

# ALGEBRAI EGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSÁRÓL\*

Írta: TURÁN PÁL

1. Jelen előadás, mely egy, tavaly Weimarban rendezett, alkalmazott matematikai kongresszuson tartott előadás továbbfejlesztett formája, a tárgynak egyes elméleti és gyakorlati oldalaival foglalkozik. Az elsőnek említett irányú megjegyzések helyes megvilágítása végett emlékeztetünk RUFFINI—ABEL azon klasszikus tételére, mely szerint  $n \geq 5$ -re nincs olyan véges algoritmus, melynek elemi operációi

- a) a négy alapművelet komplex számokkal,
- b) komplex számból vont gyök egy meghatározott értékének meghatározása volnának és melyet bármely komplex egütthatós  $n$ -edfokú

$$(1.1) \quad f_0(z) = a_{00} + a_{10}z + \dots + a_{n0}z^n = 0$$
$$a_{00}a_{n0} \neq 0$$

algebrai egyenletre alkalmazva az egyenlet egy gyökét kapnánk. Ha az algoritmus hosszán a benne szereplő elemi lépések számát értjük, akkor persze egy ilyen „megoldó algoritmus” hossza csak  $n$ -től függő lenne. Kézenfekvő kérdés, vajon hogyan áll a helyzet egy „közelítőleg megoldó” algoritmussal? Definiáljunk egy tetszőleges  $H$  operációtartomány feletti „közelítő megoldó” algoritmust, pontosabban  $N_1, N_2, \dots, N_k, \dots$  „közelítőleg megoldó algoritmusorozat” a következő két követelménnyel:

- I. A  $N_k$  algoritmus elemi lépései  $H$ -ból valók és hossza csak  $n$ - és  $k$ -től függ.
- II. A  $N_k$  algoritmust tetszőleges (1.1) alakú  $n$ -edfokú egyenletre alkalmazva, oly

$$\psi_k = \psi_k(a_{00}, \dots, a_{n0})$$

komplex számot nyerünk, hogy az (1.1) egyenlet egy alkalmas  $z^*$ -gyökére

$$(1.2) \quad \left| \frac{z^*}{\psi_k} - 1 \right| \leq \frac{1}{k}.$$

Tekintsük azon  $H^*$  operációtartományt, melynek operációi csupán

- c) a négy alapművelet komplex számokkal,
  - d) tetszőleges pozitív számból vont gyök pozitív értékének meghatározása.
- $H^*$  biztosan nem bővebb az a) és b) alatt megadott operációtartománynál. Ekkor fennáll az

\* Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok felolvasóülésén, 1968. május 14-én.

I. TÉTEL. Minden rögzített  $n$  természetes egész mellett megadható az (1. 1) egyenletet  $H^*$  felett közelítőleg megoldó algoritmusorozat (és ilyent explicite meg is fogunk adni).

Más szóval tehát meg fogunk adni minden pozitív egész  $n$ -hez és tetszőleges kis pozitív  $\varepsilon$ -hoz olyan algoritmust, melynek lépései  $c)$  és  $d)$ -ből valók; hossza csak  $n$  és  $\varepsilon$ -tól függ és amelyet tetszőleges komplex együtthatós  $n$ -edfokú egyenletre alkalmazva oly  $\psi_\varepsilon$  komplex számot nyerünk, melyre az adott egyenlet alkalmas  $z^*$ -gyökére

$$(1. 3) \quad \left| \frac{z^*}{\psi_\varepsilon} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

A tétel lényeges tartalma nyilván az algoritmusnak az együtthatóktól való teljes függetlensége (és így persze az algoritmus hossza is független az együtthatóktól). A *Ruffini—Abel* tétellel egybevetve tehát az I. tétel tartalma röviden úgy is fogalmazható, hogy a fenti értelemben vett közelítő megoldhatóságra *Ruffini—Abel* tételének analogonja nem áll fenn.

A numerikus analízis szempontjából a következőket jegyzem meg. Dacára annak, hogy a *Newton*-módszer a 17. század közepétájt, a *Graeffe—Bernoulli*-módszer 1728-ban keletkezett (nem is szólva a *regula falsi*-ről), A. RALSTON és H. I. WILF 1960-ban megjelent „*Mathematical methods for digital computers*” c. könyvükben azt írták, hogy egyenletek megoldására jelenleg nincs gépi használatra megfelelő módszer. Ennek oka egyrészt az, hogy az ismert közelítő módszerek limesz-módszerek, melyekre általános hibabecslés nincs, másrészt az, hogy erősen függenek (az algoritmus hossza is!) a megoldandó egyenlet együtthatóitól; márpedig szerintük gépi szempontból egy esetleg hosszabb, de teljesen egyöntetű algoritmus használhatóbb. A megoldandó algoritmus, amelyet az V. szabály fog megadni, ezen hiányosságok egyikében sem szenved, mint látni fogjuk, és a  $c)$ — $d)$  elemi lépések nyilván könnyen programozhatók.

A módszernek még egy előnye van. Minden közelítő módszer elvben rögtön átírható  $n \times n$ -es matrix sajátértékeinek közelítésére, csak a numerikus keresztülvitel lesz rendszerint igen körülményes. Az V. szabályra azonban tetszőleges komplex-elemű  $n \times n$ -es  $A$  matrix esetén, mint a VI. szabály meg fogja mutatni, még elegánsabb alak adható.

Módszerünk az általánosabb

$$(1. 4) \quad \det \{A_0 + A_1 \lambda + \dots + A_k \lambda^k\} = 0$$

egyenlet esetén is használható, ahol  $A_\nu$   $n \times n$ -es komplex-elemű matrix,  $\nu = 0, 1, \dots, k$ ; ilyen egyenletek lépnek fel  $k = 2, 3, 4$  esetén az aerodinamikában. Ezekre azonban itt nem térünk ki. Módszerünk továbbá alkalmas általános egyenlőtlenségek bizonyítására, ezek közül a következőt emelném ki.

II. TÉTEL: Az  $n \times n$ -es  $B$  matrix nyomát  $\mathcal{T}_r(B)$ -vel jelölve, a tetszőleges komplex-elemű  $n \times n$ -es  $A$  matrixnak van legalább egy sajátértéke a komplex  $z$ -sík

$$|z| \leq \max_{\nu=1,2,\dots,n} |\mathcal{T}_r(A^\nu)|^{\frac{1}{\nu}}$$

körlemezében. Ez kisebb sugarú origó-centrumú körlemezettel nem helyettesíthető.





matrixokat. Ha  $A$  sajátértékei  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  és

$$(3.2) \quad |\lambda_1| \cong |\lambda_2| \cong \dots \cong |\lambda_n|,$$

továbbá

$$(3.3) \quad L^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{v=1,2,\dots,n} \left| \frac{1}{n} \mathcal{T}_r(B^v) \right|^{\frac{1}{v2^m}},$$

akkor

$$(3.4) \quad 1 \cong \frac{|\lambda_1|}{L^*} \cong 5^{\frac{1}{2^m}}.$$

IV. SZABÁLY (az I. szabály matrixokra vonatkozó megfelelője). Ha  $A$  nem szinguláris  $n \times n$ -es komplex elemű matrix és  $m$  tetszőleges pozitív egész, képezzük előbb az  $A^{-1}$ , majd iterált négyzetreemeléssel az

$$(3.5) \quad A^{-1}, (A^{-1})^2, \dots, (A^{-1})^{2^m} \stackrel{\text{def}}{=} B_1 \\ B_1, B_1^2, B_1^3, \dots, B_1^n$$

matrixokat. Ha

$$(3.6) \quad L = \frac{1}{\max_{v=1,2,\dots,n} \left| \frac{1}{n} \mathcal{T}_r(B_1^v) \right|^{\frac{1}{v2^m}}},$$

akkor

$$5^{-\frac{1}{2^m}} \cong \frac{|\lambda_n|}{L} \cong 1.$$

4. A két utóbbi szabály közül különösen a III. szabály látszik programozásra alkalmasnak. Mindkét szabály alkalmazható a technikában ún. veszélyességi zónák megállapítására. Különösen előnyösnek tűnik a III. szabály paraméterektől függő matrix maximális abszolút értékű sajátértékének közelítő meghatározására; ilyen eset áll elő pl. multiplett spektrumvonalak mágneses térben való felbontásának vizsgálatánál, ahol még tovább egyszerűsíti a dolgot az, hogy a matrix szimmetrikus lévén, a sajátértékek valósak. Ez esetben tehát pl. egy  $\mu$  paraméter esetén a  $\lambda$  maximális sajátértéket legfeljebb 6% relatív hibával a következőképpen nyerjük. Képezzük ötszöri iterált négyzetreemeléssel az  $A$  matrix

$$A, A^2, A^{2^2}, A^{2^3}, A^{2^4}, A^{2^5}$$

hatványait és az utóbbit  $B_2$ -vel jelölve, a

$$B_2, B_2^2, B_2^3, \dots, B_2^n$$

matrixokat. Ekkor a  $B_2^v$  matrixok elemei egy  $a \cong \mu \cong b$  közben  $\mu$ -nek adott függvénye lévén, az

$$\left| \frac{1}{n} \mathcal{T}_r(B_2^v) \right|^{\frac{1}{32^v}} \quad v = 1, \dots, n$$

kifejezések a  $\mu$ -nek explicite adott, gépben egyszer s mindenkorra grafikusán előállítható függvényei és így a felső burkolójuk is. A kapott görbe az  $A = A(\mu)$  matrix legnagyobb sajátértékét fogja adni legfeljebb 6% hibával minden oly  $\mu$ -re, amely az  $(a, b)$  közbe esik.

5. Ezután rátérhetünk az I. tételben említett algoritmus megadására (V. szabály), majd a matrixokra vonatkozó analóg VI. szabály megadására.

V. SZABÁLY. Ha (1.1) a megoldandó egyenlet, akkor 0-adik lépésként alkalmazzuk az első szabályt  $m=4$ -gyel. A kapott  $M \stackrel{\text{def}}{=} M^{(0)}$ -val és  $\zeta^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} 0$ -val képezzük  $j=0, 1, \dots, 11$ -re első lépésként a

$$(5.1) \quad \zeta_j^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta^{(0)} + \frac{19}{20} M^{(0)} e^{\frac{j\pi i}{6}}$$

számokat. Amennyiben valamelyik  $f_0(\zeta_j^{(1)})=0$ , készen vagyunk; ha nem, alkalmazzuk az első szabályt  $m=4$ -gyel a  $12 f_0(\zeta_j^{(1)} + w)$  polinomra. Így nyerjük az  $M_j^{(1)}$  ( $j=0, 1, \dots, 11$ ) számokat. Definiáljuk  $M^{(1)}$ -et, a  $\mu_1$ -indexet és a  $\zeta^{(1)}$ -értéket a következőképpen:

$$(5.2) \quad \min_{j=0, 1, \dots, 11} M_j^{(1)} = M_{\mu_1}^{(1)} = M^{(1)}.$$

Ezután második lépésként képezzük  $j=0, 1, \dots, 11$ -re a

$$\zeta_j^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta^{(1)} + \frac{19}{20} M^{(1)} e^{\frac{j\pi i}{6}}$$

számokat. Amennyiben valamelyik  $f_0(\zeta_j^{(2)})=0$ , készen vagyunk; ha nem, alkalmazzuk az első szabályt  $m=4$ -gyel a  $12 f_0(\zeta_j^{(2)} + w)$  polinomra. Így nyerjük az  $M_j^{(2)}$  ( $j=0, 1, \dots, 11$ ) számokat. Definiáljuk  $M^{(2)}$ -t, a  $\mu_2$ -indexet és a  $\zeta^{(2)}$ -értéket

$$(5.3) \quad \min_{j=0, 1, \dots, 11} M_j^{(2)} = M_{\mu_2}^{(2)} = M^{(2)}.$$

által. Ezen algoritmus korlátlanul folytatható (legfeljebb gyökben végződik). Állítás, hogy tetszőleges  $d \geq 2$ -re az (1.1) egyenletnek van olyan  $z^{(d)}$  gyöke, hogy a fenti módon nyert  $\zeta^{(d)}$ -vel

$$(5.4) \quad \left| \frac{z^{(d)}}{\zeta^{(d)}} - 1 \right| \leq 2 \left( \frac{9}{28} \right)^d \quad \left( < \frac{2}{3^d} \right).$$

Ha tehát pl. legfeljebb 7% relatív hibát akarunk garantálni,  $d=3$  vehető. Megjegyzendő, hogy a *Graeffe*-lépések száma előírt relatív hiba mellett az együttthatótól és a fokszámtól is független algoritmusunkban! A szabályos 12-szög választását az motiválja, hogy így az  $f(\zeta_j^{(d)} + w)$  polinomok normálalakba írásánál az együttthatók könnyen megadhatók az eredetiekből.

A matrixok sajátértékeire vonatkozik a

VI. SZABÁLY. Alkalmazzuk a reguláris  $A$  matrixra 0-dik lépésként a negyedik szabályt  $m=4$ -gyel. A kapott  $L \stackrel{\text{def}}{=} L^{(0)}$ -val és  $\eta^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} 0$ -val képezzük első lépésként  $j=0, 1, \dots, 11$ -re az

$$(5.5) \quad \eta_j^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{(0)} + \frac{19}{20} L^{(0)} e^{\frac{j\pi i}{6}}$$

számokat. Amennyiben az

$$(5.6) \quad A + \eta_j^{(1)} E, \quad j=0, 1, \dots, 11, \quad E \text{ az } n \times n\text{-es egységmatrix}$$

matrixok valamelyike szinguláris, úgy a megfelelő  $\eta_j^{(1)}$  sajátérték és készen vagyunk; ha nem, alkalmazzuk a IV. szabályt  $m=4$ -gyel az (5. 6) alatti matrixokra. Így nyerjük az  $L_j^{(1)}$  ( $j=0, 1, \dots, 11$ ) számokat. Defináljuk  $L^{(1)}$ -et, a  $v_1$ -indexet és az  $\eta^{(1)}$ -értéket

$$(5.7) \quad \min_{j=0,1,\dots,11} L_j^{(1)} = L_{v_1}^{(1)} = L^{(1)}$$

által. Ezután második lépésként képezzük  $j=0, 1, 2, \dots, 11$ -re az

$$(5.8) \quad \eta_j^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_j^{(1)} + \frac{19}{20} L^{(1)} e^{\frac{jn_i}{6}}$$

számokat. Amennyiben az

$$(5.9) \quad A + \eta_j^{(2)} E, \quad j=0, 1, \dots, 11$$

matrixok valamelyike szinguláris, készen vagyunk; ha nem, alkalmazzuk a IV. szabályt  $m=4$ -gyel az (5. 9) alatti matrixokra. Így nyerjük az  $L_j^{(2)}$  ( $j=0, \dots, 11$ ) számokat. Defináljuk  $L^{(2)}$ -t, a  $v_2$ -indexet és az  $\eta^{(2)}$ -értéket

$$\min_{j=0,1,\dots,11} L_j^{(2)} = L_{v_2}^{(2)} = L^{(2)}$$

által. Ezen algoritmus korlátlanul folytatható (legfeljebb egy sajátértékben végződik). Állítás, hogy tetszőleges  $d \geq 2$ -re az  $A$  matrixnak van oly  $\lambda^{(d)}$  sajátértéke, hogy a fenti módon nyert  $\eta^{(d)}$ -vel

$$(5.10) \quad \left| \frac{\lambda^{(d)}}{\eta^{(d)}} - 1 \right| \leq \frac{2}{3^d}.$$

6. Térjünk rá az I—IV. szabályok tárgyalására; mivel ezek tárgyalása teljesen analóg, elég lesz II. és III. szabályokat igazolni. Még 1950-ben vettem észre, hogy hatványösszeg-módszerem, melyet eredetileg számelméleti kérdések megoldására találtam, alkalmas a *Graeffe*-módszer javítására; ha  $s_v$  a (2. 9) alatti jelentésű és

$$(6.1) \quad M_1^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{v=1,\dots,n} |s_v|^{\frac{1}{v2^m}},$$

akkor (2. 11) helyett az adódott, hogy

$$(6.2) \quad n^{-2-m} \leq \frac{|z_1|}{M_1^*} \leq \left( \frac{\log(n+1)}{\log 2} \right)^{2-m}.$$

Ebből is elérhető volt az 1%-os relatív hiba, ha  $m$ -et csupán  $n$ -től függően (tehát az együtthatóktól függetlenül) elég nagyoknak vesszük. Az alapul szolgáló hatványösszeg tétele az volt, hogy ha  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  komplex számok, melyekre

$$(6.3) \quad \max_{i=1,2,\dots,n} |\zeta_i| = 1,$$

akkor

$$(6.4) \quad \max_{v=1,2,\dots,n} |\zeta_1^v + \dots + \zeta_n^v| \leq \frac{\log 2}{\log n}.$$

Azon sejtésemet, hogy (6. 4)-ben a jobb oldal egy  $n$ -től független állandóval helyettesíthető, ATKINSON<sup>1</sup> 1961-ben bebizonyította  $\frac{1}{5}$ -dal; újabb dolgozata, melyben ezt  $\frac{1}{3}$ -ra javította, közlés alatt áll az *Acta Math. Hung.*-ban. Ezzel helyettesítve (6. 4)-et eredeti bizonyításomban, (6. 2) alakja

$$(6. 5) \quad \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2^m}} \cong \frac{|z_1|}{M_1^*} \cong 3^{\frac{1}{2^m}}$$

lett, azaz a *Graeffe*-lépések számának  $n$ -től való függésének szükségessége a felső korlátban eltűnt. Az alsó korlátnál ennek eltüntetése csak BUCHHOLTZ<sup>2</sup> egy szellemes megjegyzése után volt lehetséges. Gondolatát általánosabban úgy lehet megfogalmazni, hogy bizonyos alkalmazásokhoz célszerű a hatványösszegeket *súlyozva* vizsgálni. Az előző vizsgálatokban a súly mindig 1 volt; BUCHHOLTZ észrevétele abban állott, hogy (6.4)-ben célszerű az

$$(6. 6) \quad n^{-\frac{1}{v}}$$

súlyokat bevezetni. Tétele szerint (6. 3) normálás mellett

$$(6. 7) \quad \max_{v=1, \dots, n} n^{-\frac{1}{v}} |\zeta_1^v + \dots + \zeta_n^v|^{\frac{1}{v}} \cong \frac{1}{2(\sqrt{2} + 1)} \quad \left( > \frac{1}{5} \right).$$

Ezzel helyettesítve (6. 4)-et, eredeti bizonyításomban a második szabály a következőképp látható be. Vegyük észre, hogy a (2. 9) alatt nyert  $S_v$ -k a *Newton—Girard* formulák szerint a  $z_j$ -gyökökkel oly módon függnek össze, hogy

$$(6. 8) \quad s_v = \sum_{j=1}^n z_j^{v \cdot 2^m}.$$

Ha mármost  $v = v_1$  egy olyan kitevő (2. 10)-ben, melyre a maximum realizálódik, akkor

$$(6. 9) \quad M^* = \left| \frac{1}{n} s_{v_1} \right|^{\frac{1}{v_1 \cdot 2^m}} \cong \left( \frac{|z_1|^{v_1 \cdot 2^m} + \dots + |z_n|^{v_1 \cdot 2^m}}{n} \right)^{\frac{1}{v_1 \cdot 2^m}} \cong |z_1|,$$

ami máris adja (2. 11)-ben az alsó becslést. A felső becsléshez használjuk (6. 7)-et, a

$$\zeta_j = \left( \frac{z_j}{z_1} \right)^{2^m} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

választással, melyre a (6. 3) normálás nyilván teljesül. Ha  $v = v_2$  azon kitevő, melyre a maximum (6. 7)-ben realizálódik, akkor

$$\frac{|z_1^{v_2 \cdot 2^m} + z_2^{v_2 \cdot 2^m} + \dots + z_n^{v_2 \cdot 2^m}|^{\frac{1}{v_2}}}{n^{\frac{1}{v_2}} |z_1|^{2^m}} > \frac{1}{5}.$$

<sup>1</sup> ATKINSON, „On power sums of complex numbers”, *Acta Math. Hung.* 12 (1961) p. 185—189.

<sup>2</sup> J. D. BUCHHOLTZ „Sums of powers of complex numbers”. *Journ. Math. of Analysis and Appl.* 17 (1967), p. 269—279.



Vagyis

$$|z_1| < 5^{\frac{1}{2^m}} \left| \frac{s_{v_2}}{n} \right|^{\frac{1}{v_2 \cdot 2^m}},$$

azaz  $M^*$  definíciója szerint

$$|z_1| < 5^{2^{-m}} M^*. \quad Q. e. d.$$

A III. szabály igazolására elég megjegyezni, hogy  $B^v$  sajátértékei a  $\lambda_j^{v \cdot 2^m}$  számok és így

$$(7.10) \quad T_r B^v = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{v \cdot 2^m}.$$

7. Térjünk rá mármost az V. szabály igazolására. Ez mutat egyes formai hasonlatosságokat D. H. LEHMER egy algoritmusával<sup>3</sup>, melynek a mienktől való lényeges különbözőségét a lépésszám korlátlansága mellett az is mutatja, hogy annak matrixokra való alkalmazása igen nehézkes volna. Jegyezzük meg<sup>4</sup>, hogy

$$(7.1) \quad \frac{19}{21} > 5^{-\frac{1}{16}} > \frac{9}{10},$$

azaz az I. szabály  $m=4$ -gyel a fortiori adja a

$$(7.2) \quad \frac{9}{10} M \cong |z_n| \cong M$$

egyenlőtlenséget. Jelentse  $G_j^{(1)}$  ( $j=0, 1, \dots, 11$ ) az V. szabályban adott jelölésekkel a

$$(7.3) \quad \frac{9}{10} M^{(0)} \cong |z| \cong M^{(0)}$$

$$\frac{(2j-1)\pi}{12} \cong \arccos z < \frac{(2j+1)\pi}{12}$$

gyűrűszektort és tekintsük ebben az (5.1) alatt definiált  $\zeta_j^{(1)}$ -pontokat. Mint egyszerű geometriai megfontolás mutatja,  $G_j^{(1)}$  le van fedve az

$$(7.4) \quad |z - \zeta_j^{(1)}| = M^{(0)} \sqrt{\frac{1}{400} + \frac{19}{5} \sin^2 \frac{\pi}{24}} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda M^{(0)}$$

körvonalak határolta körlemezekkel; (7.2) miatt tehát  $z_n$  ezen körlemezeken valamelyikében benne van. Legyen tehát  $j_1$  ezen index; így

$$(7.5) \quad |z_n - \zeta_{j_1}^{(1)}| \cong \lambda M^{(0)}.$$

Amennyiben az  $f_0(\zeta_j^{(1)})$  számok egyike sem 0 (különben készen volnánk), az V.

<sup>3</sup> D. H. LEHMER „A machine method for solving polynomial equations, *Journ. of the Assoc. for Computing Machinery*, 1961. Mint cikkében írja, algoritmus az IBM 704 géptípusában realizáltatott és sikerült eliminálnia a kerekítési hibákat: ez a jelen algoritmus technikai realizációjánál hasznos lehet.

<sup>4</sup> Ezen számadatért M. HOPKINS és J. J. HUBERTnek (Univ. Alberta) tartozom köszönettel.

szabályban definiált  $M_j^{(1)}$ -ek közül  $\zeta_{j_1}^{(1)}$ -re, — egyenletünknek ehhez legközelebbi gyökét  $z'$ -vel jelölve — (7. 2) alapján

$$(7. 6) \quad \frac{9}{10} M_{j_1}^{(1)} \cong |z' - \zeta_{j_1}^{(1)}| \cong M_{j_1}^{(1)}.$$

Ezt (7. 5)-tel egybevetve és tekintve  $z'$  minimáldefinícióját adódik, hogy

$$\frac{9}{10} M_{j_1}^{(1)} \cong |z' - \zeta_{j_1}^{(1)}| \cong |z_n - \zeta_{j_1}^{(1)}| \cong \lambda M^{(0)}.$$

Vagyis  $M^{(1)}$  minimáldefiníciójával

$$(7. 7) \quad M^{(1)} \cong \frac{10}{9} \lambda M^{(0)}.$$

De ekkor a  $\mu_1$ -index (5. 2) alatti definíciójából — ha  $z^{(1)}$  egyenletünknek  $\zeta^{(1)} = \zeta_{\mu_1}^{(1)}$ -hez legközelebbi görbe — akkor

$$|z^{(1)} - \zeta^{(1)}| \cong M^{(1)} \cong \frac{10}{9} \lambda M^{(0)},$$

ill.

$$\left| \frac{z^{(1)}}{\zeta^{(1)}} - 1 \right| \cong \frac{10}{9} \lambda \frac{M^{(0)}}{|\zeta^{(1)}|},$$

és (5. 1) miatt

$$(7. 8) \quad \left| \frac{z^{(1)}}{\zeta^{(1)}} - 1 \right| \cong \frac{200}{171} \lambda = \frac{20}{19} \cdot \frac{10}{9} \lambda.$$

8. Tegyük fel, hogy  $d \cong 2$ -re

$$(8. 1) \quad \begin{array}{c} M^{(0)}, M^{(1)}, \dots, M^{(d-1)} \\ \zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(d-1)} \end{array}$$

már definiálva vannak és pedig úgy, hogy  $v=1, 2, \dots, (d-1)$ -re

$$(8. 2) \quad M^{(v)} \cong \frac{10}{9} \lambda \cdot M^{(v-1)},$$

továbbá  $(|\zeta^{(1)}| = \frac{19}{20} M^{(0)} \text{ és } 2 \cong v \cong d-1\text{-re})$

$$(8. 3) \quad |\zeta^{(v)}| \cong \frac{19}{20} M^{(0)} \left\{ 1 - \frac{10}{9} \lambda - \left( \frac{10}{9} \lambda \right)^2 - \dots - \left( \frac{10}{9} \lambda \right)^{v-1} \right\}$$

és egyenletünk alkalmas  $z^{(d-1)}$  gyökére

$$(8. 4) \quad \frac{9}{10} M^{(d-1)} \cong |z^{(d-1)} - \zeta^{(d-1)}| \cong M^{(d-1)}.$$

Képezzük  $j=0, 1, \dots, 11$ -re a

$$(8.5) \quad \frac{9}{10} M^{(d-1)} \cong |z - \zeta^{(d-1)}| \cong M^{(d-1)}$$

$$G_j^{(d)}:$$

$$\frac{(2j-1)\pi}{12} \cong \arg z < \frac{(2j+1)\pi}{12}$$

körgyűrűszektorokat és a

$$(8.6) \quad \zeta_j^{(d)} = \zeta^{(d-1)} + \frac{19}{20} M^{(d-1)} e^{\frac{j\pi i}{6}}$$

számokat. A  $G_j^{(d)}$  tartományok ismét le vannak fedve az

$$|z - \zeta_j^{(d)}| \cong \lambda M^{(d-1)}$$

körlemezekkel; (8.4) miatt  $z^{(d-1)}$  ezek valamelyikében benne van. Legyen tehát  $j_d$  ezen index; így

$$(8.7) \quad |z^{(d-1)} - \zeta_{j_d}^{(d)}| \cong \lambda M^{(d-1)}.$$

Amennyiben az  $f_0(\zeta_j^{(d)})$  számok egyike sem 0 (különben készen volnánk) az V. szabályban definiált  $M_{j_d}^{(d)}$ -k közül  $\zeta_{j_d}^{(d)}$ -re — egyenletünk ehhez legközelebbi gyökét  $z''$ -vel jelölve — (7.2) alapján

$$(8.8) \quad \frac{9}{10} M_{j_d}^{(d)} \cong |z'' - \zeta_{j_d}^{(d)}| \cong M_{j_d}^{(d)}.$$

Ezt (8.7)-tel egybevetve és tekintve  $z''$  minimáldefinícióját adódik, hogy

$$\frac{9}{10} M_{j_d}^{(d)} \cong |z'' - \zeta_{j_d}^{(d)}| \cong |z^{(d-1)} - \zeta_{j_d}^{(d)}| \cong \lambda M^{(d-1)}.$$

Vagyis  $M^{(d)}$  minimáldefiníciójával

$$(8.9) \quad M^{(d)} \cong \frac{10}{9} \lambda M^{(d-1)}.$$

Továbbá (8.6)-ból

$$|\zeta^{(d)}| \cong |\zeta^{(d-1)}| - \frac{19}{20} M^{(d-1)};$$

felhasználva (8.3)-at és (8.2)-t nyerjük, hogy

$$(8.10) \quad |\zeta^{(d)}| \cong \frac{19}{20} M^{(0)} \left\{ 1 - \frac{10}{9} \lambda - \dots - \left( \frac{10}{9} \lambda \right)^{d-2} - \left( \frac{10}{9} \lambda \right)^{d-1} \right\}.$$

De ekkor a  $\mu_d$ -index definíciójából — ha  $z^{(d)}$  egyenletünknek  $\zeta^{(d)} = \zeta_{\mu_d}^{(d)}$ -hoz legközelebbi gyöke — akkor

$$|z^{(d)} - \zeta^{(d)}| \cong M^{(d)} \cong \left( \frac{10}{9} \lambda \right)^d M^{(0)},$$

azaz ebből és (8. 10)-ből

$$\left| \frac{z^{(\alpha)}}{\zeta^{(d)}} - 1 \right| \leq \frac{\left( \frac{10}{9} \lambda \right)^d}{\frac{19}{20} \left\{ 1 - \frac{10}{9} \lambda - \dots - \left( \frac{10}{9} \lambda \right)^{d-1} \right\}}$$

Így

$$(8. 11) \quad \left| \frac{z^{(d)}}{\zeta^{(d)}} - 1 \right| < \frac{20}{19} \left( \frac{10}{9} \lambda \right)^d \cdot \frac{9 - 10\lambda}{9 - 20\lambda}.$$

Mint a

$$\sin \frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4}}$$

előállításból rögtön látható (7. 4) alapján, hogy

$$\lambda < \frac{81}{280},$$

mikor is

$$\frac{20}{19} \cdot \frac{9 - 10\lambda}{9 - 20\lambda} < 2,$$

azaz

$$\left| \frac{z^{(d)}}{\zeta^{(d)}} - 1 \right| < 2 \left( \frac{9}{28} \right)^d < \frac{2}{3^d}.$$

valóban.

A VI. szabály V.-ből (6. 10) figyelembevételével adódik.

9. Az algoritmus paraméterei a technikai kivitel optimalizációja szerint esetleg másképp választandók meg; ezzel nem foglalkozunk, de megemlítünk néhány olyan kérdést, melyek az algoritmus gépi realizációjával kapcsolatban merültek fel.

*I. probléma.* Legyen  $p_1, p_2, \dots, p_{25}$  az első 25 prímszám, továbbá  $s$  és  $\beta$  két adott pozitív egész ( $\beta$  „nagy”) és

$$\alpha = \prod_{v=1}^{25} p_v.$$

Az ismeretlen pozitív  $\zeta$  számról tegyük fel, hogy tudjuk, hogy  $\zeta^\beta$  egész szám, mely  $< \alpha$  és ugyancsak ismerjük azon  $h_v$  egészeket, melyekre

$$\zeta^\beta \equiv h_v \pmod{\mu_v}, \quad 0 \leq h_v < \mu_v,$$

$$v = 1, 2, \dots, 25.$$

Ezekből persze  $\zeta^\beta$  a kínai maradéktétel alkalmazásával egyértelműen meghatározható és utána elvben  $\zeta$  gyökvonással meghatározható. A kérdés azonban épp az, hogyan lehetne  $\zeta$ -nek első  $s$  tizedes jegyét  $\zeta^\beta$  előzetes meghatározása nélkül meghatározni a  $h_v$  (legfeljebb kétjegyű) számokból és  $\beta$ -ból?

II. probléma. Legyen  $s < l$  és tekintsük az

$$(9.1) \quad A_{1v}X_1 + A_{2v}X_2 + \dots + A_{lv}X_l = 0$$

$$v = 1, 2, \dots, s$$

homogén lineáris rendszert, ahol az  $A_{\mu\nu}$ -k és  $X_j$ -k  $n \times n$ -es komplex elemű matrixok. Hogyan lehet egy nemtriviális megoldást (amely nyilván létezik) közönséges lineáris rendszerré való átírás *nélkül* algoritmikusan megadni?

III. probléma. Lehet-e az V. szabályt úgy módosítani, hogy az (1.1) egyenlet *valamelyik* gyöke helyett egy *legkisebb abszolút értékű* gyökére adjon közelítést?

IV. probléma. Lehet-e a VI. szabályt alkalmas határátmenettel integráloperátorok sajátértékeire kiterjeszteni?

Előbbiek alapja lényegileg az I. szabály volt, tehát az algebrai egyenlet maximális és minimális *abszolútértékű* gyökeire vonatkozott. Stabilitási vizsgálatokban azonban hasonló jelentősége van a legnagyobb valós rész vagy, (ami ekvivalens feladat) a maximális képzetes rész közelítő meghatározásának. Erre vonatkozólag csupán a D. Bernoulli-féle gondolat legegyszerűbb formája van kidolgozva „On the approximative solution of algebraic equations” c. dolgozatomban, mely (számos sajtóhibával) a *Publ. Mathem. Debrecen* 2. kötetében jelent meg. Eszerint, ha  $H_m(z)$  az

$$e^{-z^2} H_m(z) = (-1)^m (e^{-z^2})^{(m)}$$

által definiált  $m$ -edik *Hermite*-polinom és az  $f_0(z) = 0$  egyenlet gyökeit (2.1) helyett

$$|Im z_1| \leq |Im z_2| \leq \dots \leq |Im z_n|$$

szerint indexeljük, akkor

$$(9.2) \quad |Im z_{n-1}| < |Im z_n|$$

esetén az

$$(9.3) \quad U_m = \sum_{j=1}^n H_m(z_j)$$

számokkal, (melyek nyilván az  $a_{j0}$  együtthatók racionális együtthatós polinomjai) fennáll a

$$(9.4) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2m}} \log \left\{ |U_m| \frac{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)}{\Gamma(1+m)} \right\} = |Im z_n|$$

limeszreláció. Ezután tehát kézenfekvő az összefoglaló jellegű

V. probléma. Hogyan alakul az előbbieken kifejtett elmélet hatványösszegek helyett a (8.3) alatti  $U_m$  kifejezésekkel?