikus görbeív találkozik.) Az $u-U$ különbségre fennáll a következő nagyságrendi becslés (lásd [10] és [11])

$$\max_{P\in R_h^*}|u(P)-U(P)| = O(h^\beta),$$

ahol

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{ha} \max\limits_{i=1,\ldots,m} \alpha_i < 1, \text{ vagy ha nincsenek szögpontok,} \\ \dfrac{1}{\max\limits_{i=1,\ldots,m} \alpha_i} - \varepsilon, & \text{ha} \max\limits_{i=1,\ldots,m} \alpha_i \geqq 1, \end{cases}$$

ε tetszőleges pozitív valós szám. A π-nél nagyobb belső szögek tehát a hiba nagyságrendjét $O(h^{1/2})$-ig növelhetik.

A $\lambda^k-\lambda_h^k$ különbségre fennáll a következő kétoldalú becslés (lásd [7])

$$-c_3 h < \lambda^k-\lambda_h^k < c_4 h^2,$$

ahol c_3 és c_4 pozitív konstansok, amelyeknek a számértéke csak k-tól és az R tartománytól függ. Ebben az esetben a hiba nagyságrendjét a π-nél nagyobb belső szögek sem befolyásolják. Ha R egyszeresen összefüggő és a C-nél levő belső szögek π-nél kisebbek, akkor a $\lambda^k-\lambda_h^k$ különbségre a priori alsó becslés adható (lásd [12]).

Az u^k-U^k különbségre ugyanolyan becsléseket lehet megadni, mint az $u-U$ különbségre. Nevezetesen, ha λ^k egyszeres sajátérték, akkor

$$\max_{P\in R_h^*}|u^k(P)-U^k(P)| = O(h^\beta),$$

ha $\lambda^k = \lambda^{k+1} = \ldots = \lambda^{k+n-1}$ n-szeres sajátérték, akkor

$$\max_{P\in R_h^*}\left| u^k(P)-\sum_{i=0}^{n-1}\beta_h^{k+i}U^{k+i}(P)\right| = O(h^\beta),$$

ahol $\beta_h^k, \beta_h^{k+1}, \ldots, \beta_h^{k+n-1}$ valós együtthatók (lásd [13]).

4. Az (1) és (2) feladatnak (8)-nál és (9)-nél pontosabb véges-differencia közelítése a

(11)
$$\Delta^{(h)} V(P) = f(P), \qquad P \in R_h,$$
$$V(P) = \varphi(P), \qquad P \in C_h$$

és a

(12)
$$\Delta^{(h)} V(P) + \mu_h V(P) = 0, \qquad P \in R_h$$
$$V(P) = 0, \qquad P \in C_h$$

feladat (lásd például [8], 200. old.), ahol

$$\Delta^{(h)} V(P) = \frac{2V(E)}{h_E(h_E+h_W)} + \frac{2V(N)}{h_N(h_N+h_S)} + \frac{2V(W)}{h_W(h_E+h_W)} + \frac{2V(S)}{h_S(h_N+h_S)} - \left(\frac{2}{h_N h_S} + \frac{2}{h_E h_W}\right) V(P),$$

$E = (x_P + h_E, y_P)$, $N = (x_P, y_P + h_N)$, $W = (x_P - h_W, y_P)$, $S = (x_P, y_P - h_S)$ a $P = (x_P, y_P)$ rácspont négy szomszédja. (A $P \in R_h$ rácspont szomszédjainak nevezzük az $R_h \cup C_h$ halmaznak azt a négy pontját, amely a P-n áthaladó rácsegyeneseken P-hez legközelebb helyezkedik el.)

Legyen V a (11) feladat megoldása, $\mu_h^1 \leqq \mu_h^2 \leqq \ldots$ a (12) feladat sajátértékei, $V^1, V^2, \ldots$ a megfelelő sajátfüggvények. A $V^1, V^2, \ldots$ sajátfüggvények megválaszthatók úgy, hogy ortonormált rendszert alkossanak abban az értelemben, hogy

$$\sum_{P \in R_h} V^k(P) V^l(P) H_P = \delta_{kl},$$

ahol $H_P = \dfrac{(h_E + h_W)(h_N + h_S)}{4}$.

Az $u - V$ különbségre fennáll a következő *Gersgorin*-típusú becslés (lásd [14])

$$\max_{P \in R_h} |u(P) - V(P)| \leqq \frac{M_4 d^2}{96} h^2 + \frac{2M_3}{3} h^3.$$

Mint az előző pontban már említettük, BRAMBLE és HUBBARD a priori becslést kaptak az $u - V$ különbségre (lásd [9]). A becslés levezetésénél feltették, hogy R egyszeresen összefüggő, C és φ elég sima. BRAMBLE és HUBBARD becslése eredeti formájában numerikus hibakorlátok kiszámítására nem alkalmas, azonban egyes speciális esetekben, így például konvex R tartomány esetén a

$$\Delta u = -2 \qquad R\text{-ben},$$
$$u = 0 \qquad C\text{-n}$$

„torzió-feladatnál", numerikus hibabecslésre alkalmas egyszerű alakra hozható.

Az $u - V$ különbségre nem egzakt, de a gyakorlatban sokszor jól használható becslést lehet kapni az úgynevezett *Runge*-elv alkalmazásával (lásd például [20]). Tekintsük azt a $2h$ sortávolságú négyzetes rácsot, amelyet a h sortávolságú rácsból minden második rácsegyenes elhagyásával nyerünk és legyen V_{2h} a (11) feladat megoldása ezen a rácson. A *Runge*-elv szerint

$$u(P)-V(P) \approx \frac{V(P)-V_{2h}(P)}{3}.$$

A *Runge*-elv az $u-V$ különbség aszimptotikus előállításán alapul, az ezzel kapcsolatos problémákra itt most nem térünk ki (lásd [8], 307. old.).

Az általános esetben fennáll a következő, LAASONENtől származó becslés (lásd [5])

$$\max_{P\in T_h} |u(P)-V(P)| = O(h^{\gamma}), \tag{13}$$

ahol $T_h = R_h - S_h$, S_h a szögpontok r_1 sugarú környezeteiben elhelyezkedő rácspontok halmaza,

$$\gamma = \begin{cases} 2, & \text{ha} \max\limits_{i=1,\dots,m} \alpha_i < 1, \text{ vagy ha nincsenek szögpontok} \\ \dfrac{2}{\max\limits_{i=1,\dots,m} \alpha_i} - \varepsilon, & \text{ha} \max\limits_{i=1,\dots,m} \alpha_i \geqq 1, \end{cases}$$

r_1 és ε tetszőleges pozitív számok. A (6) becslés a (13) becslés speciális esete.

Ha a C-nél levő belső szögek π-nél nem nagyobbak, akkor fennáll a

$$\lambda^k - \mu_h^k = O(h^2)$$

becslés (lásd [15]). Ha a C-nél levő belső szögek $\frac{\pi}{2}$-nél nem nagyobbak, akkor attól függően, hogy λ^k egyszeres illetve n-szeres sajátérték, fennáll a

$$\max_{P\in R_h} |u^k(P)-V^k(P)| = O(h^2 |\log h|),$$

illetve a

$$\max_{P\in R_h} \left| u^k(P) - \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_h^{k+i} V^{k+i}(P) \right| = O(h^2 |\log h|)$$

becslés (lásd [15]). Az általános esetben a *Dirichlet*-feladathoz hasonlóan az várható, hogy

$$\lambda^k - \mu_h^k = O(h^{\gamma})$$

és

$$\max_{P\in R_h} |u^k(P)-V^k(P)| = O(h^{\gamma}),$$

illetve

$$\max_{P\in R_h} \left| u^k(P) - \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_h^{k+i} V^{k+i}(P) \right| = O(h^{\gamma}),$$

ezeket a sejtéseket azonban eddig még nem sikerült bizonyítani.

II. A véges-differencia módszer hibájának becslése a másodrendű önadjungált elliptikus operátorra vonatkozó feladatoknál

1. Ugyanúgy, mint az első fejezetben, legyen R korlátos, nyílt síkbeli tartomány, amelynek C határa véges sok, szakaszonként analitikus egyszerű zárt görbéből áll. Tekintsük a következő két feladatot

$$(14)\qquad 1.\quad Lu(x,y)=f(x,y),\qquad (x,y)\in R,$$
$$u(x,y)=\varphi(x,y),\qquad (x,y)\in C,$$

$$(15)\qquad 2.\quad Lu(x,y)+\lambda u(x,y)=0,\qquad (x,y)\in R,$$
$$u(x,y)=0,\qquad (x,y)\in C,$$

ahol

$$Lu=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[b(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[c(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]-d(x,y)u.$$

Feltesszük, hogy az $a(x,y)$, $b(x,y)$ $c(x,y)$ $d(x,y)$ együtthatók és $f(x,y)$ analitikus egy olyan tartományban, amely R-et határával együtt tartalmazza. A $\varphi(x,y)$ függvényről feltesszük, hogy C-n folytonos és C minden analitikus görbeszakaszán analitikus. Feltesszük, hogy az L operátor elliptikus típusú, vagyis hogy az R minden pontjában

$$a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2\geqq\alpha(\xi^2+\eta^2)\qquad(\alpha=\text{const.}>0)$$

minden valós ξ,η-ra. Végül feltesszük, hogy $d(x,y)\geqq 0$.

Az elliptikus egyenletek elméletéből ismeretes, hogy a tett feltevések mellett a (14) feladat megoldása létezik, egyértelmű és R-ben, valamint a C analitikus görbeszakaszain analitikus (lásd [17]). A (15) feladat $\lambda^1\leqq\lambda^2\leqq\ldots$ sajátértékei pozitívok és minden egyes sajátérték véges multiplicitású. A $\lambda^1,\lambda^2,\ldots$ sajátértékeknek megfelelő $u^1,u^2,\ldots$ sajátfüggvények megválaszthatók úgy, hogy ortonormáltak legyenek, abban az értelemben, hogy

$$\iint_R u^k u^l\,dx\,dy=\delta_{kl}.$$

Az $u^k(x,y)$ sajátfüggvény R-ben, valamint a C analitikus görbeszakaszain analitikus.

Az R tartomány síkját ugyanúgy, mint az első fejezetben, egy h sortávolságú négyzetes ráccsal fedjük le. Az R_h^*, C_h^*, R_h és C_h rácsponthalmazok definíciója ugyanaz, mint az első fejezetben.

Ha a $P\in R_h$ rácspont egyik szomszédja sem tartozik C_h-hoz, akkor legyen

$$Z_x(P)=\frac{Z(E)-Z(P)}{h},\quad Z_{\bar{x}}(P)=\frac{Z(P)-Z(W)}{h},$$

$$Z_y(P)=\frac{Z(N)-Z(P)}{h},\quad Z_{\bar{y}}(P)=\frac{Z(P)-Z(S)}{h},$$

ahol $Z=Z(P)$ a rácspontokon értelmezett tetszőleges függvény. Ha a $P\in R_h$ rácspont valamelyik szomszédja C_h-hoz tartozik, akkor legyen

$$Z_{\bar{x}}(P)=\frac{Z(P)-Z(W)}{h_W},\quad Z_{\hat{x}}(P)=\frac{Z(E)-Z(P)}{0{,}5(h_E+h_W)},$$

$$Z_{\bar{y}}(P)=\frac{Z(P)-Z(S)}{h_S},\quad Z_{\hat{y}}(P)=\frac{Z(N)-Z(P)}{0{,}5(h_N+h_S)}.$$

2. A (8) és (9) feladat természetes általánosítása az

$$L_hU(P)=f(P),\qquad P\in R_h^*,$$

(16)
$$U(P)=\varphi(P'),\qquad P\in C_h^*,$$

és a

$$L_hU(P)+\lambda_hU(P)=0,\qquad P\in R_h^*,$$

(17)
$$U(P)=0,\qquad P\in C_h^*$$

feladat (lásd [26] és [11]), ahol

$$L_h U=0{,}5\,[(aU_x)_{\bar{x}}+(aU_{\bar{x}})_x+(bU_y)_{\bar{x}}+(bU_{\bar{y}})_x+(bU_x)_{\bar{y}}+(bU_{\bar{x}})_y+(cU_y)_{\bar{y}}+(cU_{\bar{y}})_y]-dU$$

és P' a C_h-nak P-hez legközelebb eső pontja.

Legyen U a (16) feladat megoldása, $\lambda_h^1\leqq\lambda_h^2\leqq\ldots$ a (17) feladat sajátértékei, $U^1, U^2,\ldots$ a megfelelő sajátfüggvények. Az $U^1, U^2,\ldots$ sajátfüggvények megválaszthatók úgy, hogy ortonormált rendszert alkossanak, abban az értelemben, hogy

$$h^2\sum_{P\in C_h^*}U^k(P)U^l(P)=\delta_{kl}.$$

Az $u-U$ különbségre az általános esetben fennáll a

(18)
$$\max_{P\in R_h^*}|u(P)-U(P)|=0\left(h^{\frac{1}{2}}\,|\log h|^{\frac{1}{2}}\right)$$

becslés (lásd [11]).

Legyen A_i a C i-edik szögpontja, amelyhez $\pi\alpha_i(0<\alpha_i<2)$ belső szög tartozik. Legyen

(19)
$$x^*=k_{A_i}x+l_{A_i}y,\quad y^*=m_{A_i}x+n_{A_i}y$$

egy olyan lineáris transzformáció, amely az L operátort az A_i pontban kanonikus alakra hozza. A (19) transzformáció az A_i szögponthoz tartozó $\pi\alpha_i$ belső szöget egy $\pi\alpha_i^*(0<\alpha_i^*<2)$ szögbe viszi át. Nyilvánvalóan $\alpha_i^*<1$ akkor és csak akkor, ha $\alpha_i<1$.

Ha $b(x,y)\equiv 0$, vagyis ha az L operátor nem tartalmaz vegyes parciális deriváltakat, akkor (18)-nál lényegesen jobb becslés adható meg, nevezetesen (lásd [11])

(20)
$$\max_{P\in R_h^*}|u(P)-U(P)|=0(h^{\beta^*}),$$

ahol

$$\beta^* = \begin{cases} 1, & \text{ha } \max\limits_{i=1,\dots,m} \alpha_i^* < 1 \text{ vagy ha nincsenek szögpontok,} \\ \dfrac{1}{\max\limits_{i=1,\dots,m} \alpha_i^*} - \varepsilon, & \text{ha } \max\limits_{i=1,\dots,m} \alpha_i^* \geqq 1, \end{cases}$$

ε tetszőleges pozitív szám.

Valószínűnek látszik, hogy a (20) becslés akkor is fennáll, ha $b(x, y) \not\equiv 0$, ezt azonban eddig még nem sikerült bizonyítani. Egy másik nyitott probléma a (20) becslés élesítése abban a speciális esetben, amikor az R tartomány rácsnégyzetek egyesítéseként állítható elő.

A $\lambda^k - \lambda_h^k$ különbségre az általános esetben fennáll a

$$\lambda^k - \lambda_h^k = O(h)$$

becslés (lásd [21]). Ha az L operátor együtthatói állandók, akkor

$$-c_5 h < \lambda^k - \lambda_h^k < c_6 h^2,$$

ahol c_5 és c_6 csak k-tól, az R tartománytól és az L operátor együtthatóitól függő pozitív konstansok.

Az $u^k - U^k$ különbségre ugyanolyan becsléseket lehet megadni, mint az $u - U$ különbségre. Nevezetesen, ha λ^k egyszeres sajátérték, akkor

$$\max_{P \in R_h^*} |u^k(P) - U^k(P)| = O\left(h^{\frac{1}{2}} |\log h|^{\frac{1}{2}}\right),$$

ha $\lambda^k = \lambda^{k+1} = \ldots = \lambda^{k+n-1}$ n-szeres sajátérték, akkor

$$\max_{P \in R_h^*} |u^k(P) - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_h^{k+i} U^{k+i}(P)| = O\left(h^{\frac{1}{2}} |\log h|^{\frac{1}{2}}\right),$$

ahol $\beta_h^k, \beta_h^{k+1}, \ldots, \beta_h^{k+n-1}$ valós együtthatók (lásd [13]). Ha $b(x, y) \equiv 0$, akkor

$$\max_{P \in R_h^*} |u^k(P) - U^k(P)| = O(h^{\beta^*}), \tag{21}$$

illetve

$$\max_{P \in R_h^*} \left| u^k(P) - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_h^{k+i} U^{k+i}(P) \right| = O(h^{\beta^*}). \tag{22}$$

Valószínűnek látszik, hogy a (21) illetve (22) becslés az általános esetben is fennáll.

3. Ha $b(x, y) \equiv 0$, akkor a (11) és (12) feladat természetes általánosítása az

$$\begin{aligned} L^{(h)} V(P) &= f_1(P), \quad P \in R_h, \\ V(P) &= \varphi(P), \quad P \in C_h \end{aligned} \tag{23}$$

és az

$$\begin{aligned} L^{(h)} V(P) + \mu_h V(P) &= 0, \quad P \in R_h, \\ V(P) &= 0, \quad P \in C_h \end{aligned} \tag{24}$$

feladat (lásd [22] és [23]), ahol

$$L^{(h)}V = (a_1 V_{\bar{x}})_{\hat{x}} + (b_1 V_{\bar{y}})_{\hat{y}} - d_1 V,$$

$a_1(P) = a(W')$, $W' = (x_P - 0{,}5h_W, y_P)$, $b_1(P) = b(S')$, $S' = (x_P, y_P - 0{,}5h_S)$, $d_1(P) = d(P)$, $f_1(P) = f(P)$.

Legyen V a (23) feladat megoldása, $\mu_h^1 \leqq \mu_h^2 \leqq \ldots$ a (24) feladat sajátértékei, $V^1, V^2, \ldots$ a megfelelő sajátfüggvények. A $V^1, V^2, \ldots$ sajátfüggvények megválaszthatók úgy, hogy ortonormált rendszert alkossanak abban az értelemben, hogy

$$\sum_{P \in R_h} V^k(P) V^l(P) H_P = \delta_{kl},$$

ahol

$$H_P = \frac{(h_E + h_W)(h_N + h_S)}{4}.$$

Ha $u(x, y) \in C^{(4)}(\bar{R})$,[2] akkor fennáll a következő *Gersgorin*-típusú becslés[3] (lásd [22])

(25) $$\max_{P \in R_h} |u(P) - V(P)| = O(h^2).$$

A (25) becslés levezetésénél az $a(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$ és $f(x, y)$ függvények analitikussága helyett elég feltenni, hogy $a(x, y) \in C^{(3)}(\bar{R})$, $c(x, y) \in C^{(3)}(\bar{R})$, $d(x, y) \in C^{(3)}(\bar{R})$, és $f(x, y) \in C^{(3)}(\bar{R})$. Az alkalmazásokban előforduló feladatok jelentős részénél (így például a hővezetési feladatoknál) azonban még ezek a gyengébb feltételek sem teljesülnek. SZAMARSZKIJ számos dolgozatában (lásd például [24]) részletesen foglalkozott azzal az esettel, amikor az L operátor együtthatóinak és az $f(x, y)$ függvénynek véges számú rácsegyenes mentén elsőfajú szakadása van. Bebizonyította, hogy ha az $a_1(P)$, $b_1(P)$, $d_1(P)$ és $f_1(P)$ rácsfüggvények definícióját megfelelően módosítjuk, akkor az $u(x, y) \in C^{(4)}(\bar{R})$ feltétel mellett a (25) becslés ebben az esetben is fennáll.

Ha a C határon szögpontok vannak, akkor általában $u(x, y) \notin C^{(4)}(\bar{R})$. Az általános esetben valószínűleg fennáll a

$$\max_{P \in R_h} |u(P) - V(P)| = O(h^{\gamma^*})$$

becslés, ahol

$$\gamma^* = \begin{cases} 2, & \text{ha } \max\limits_{i=1,\ldots,m} \alpha_i^* < 1 \text{ vagy ha nincsenek szögpontok,} \\ \dfrac{2}{\max\limits_{i=1,\ldots,m} \alpha_i^*} - \varepsilon, & \text{ha } \max\limits_{i=1,\ldots,m} \alpha_i^* \geqq 1, \end{cases}$$

ez a sejtés azonban nincs még bizonyítva.

[2] A korlátos, zárt T síkbeli tartományban értelmezett függvény akkor tartozik a $C^{(m)}(T)$ osztályhoz, ha m-edrendű parciális deriváltjai folytonosak T-ben.

[3] Változó együtthatójú L operátorok esetén a *Gersgorin*-típusú becslések lényegesen bonyolultabbak, mint a Laplace-operátor esetében, ezért a továbbiakban a *Gersgorin*-típusú becsléseknél is csak a nagyságrendet adjuk meg.

A $\lambda^k - \mu_h^k$ és az $u^k - U^k$ különbségekre szintén csak *Gersgorin*-típusú becsléseket ismerünk. Nevezetesen, ha $u^k(x, y) \in C^{(4)}(\bar{R})$, akkor

$$\lambda^k - \mu_h^k = 0(h^2)$$

(lásd [27]) és

$$\max_{P \in R_h} |u^k(P) - V^k(P)| = 0(h^2 |\log h|),$$

illetve

$$\max_{P \in R_h} \left| u^k(P) - \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_h^{k+i} V^{k+i}(P) \right| = 0(h^2 |\log h|),$$

attól függően, hogy λ^k egyszeres vagy n-szeres sajátérték (lásd [23]).

Befejezésül megemlítjük, hogy a (14) és (15) feladatnak a jelen dolgozatban vizsgált két véges-differencia közelítésén kívül még nagyon sok, egymástól lényegesen különböző véges-differencia közelítése ismeretes (lásd például [8], 190. old., [25] és [28]). Az irodalomban ajánlott közelítések többségénél a hiba becslésével is foglalkoztak. Ennek ellenére, a (14) feladat véges-differencia közelítései közül eddig még csak egyetlen egynél sikerült tetszőleges L operátor esetén a hibára $0(h^2)$ nagyságrendű *Gersgorin*-típusú becslést megadni (lásd [25]), ez a közelítés rendkívül bonyolult és ezért inkább csak elméleti jelentősége van. A (15) feladat véges-differencia közelítései közül eddig még egynél sem sikerült a hibára $0(h^2)$ nagyságrendű becslést kapni.

IRODALOM

[1] GERSCHGORIN, S.: Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen, *Z. Angew. Math. Mech.* **10** (1930), 373—382.

[2] Волков, Е. А.: О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике, *Труды Математического Института им. В. А. Стеклова.* LXXVII (1965), 89—112.

[3] Волков, Е. А.: О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнения Лапласа на многоугольниках, *Труды Математического Института им. В. А. Смеклова,* LXXVII (1965), 113—142.

[4] LAASONEN, P.: On the truncation error of discrete approximations to the solutions of Dirichlet problems in a domain with corners, *J. Assoc. Comput. Mach.*, **5** (1958) 32—38.

[5] LAASONEN, P.: On the discretization error of the Dirichlet problem in a plane region with corners. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A.* I. **408** (1967), 1—16.

[6] LAASONEN, P.: On the solution of Poisson's difference equation, *J. Assoc. Comput. Mach.* **5** (1958) 370—382.

[7] Вейдингер,Л.: О вычислении собственных значений мембраны методом конечных разностей, *Ж. вычисл. матем. и матем физ.* 4 (1964) 1037—1044.

[8] FORSYTHE, G., WASOW, W.: *Finite-difference methods for partial differential equations,* New York, 1960.

[9] BRAMBLE, J. H., HUBBARD, B. E.: A priori bounds on the discretization error in the numerical solution of the Dirichlet problem, *Contributions to Differential Equations,* vol. 2., New York, 1963., 229—252.

[10] HUBBARD, B. E.: Remarks on the order of convergence in the discrete Dirichlet problem, *Numerical solution of partial differential equations,* New York, 1966. 21—34.

[11] VEIDINGER, L.: On the order of convergence of finite-difference approximations to the solution of the Dirichlet problem, *Studia Sci. Math. Hung.* 3 (1968), 337—343.

[12] HUBBARD, B. E.: Bounds for eigenvalues of the free and fixed membrane by finite-difference methods. *Pacif. J. Math.* **11** (1961), 559—590.

[13] VEIDINGER, L.: On the order of convergence of finite-difference approximations to eigenvalues and eigenfunctions (közlés alatt).

[14] BRAMBLE, J. H.: HUBBARD, B. E.: On the formulation of finite-difference analogues of the Dirichlet problem for Poisson's equation, *Num. Math.*, 4 (1962), 313—327.
[15] Вейдингер, Л.: О вычислении собственных значений и собственных функций оператора Лапласа методом конечных разностей, *Ж. бычисл. матем. и матем. физ.* 6 (1966), 687—698.
[16] FREY, T., RÓZSA, P.: Konvergenzschnelle des Differenzverfahrens der Poissonschen und der biharmonischen Differencialgleichungen, *I. Period. Polytechn. Engrg.* 4 (1960), 385—422.
[17] COURANT, R., HILBERT, D.: *Methods of mathematical physics*, vol. 2., New York, 1962.
[18] Саульев, В. К.: Об оценке погрешности при нахождении собственных функций методом конечных разностей, *Вычисл. матем. сборник* 1 (1957), 87—115.
[19] LEHMAN, SHERMAN R.: Developments at an analytic corner of solutions of partial differential equations, *J. Math. Mech.*, 8 (1959), 727—760.
[20] PANOW, D. J.: *Formelsammlung zur numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen nach dem Differenzenverfahren*, Berlin, 1955.
[21] Вейдингер, Л.: Об оценке погрешности при нахождении собственных значений методом конечных разностей, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 5 (1965), 806—815.
[22] Самарский, А. А.: О точности метода сеток для задачи Дирихле в произвольной облас-mu. *Apl. Matem.* 10 (1965), 293—296.
[23] Вейдингер, Л.: Об оценке погрешности при нахождении собственных функций методом конечных разностей. *Studia Sci. Math. Hung.* 2 (1967), 185—191.
[24] Самарский, А. А.: Локально—одномерные разностные схемы на неравномерных сетках, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 3 (1963), 431—466.
[25] BRAMBLE, J. H., HUBBARD, B. E.: A theorem on error estimation for finite-difference analogues of the Dirichlet problem for elliptic equations. *Contributions to Differential Equations*, vol. 2., New York, 1963, 319—340.
[26] Саульев, В. К.: К вопросу решения задачи о собственных значениях методом конечных разностей, *Вычисл. матем. и вычисл. техн., сборник* 2 (1955), 116—144.
[27] Приказчиков, В. Г.: Разностная задача на собственные значения для эллиптического оператора. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 5 (1965), 648—657.
[28] Демъянович, Ю. К.: Об аппроксимации и сходимости метода сеток в эллиптических задачах, *Докл. АН СССР*, 170 (1966), 27—30.