SPEKTRÁLMATRIXOK FAKTORIZÁCIÓJÁRÓL

Írta: KRÁMLI ANDRÁS

Az időben folytonos, ill. diszkrét stacionárius, sztochasztikus folyamatok prognózisának elméletében fontos szerepe van a spektrálsűrűség matrixfüggvények analitikus szorzat felbontásának. Különösen fontos az az egyszerű eset, amikor a spektrálsűrűség matrix elemei racionális függvények. Ebben az esetben ugyanis meg lehet konstruálni a — bizonyos szempontból — legjobb analitikus felbontást. Az [1] cikk az időben folytonos esetben megad egy konstrukciós módszert.

Ebben a cikkben a stacionárius folyamatok elméletében alkalmazott módszerek segítségével egy egyszerűbb konstrukciót adunk meg. A gondolatmenet azon alapszik, hogy az úgynevezett CAYLEY transzformáció segítségével az időben folytonos esetet vissza lehet vezetni az időben diszkrét esetre, ahol a meggondolások jóval áttekinthetőbbek. Amint az a bizonyításból kiderül, a CAYLEY transzformáció alkalmazásával tételünk közvetlenül is igazolható lenne, de a két eset szoros kapcsolatának hangsúlyozására mi az előbbi (lényegében nem bonyolultabb) utat választjuk.

Az időben folytonos folyamatok esetében a racionális spektrálsűrűség matrix szorzatfelbontási tétele a következőképpen szól:

1. TÉTEL. *Legyen $A(z)$ olyan, a komplex számsíkon értelmezett $n\times n$ típusú matrixfüggvény, amelynek elemei racionális függvények, és* rang $A(z)=r\leqq n$ — *kivéve esetleg véges sok pontot.*

$A(z)$ akkor és csak akkor faktorizálható az

$$A(z)=B(z)B_*(z)$$

alakban, ahol

a) *$B(z)$ racionális $n\times r$ típusú matrix és $B_*(z)=(B(-\bar{z}))^*$ — $B(z)$ un. parakonjugáltja — (C^* a C matrix adjungáltját jelenti),*

b) *$B(z)$ analitikus a* $\operatorname{Re} z<0$ *félsíkon,*

c) *létezik $B(z)$ balinverze, amely szintén analitikus a* $\operatorname{Re} z<0$ *félsíkon,*

ha $A(z)$ önadjungált és pozitív szemidefinit az imaginárius tengelyen.

A feltétel szükségessége nyilvánvaló (ti. ha λ valós $B_*(i\lambda)=B(i\lambda)^*$), ezért csak az elegendőség bizonyításával foglalkozunk.

Mindenekelőtt a következőket vegyük észre:

Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az $A(z)$ racionális matrixfüggvény $A_*(z)$ parakonjugáltja a $B(z)$ matrixfüggvény legyen az, hogy $A(i\lambda)^*=B(i\lambda)$ fennálljon (λ valós), ti. az $A(i\lambda)^*=B(i\lambda)$ határfeltétel ugyanazt a feltételt szabja ki a matrixelemekben szereplő racionális függvények együtthatóira, mint az $A_*(z)=B(z)$ feltétel. Hasonlóan $A(z)=B(z)B_*(z)$ akkor és csak akkor, ha $A(i\lambda)=B(i\lambda)B(i\lambda)^*$.

Ezt figyelembe véve az 1. tétel így fogalmazható meg:

Az $A(z)$ $n \times n$ típusú racionális matrixfüggvény akkor és csak akkor faktorizálható az imaginárius tengelyen

$$A(i\lambda) = B(i\lambda) B(i\lambda)^* \tag{1}$$

alakban, ahol

a) *$B(z)$ racionális $n \times r$ típusú matrix* ($r = \operatorname{rang} A(z)$),
b) *$B(z)$ analitikus a* $\operatorname{Re} z < 0$ *félsíkon,*
c) *$B(z)$ balinverze létezik és analitikus a* $\operatorname{Re} z < 0$ *félsíkon, ha $A(i\lambda)$ önadjungált és pozitív szemidefinit (λ valós).*

Az úgynevezett CAYLEY transzformáció segítségével a probléma visszavezethető az egységkörön pozitív definit racionális matrixfüggvény (1)-hez hasonló felbontására (ez felel meg az időben diszkrét esetnek).

Tekintsük a következő leképezés-párt:

$$s = \varphi(z) = \frac{1+z}{1-z} \qquad z = \varphi^{-1}(s) = \frac{s-1}{1+s}.$$

Könnyen látható, hogy a φ leképezés a balfélsíkot analitikusan képezi le az egységkörbe, ahol φ^{-1} is analitikus; emellett a képzetes tengely képe éppen az egységkörvonal:

$$\varphi(i\lambda) = e^{-i\mu}, \quad \text{ahol} \quad \mu = 2 \operatorname{arc\,ctg} \lambda.$$

Tehát $\tilde{A}(s) = A(\varphi^{-1}(s))$ olyan racionális matrixfüggvény, amely az egységkörön önadjungált és pozitív szemidefinit. Megmutatjuk, hogy igaz a következő állítás:

2. TÉTEL. *Ha az $\tilde{A}(s)$ racionális matrixfüggvény önadjungált és pozitív szemidefinit az egységkörön, akkor felbontható*

$$\tilde{A}(e^{i\lambda}) = \tilde{B}(e^{i\lambda}) \tilde{B}(e^{i\lambda})^* \tag{2}$$

alakban, ahol

a) *$\tilde{B}(s)$ racionális $n \times r$ típusú matrixfüggvény* ($r = \operatorname{rang} \tilde{A}(s)$),
b) *$\tilde{B}(s)$ analitikus az egységkörben,*
c) *$\tilde{B}(s)$-nek létezik a balinverze, és az is analitikus az egységkörben.*

Ekkor a $B(z) = \tilde{B}(\varphi(z))$ függvény eleget tesz az 1. tétel feltételeinek. A második tétel bizonyításához a következőket jegyezzük meg:

A c) feltétel nélkül a második tétel a prognózis-elmélet egy ismert tétele; bizonyítása a FEJÉR—RIESZ lemmán alapszik (l. [2] 10. 3 lemma 63—66. o.).

A c) feltétel bizonyításához a következő állítást kell igazolnunk: a (2) felbontás helyettesíthető olyan

$$\tilde{A}(e^{i\lambda}) = B(e^{i\lambda}) B(e^{i\lambda})^* \tag{3}$$

felbontással, amelyben $B(s)$-nek minden $|s| < 1$-re van nem eltűnő $r \times r$-es aldeterminánsa, továbbá B elemei racionális törtfüggvények és analitikusak az egységkörben. (Minthogy $\tilde{B}$ elemei is racionális törtfüggvények, a szinguláris helyek száma — multiplicitásokkal együtt számolva — véges sok.)

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $|s_0|<1$ és rang $B(s_0)=k<r$. A $B(s_0)$ matrixnak van k lineárisan független sora; az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy az első r sor közül is kiválaszthatók. Jelöljük ezt az $r\times r$ típusú részmatrixot $C(s_0)$-lal. A poláris felbontás tétele alapján van olyan (konstans) V_1 unitér matrix, hogy $C(s_0)=V_1H$, ahol $H=[C(s_0)C(s_0)^*]^{\frac{1}{2}}$.

Minthogy H önadjungált, unitér ekvivalens egy D diagonális matrixszal:

$$D = V_2 H V_2^* = V_2 V_1^* C(s_0) V_2^*. \tag{4}$$

A D matrix főátlójában is előfordul a 0 elem, mert

$$\text{rang } C(s_0) < r. \tag{5}$$

Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy éppen a balfelső sarokban levő elem 0.

Legyen $D(s)=V_2V_1^*C(s)V_2^*$ — ekkor a (4) és (5) összefüggések azt jelentik, hogy $D(s)$ első oszlopának és sorának s_0 zérushelye. Ezért a $C(s)V_2^*D_1(s)$ matrix analitikus az egységkörben, ahol

$$D_1(s) = \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 \dots 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{1-\bar{s}_0 s}{s-s_0} & \dfrac{s_0}{|s_0|} & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 \dots 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

attól függően, hogy $s_0=0$ vagy sem.

Tekintsük most a $B(s)V_2^*D_1(s)$ $n\times r$ típusú matrixfüggvényt. Egy unitér matrixszal való szorzás nem változtat a sorok lineáris függőségi viszonyain, ezért s_0 a $B(s)V_2^*$ első oszlopának is zérushelye. Ellenkező esetben ugyanis rang $B(s_0)V_2^*>k$, mert a $C(s_0)V_2^*$ részmatrix k lineárisan független sorához hozzávéve egy olyan sort, amelynek első eleme s_0-ban nem tűnik el, $k+1$ lineárisan független sort választhatnánk ki a $B(s_0)V_2^*$ matrix soraiból.

Minthogy $V_2^*D_1(e^{i\lambda})$ unitér, a $B'(s)=B(s)V_2^*D_1(s)$ is kielégíti a (3) határfeltételt, és s_0 a $B'(s)$ $r\times r$ típusú aldeterminánsainak eggyel alacsonyabb multiplicitású zérushelye, mint $B(s)$ megfelelő aldeterminánsainak. (Ez a megállapítás természetesen csak a nem azonosan eltűnő aldeterminánsokra vonatkozik.) Mivel $V_2^*D_1(s)$ az egységkör minden más pontjában értelmezve van és invertálható, a $B(s)$-ről $B'(s)$-re való áttéréskor az s_0-tól különböző zérushelyek változatlanok maradnak. Az eljárást addig folytathatjuk, míg van olyan $|s_0|<1$, hogy rang $B'^{\cdots\prime}(s_0)<r$. De véges sok szinguláris hely van, tehát az eljárás véges lépés után végetér. Ezzel állításunkat és így az 1. és a 2. tételeket is igazoltuk.

Megjegyzés: A FEJÉR—RIESZ lemma megfelelő változatának felhasználásával az 1. tétel is igazolható a c) feltétel nélkül (l. uo.). A teljes 1. tétel bizonyítása ezután ugyanúgy történhet, mint a 2. tételé, csak $D_1(s)$ helyett $D_1(\varphi(z))$ matrixszal kell a korrekciót elvégezni.

IRODALOM

[1] CSÁKI F.—FISCHER P.: On the Spectrum Factorization, *Acta Technica Acad. Sci. Hung.* **58** (1967) 1—2., 145—168. o.
[2] Розанов Ю. А.: Стационарные Случайные Процессы, Физматгиз, (1963) Москва.

ON FACTORIZATION OF SPECTRAL MATRICES

by A. KRÁMLI

Summary

In the present note the proof of a frequently used theorem ot the statistical prediction theory is given.

THEOREM: Let $A(z)$ be an analitic matrix function with rational elements defined on the complex plane.

Let the dimension and the rank ot $A(z)$ be n and $r \leqq n$ respectively.

$A(z)$ is factorizable in the form

$$A(z) = B(z)\,B_*(z)$$

where

a) $B(z)$ is an $n \times r$ rational matrix function and $B_*(z) = (B(-\bar{z}))^*$,
b) $B(z)$ is analytic on the left half-plane,
c) there exists a left inverse of $B(z)$ that is analytic on the left half-plane,
if and only if $A(z)$ is HERMITIAN and positive on the imaginary axis.

Matrix functions of such type arise as spectral density matrices of stationary stochastic processes, continuous in time.

A constructiv proof of this theorem is given in [1]. Our proof based on reduction to a similar theorem valid for spectral matrices defined on the unit circle corresponding to the discrete time case is also constructiv but simpler, than original one.

The methods used were taken from classical treatises on stationary processes e.g. [2].