

EGERVÁRY RANGCSÖKKENTŐ ALGORITMUSÁNAK TOVÁBBFEJLESZTÉSE

Írta: TEVAN GYÖRGY

EGERVÁRY rangcsökkentő algoritmusai lehetővé teszik a lineáris egyenletrendszerek áttekinthető numerikus megoldását matrixalgebrai úton, továbbá nagy segítséget nyújt a projektormatrixokkal kapcsolatos számításokhoz és ezzel összefüggésben matrixok *Jordan*-transzformációjának numerikus meghatározásához. Mindazonáltal a lineáris egyenletrendszerek megoldását az [1] cikkben közölt módszernél is nehezítéssé teszi az, hogy az ismeretleneket a felső trianguláris matrixból még külön ki kell számítani: az algoritmus nem teljesen matrixalgebrai. Továbbá a *Jordan*-transzformáció kiszámítására adott módszer [2] — bár az eddigieknél egyszerűbb —, még mindig elég bonyolult.

Ez a cikk az ismertett hátrányokat a rangcsökkentő algoritmus továbbfejlesztése útján küszöböli ki. *Az egyenletek megoldására tiszta matrixalgebrai (tenzor-algebrai) algoritmust ad, matrixok (tenzorok) Jordan-transzformációjára pedig olyat, amelynél nem kell felhasználni a Hermite-féle polinomokat és nincs szükség bizonyos együtthatók rekurzív kiszámítására.* E cikkben EGERVÁRY tételeit is ismertetjük, tenzoros alakban. A későbbi magyarázatok tehermentesítésére ezeket — az eredetitől eltérő módon — bizonyítjuk is. Így egyben egyszerűbb bizonyításokhoz is jutunk.

Fogalmak, elnevezések, jelölések

A cikkben nem metrikus n -dimenziós lineáris vektortérben [4], [5], [6], [7] és a hozzárendelt konjugált vektortérben [5], [6] operáló vegyes [7] tenzorokkal dolgozunk, amelyekkel az eredeti vektortér $x, y, z, \dots$ vektorait „jobbról”, a konjugált vektortér $u, v, w, \dots$ vektorait „balról” szorozva az eredményvektor a tényezővektorok terébe esik: pl. $y = \mathfrak{A}x$ és $v = u\mathfrak{A}$. A diadikus szorzást kör jelöli, az egységtenzor jele pedig $\mathfrak{I}$.

A cikk használja az $\mathfrak{A}$ tenzor jobb oldali ill. bal oldali *nullalterének* és *értéktartományának* fogalmát [6]; a nullalterek x_0 ill. u_0 vektoraira $\mathfrak{A}x_0 = 0$ ill. $u_0\mathfrak{A} = 0$. Az értéktartomány az $\mathfrak{A}x$ ill. az $u\mathfrak{A}$ vektorok halmaza, miközben x ill. u az egész vektorteret befutja. Az irodalomtól eltérően az értéktartomány helyett a *szorzataltér* elnevezést fogjuk használni, e halmaz altérjellegének, valamint annak kihangsúlyozására, hogy elemeihez vektorokkal való szorással jutunk. Az $\mathfrak{A}$ tenzor jobb oldali szorzataltérét $S(\mathfrak{A})$ -val, a bal oldalit $S'(\mathfrak{A})$ -val, jobb oldali nullalterét $N(\mathfrak{A})$ -val, a bal oldalit $N'(\mathfrak{A})$ -val fogjuk jelölni. Ismeretes [6], hogy $S(\mathfrak{A})$ és $S'(\mathfrak{A})$ közös dimenziószámát az $\mathfrak{A}$ tenzor $q(\mathfrak{A})$ rangjának, $N(\mathfrak{A})$ és $N'(\mathfrak{A})$ közös dimenziószámát az $\mathfrak{A}$ tenzor *ranghiányának*, *nulllicitásának* nevezik és ez $n - q(\mathfrak{A})$ értékű; ezenkívül $S'(\mathfrak{A}) \perp N(\mathfrak{A})$ és $N'(\mathfrak{A}) \perp S(\mathfrak{A})$. Az $\mathfrak{A}$ tenzor *invariáns alterén* oly R alteret értünk, amelyre $x \in R$ esetén $\mathfrak{A}x \in R$, [4], [5], [6], [7]. Könnyen belátható, hogy $S(\mathfrak{A})$, $S'(\mathfrak{A})$, $N(\mathfrak{A})$, $N'(\mathfrak{A})$ az $\mathfrak{A}$ tenzor invariáns alterei.

A cikkben külön nevet, a *redukált*-tenzor nevet adjuk az olyan $\mathfrak{B}$ tenzornak, amely saját szorzatalterét dimenziócsökkentés nélkül viszi át, tehát amelyre $S(\mathfrak{B}^2) = S(\mathfrak{B})$. Ebből következik, hogy $S(\mathfrak{B}) \cap N(\mathfrak{B}) = O$, mert ha volna olyan $x_1 \neq o$, hogy $x_1 \in S(\mathfrak{B})$ és $x_1 \in N(\mathfrak{B})$, azaz $x_1 = \mathfrak{B}x_2$ és $\mathfrak{B}x_1 = o$, akkor $S(\mathfrak{B}^2) \subset S(\mathfrak{B})$ lenne. Az $S(\mathfrak{B}) \cap N(\mathfrak{B}) = O$ kapcsolatból következik az ortogonalitások miatt az $S'(\mathfrak{B}) \cap N'(\mathfrak{B}) = O$ összefüggés és ebből azután az $S'(\mathfrak{B}^2) = S'(\mathfrak{B})$ egyenlőség is. A redukált-tenzor elnevezést az indokolja, hogy az ilyen tenzor hatása szorzatalterekre redukálódik; (nulla-sajátértékű Jordan-blokkja diagonal-blokk).

A *projektor* — a redukált tenzor különleges esete — szorzatalterének vektorait *változtatlanul*, egységtenzor módjára viszi át, tehát a $\mathfrak{P}$ projektorra $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}x) = \mathfrak{P}x$ bármely x -re, és így $\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{P}$ [2], [6], amiből $(u\mathfrak{P})\mathfrak{P} = u\mathfrak{P}$, tehát bal oldali szorzatalterének vektorait is változtatlanul viszi át. Minthogy $S(\mathfrak{P}) \cap N(\mathfrak{P}) = O$, azért a tetszőleges x vektor egyértelműen felbontható $x = x_S + x_N$ módra, ahol $x_S \in S(\mathfrak{P})$ és $x_N \in N(\mathfrak{P})$, és így $\mathfrak{P}x = \mathfrak{P}x_S + \mathfrak{P}x_N = x_S + O = x_S$. Tehát a projektort (egyik oldali) szorzat- és nullaltere, vagy az ortogonalitások figyelembevételével két szorzataltere (vagy két nullaltere) egyértelműen meghatározza.

Egerváry tételeinek egyszerű bizonyítása

I. TÉTEL.

$$\text{Ha} \quad \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} - \frac{\mathfrak{A}\eta_1 \circ v_1 \mathfrak{A}}{v_1 \mathfrak{A}\eta_1} \quad (v_1 \mathfrak{A}\eta_1 \neq 0), \quad \text{akkor} \quad \varrho(\mathfrak{A}_1) = \varrho(\mathfrak{A}) - 1.$$

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{A}\eta_0 = o$, akkor $\mathfrak{A}_1 x_0 = o$, tehát $N(\mathfrak{A}) \subseteq N(\mathfrak{A}_1)$. Továbbá $\mathfrak{A}\eta_1 \neq o$ és $\mathfrak{A}_1 \eta_1 = o$, tehát $N(\mathfrak{A}) \subset N(\mathfrak{A}_1)$. Másrészt $N(\mathfrak{A}_1)$ dimenziószáma csak *eggyel* lehet nagyobb $N(\mathfrak{A})$ dimenziószámánál, mert $\eta_0 \in N(\mathfrak{A}_1)$ esetén kell, hogy

$$\mathfrak{A} \left(\eta_0 - \frac{v_1 \mathfrak{A}\eta_0}{v_1 \mathfrak{A}\eta_1} \eta_1 \right) = o,$$

azaz η_0 nem lehet lineárisan független az $N(\mathfrak{A})$ vektoraival és η_1 -gyel generált altér vektoraitól. Így az $\mathfrak{A}_1$ tenzor nullicitása éppen *eggyel* nagyobb, rangja *eggyel* kisebb az $\mathfrak{A}$ tenzorénál. *Qu. e. d.*

Megjegyzés. Az $\mathfrak{A}_1$ tenzor nullalterei éppen az η_1 ill. v_1 segédvektorral bővülnek az $\mathfrak{A}$ tenzor nullaltereihez képest.

Következmény. Az

$$\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_{k-1} - \frac{\mathfrak{A}_{k-1} \eta_k \circ v_k \mathfrak{A}_{k-1}}{v_k \mathfrak{A}_{k-1} \eta_k}; \quad \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$$

rangsökkentő algoritmust egymás után alkalmazva, mindig *eggyel* kisebb rangú tenzorhoz jutunk. Ha $\varrho(\mathfrak{A}) = r$, akkor r lépés után a zérusrangú O -tenzorhoz jutunk: $\mathfrak{A}_r = O$. A levont r -számú diad összege tehát éppen az $\mathfrak{A}$ tenzorral egyenlő: olyan algoritmust kaptunk, amellyel az $\mathfrak{A}$ tenzor rangszámával egyenlő számú diadra bontható.

Az I. tétel megjegyzése alapján világos, hogy a segédvektorok az algoritmusba való bevonásuk után kapott valamennyi tenzor nullalterébe kerülnek, tehát $\mathfrak{A}_k \eta_k = o$,

$\mathfrak{U}_{k+1}\mathfrak{U}_k = 0$, $\mathfrak{U}_{k+2}\mathfrak{U}_k = 0$, ..., és hasonlóan $\mathfrak{U}_k\mathfrak{U}_k = 0$, $\mathfrak{U}_k\mathfrak{U}_{k+1} = 0$, $\mathfrak{U}_k\mathfrak{U}_{k+2} = 0$, Így tehát nem tudunk bevonni az algoritmusba oly segédvektort, amely az előzőleg bevont (ugyanolyan oldali) segédvektorok lineáris kombinációja, mert a diad egyik vektora és a nevező O -vá válnék; az algoritmusba bevonható segédvektorok lineárisan függetlenek.

II. TÉTEL. *A rangcsökkentő algoritmus az egységtenzort teljes, a projektorokat nem teljes biortogonális rendszert alkotó vektorok diadjainak összegeként állítja elő. Az $\mathfrak{I} - \mathfrak{P}$ projektor diadikus felbontása teljessé egészíti ki a $\mathfrak{P}$ projektor diadikus elbontásából adódó nem teljes biortogonális rendszert.*

Bizonyítás. A $\mathfrak{P}$ projektor a rangcsökkentő algoritmussal $\varrho(\mathfrak{P}) = k$ -számú diad összegeként adódik:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{z}_1 \circ w^1 + \mathfrak{z}_2 \circ w^2 + \dots + \mathfrak{z}_k \circ w^k.$$

Ebből

$$\mathfrak{P}x = (w^1 x) \mathfrak{z}_1 + (w^2 x) \mathfrak{z}_2 + \dots + (w^k x) \mathfrak{z}_k,$$

és így a $\mathfrak{P}$ projektor jobb oldali szorzatalterét a lineárisan független $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots, \mathfrak{z}_k$ vektorok generálják. A projektor definíciója szerint tehát

$$\mathfrak{P}\mathfrak{z}_j = \mathfrak{z}_j \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

ami legutóbbi egyenlőségünk szerint csak úgy állhat fenn, ha

$$w^i \mathfrak{z}_j = \delta_j^i.$$

Ha $k < n$, a biortogonális rendszer nem teljes, ha $k = n$, tehát $\mathfrak{P} = \mathfrak{I}$, akkor a kapott biortogonális rendszer teljes.

Könnnyen belátható, hogy

$$(\mathfrak{I} - \mathfrak{P})^2 = \mathfrak{I} - \mathfrak{P}, \quad S(\mathfrak{I} - \mathfrak{P}) = N(\mathfrak{P}) \quad \text{és} \quad N(\mathfrak{I} - \mathfrak{P}) = S(\mathfrak{P}),$$

tehát $\mathfrak{I} - \mathfrak{P}$ $n - \varrho(\mathfrak{P}) = n - k$ rangú projektor. Így a rangcsökkentő algoritmussal a biortogonális vektorokból álló

$$\mathfrak{I} - \mathfrak{P} = \mathfrak{z}_{k+1} \circ w^{k+1} + \mathfrak{z}_{k+2} \circ w^{k+2} + \dots + \mathfrak{z}_n \circ w^n$$

felbontás adódik, amelyhez a $\mathfrak{P}$ projektor felbontását hozzáadva a bal oldalon $\mathfrak{I}$ -t kapjuk, a jobb oldalon pedig n -számú diad összegét; ennek vektorai így módon teljes biortogonális rendszert alkotnak. *Qu. e. d.*

III. TÉTEL. *Ha*

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \dots + \mathfrak{P}_k = \mathfrak{I}, \quad \text{és} \quad \mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_j = \mathfrak{O} \quad (i \neq j),$$

akkor a $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_k$ tenzorok projektorok, és

$$\varrho(\mathfrak{P}_1) + \varrho(\mathfrak{P}_2) + \dots + \varrho(\mathfrak{P}_k) = \varrho(\mathfrak{I}) = n.$$

Bizonyítás. A tétel első egyenlőségét $\mathfrak{P}_i$ -vel szorozva és felhasználva a másodikat $\mathfrak{P}_i^2 = \mathfrak{P}_i$ adódik, így $\mathfrak{P}_i$ projektor. Másrészt a II. tétel szerint a $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_k$ projektorok egyenként nem teljes biortogonális rendszert adó vektorokból alkotott $\varrho(\mathfrak{P}_1), \varrho(\mathfrak{P}_2), \dots, \varrho(\mathfrak{P}_k)$ számú diad összegeként állíthatók elő. E vektorrendszerek

együttvéve a $\mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_j = \mathfrak{O}$ ($i \neq j$) kapcsolat miatt *ugyancsak biortogonális rendszert alkotnak* és a $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \dots + \mathfrak{P}_k = \mathfrak{I}$ összefüggés kapcsán *teljeset*, ezért

$$\varrho(\mathfrak{P}_1) + \varrho(\mathfrak{P}_2) + \dots + \varrho(\mathfrak{P}_k) = n. \quad \text{Qu. e. d.}$$

Megjegyzés. A III. tétel a következő változatban is érvényes:

Ha $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \dots + \mathfrak{P}_k = \mathfrak{I}$, és a $\mathfrak{P}_i$ tenzorok projektorok, akkor

$$\varrho(\mathfrak{P}_1) + \varrho(\mathfrak{P}_2) + \dots + \varrho(\mathfrak{P}_k) = \varrho(\mathfrak{I}) = n$$

és $i \neq j$ esetén $\mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_j = \mathfrak{O}$.

Egy tenzor (első) skalárinvariánsa, nyoma ugyanis diadjai nyomának összege és $x \circ u$ nyoma xu , tehát a II. tétel felhasználásával a $\mathfrak{P}$ projektor skalárinvariánsa éppen $\varrho(\mathfrak{P})$. Így azután a módosított tétel első összefüggése mindkét oldalának nyomát véve megkapjuk a másodikat. A projektorok diadikus felbontása ily módon egyenként nem teljes, összességükben teljes biortogonális vektorrendszert ad; a különböző projektorok diadjainak jobb és bal oldali vektorai tehát ortogonálisak, ezért azután fennáll a harmadik egyenlőség is. *Qu. e. d.*

Az első irányított algoritmus

A rangcsökkentő algoritmus e cikkbeli továbbfejlesztése abban áll, hogy a segédvektorokat meghatározott módon vesszük fel: az algoritmust irányítjuk.

1. TÉTEL. *Ha a O ranghiányú $\mathfrak{M}$ tenzorra a rangcsökkentő algoritmust oly módon alkalmazzuk, hogy az egyik, pl. a bal oldali v_i segédvektorokra $v_i \in S(\mathfrak{B})$ legyen, akkor a lehető legtöbb diad levonása után kapott $\mathfrak{M}$ maradéktenzorra:*

$$S(\mathfrak{M}) = N(\mathfrak{B}).$$

(Az I. tétel következményének jelöléseivel $\mathfrak{M}$ a legnagyobb k -indexű $\mathfrak{M}_k$ tenzor).

Bizonyítás. Az I. tétel következményében kifejtettek alapján világos, hogy a lineárisan független v_i vektorok révén $S'(\mathfrak{B}) \subset N'(\mathfrak{M})$. Minthogy azonban $N'(\mathfrak{M}) = O$, azért $S'(\mathfrak{B}) = N'(\mathfrak{M})$, és így az ortogonalitások miatt $N(\mathfrak{B}) = S(\mathfrak{M})$. *Qu. e. d.*

Megjegyzés. Ha az 1. tételben $\mathfrak{M} = \mathfrak{I}$, akkor a II. tétel szerint összegül az $\mathfrak{I} - \mathfrak{M}$ tenzort adó levont diadok vektorai biortogonálisak, így $\mathfrak{I} - \mathfrak{M}$ és vele együtt $\mathfrak{I} - (\mathfrak{I} - \mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ projektor.

Alkalmazások

a) Lineáris egyenletrendszer megoldása

Csak homogén egyenletrendszerrel kell foglalkozni [1]. A $\mathbf{B}x = \mathbf{o}$ egyenletrendszer megoldásához a $\mathbf{B}$ matrixú tenzor nullalterét keressük. Az 1. tétel alapján az $\mathbf{E}$ egységmatrixra (az $\mathfrak{I}$ tenzor matrixára) olyan rangcsökkentő algoritmust alkalmazunk, amelynél a segédvektorok rendre a $\mathbf{B}$ matrix sorai:

$v_i = \mathbf{e}_i \mathbf{B} = \mathbf{b}_i$. ($\mathbf{e}_i$ -vel ill. $\mathbf{e}_i^*$ -gal az $\mathbf{E}$ egységmatrix i -edik oszlopvektorát ill. sorvektorát jelöljük). Az egységmatrix helyett bármely nem szinguláris matrixból

is kiindulhatnak, így azonban kényelmesebb számolni. A megoldásvektorokat a maradékmatrix további — most már megkötés nélküli — diadfelbontásának oszlopvektorai adnák. Ezt a felbontást azonban már elkerülhetjük. Ha ugyanis az algoritmus y_i segédoszlopvektorait az e_i oszlopvektorok közül választjuk, akkor $e_i \in N(M)$ kapcsán $Me_i = 0$ tehát a maradékmatrixnak annyi 0 oszlopvektora lesz, amennyi a ranghiánya; a maradékmatrix többi oszlopvektorai adják a homogén egyenletrendszer megoldásrendszerét.

1. példa

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad Bx = 0; \quad x = ?$$

$$P_1 = E - \frac{Ee_1 b_1^* E}{b_1^* Ee_1} = E - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$b_2^* P_1 e_2 = 0$, ezért e_3 -at választjuk.

$$P_2 = P_1 - \frac{P_1 e_3 b_2^* P_1}{b_2^* P_1 e_3} = P_1 - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad P_3 = P_2 - \frac{P_2 e_2 b_3^* P_2}{b_3^* P_2 e_2} =$$

$$= P_2 - \frac{1}{(-2)} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} b_4^* P_3 = 0, \\ b_5^* P_3 = 0. \end{matrix}$$

Tehát $M = P_3$, a megoldás a P_3 matrix utolsó két oszlopvektorának lineáris kombinációja.

b) Egy nem szinguláris matrix inverzének kiszámítása

Nyilvánvaló, hogy ha a nem szinguláris, n -dimenziós C matrixszal a

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & & \\ & C & & & -1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -1 \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ 0 & & & & & & 0 \end{array} \right]$$

matrixú egyenletrendszerre alkalmazzuk az a)-ban leírt algoritmust, — ügyelve arra, hogy a $2n$ -dimenziós egység-matrixnak csak az első n oszlopából válasszuk a segédoszlopvektorokat, akkor maradékmatrixként a következőt kapjuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} & 0 & & C^{-1} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{array} \right]$$

c) Minimálpolinom meghatározása

Az A -matrixú tenzor minimálpolinomjának meghatározására KRÜLOV módszerét [3], [4] használva, képezzük eléggé általános kezdő z oszlopvektorral a (balról jobbra haladva) $z, Az, A^2z, \dots, A^n z$ oszlopvektorú, alulról o sorvektorral kiegészített $n+1$ -dimenziós B matrixot. Mint ismeretes, a minimálpolinom együtthatóit a $Bx=o$ egyenletrendszer azon megoldáoszlopvektora adja, amelynek utolsó komponensei közül legtöbb a 0, és utolsó nem 0 komponense 1. Ha tehát a B matrixra az a)-ban leírt algoritmust alkalmazzuk — ügyelve arra, hogy a választható e_i oszlopvektorok közül mindig a legkisebb indexűt válasszuk segédoszlopvektoroknak —, akkor a maradékmatrix első nem o oszlopvektora adja a minimálpolinom együtthatóit.

2. példa. Meghatározandó az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -28 & -43 & 59 & 12 \\ 2 & -17 & -26 & 34 & 8 \\ -1 & -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & -16 & 23 & 4 \\ 1 & 6 & 11 & -16 & -1 \end{bmatrix} \text{ matrixú tenzor}$$

minimálpolinomja!

A Krülov-módszer kiindulási vektorául a $\mathbf{z}^* = [1, 1, 1, 1, 1]$ z oszlopvektorát választva a $\mathbf{B}$ matrix:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & 16 \\ 1 & 1 & 3 & 7 & 13 & 21 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -5 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
 & \mathbf{P}_1 = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E}\mathbf{e}_1\mathbf{b}_1^*\mathbf{E}}{\mathbf{b}_1^*\mathbf{E}\mathbf{e}_1} = \mathbf{E} - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & 16 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & -7 & -11 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 - \frac{\mathbf{P}_1\mathbf{e}_2\mathbf{b}_2^*\mathbf{P}_1}{\mathbf{b}_2^*\mathbf{P}_1\mathbf{e}_2} = \\
 & = \mathbf{P}_1 - \frac{1}{(-1)} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -7 & -15 & -26 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
 & \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 - \frac{\mathbf{P}_2\mathbf{e}_3\mathbf{b}_3^*\mathbf{P}_2}{\mathbf{b}_3^*\mathbf{P}_2\mathbf{e}_3} = \mathbf{P}_2 - \frac{1}{(-3)} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -9 & -18 & -30 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} & \mathbf{b}_4^*\mathbf{P}_3 = 0, \\ & \mathbf{b}_5^*\mathbf{P}_3 = 0, \\ & \mathbf{b}_6^*\mathbf{P}_3 = 0. \end{aligned} \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}_3.
 \end{aligned}$$

Tehát a minimálpolinom: $-1 + 3\lambda - 3\lambda^2 + \lambda^3 = (\lambda - 1)^3$.

3. példa. Meghatározandó az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrixú tenzor minimálpolinomja!

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -10 & -20 \\ 1 & 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E} \mathbf{e}_1 \mathbf{b}_1^* \mathbf{E}}{\mathbf{b}_1^* \mathbf{E}_1 \mathbf{e}_1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 - \frac{\mathbf{P}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{b}_2^* \mathbf{P}_1}{\mathbf{b}_2^* \mathbf{P}_1 \mathbf{e}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{b}_3^* \mathbf{P}_2 \mathbf{e}_3 = 0$, ezért $\mathbf{e}_3$ helyett $\mathbf{e}_4$ -et választjuk:

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 - \frac{\mathbf{P}_2 \mathbf{e}_4 \mathbf{b}_3^* \mathbf{P}_2}{\mathbf{b}_3^* \mathbf{P}_2 \mathbf{e}_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & -44 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_3 - \frac{\mathbf{P}_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{b}_4^* \mathbf{P}_3}{\mathbf{b}_4^* \mathbf{P}_3 \mathbf{e}_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_5^* \mathbf{P}_4 = 0; \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}_4.$$

A minimálpolinom tehát $4 - 8\lambda + 8\lambda^2 - 4\lambda^3 + \lambda^4 = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$.

A második irányított algoritmus

2. TÉTEL. Ha a rangcsökkentő algoritmust egységtenzorra oly módon alkalmazzuk, hogy az η_i és ν_i segédvektorokra $\eta_i \in S(\mathfrak{B})$, $\nu_i \in S'(\mathfrak{B})$ legyen, és a $\mathfrak{B}$ tenzor redukált, akkor az $\mathfrak{M}$ maradék-projektorra a következők állnak fenn:

$$S(\mathfrak{M}) = N(\mathfrak{B}) \text{ és } S'(\mathfrak{M}) = N'(\mathfrak{B}).$$

Bizonyítás. Az 1. tételhez képest annyi az eltérés, hogy a segédvektorokat *mindkét oldalon* a leírt módon vesszük fel, és így a maradéktenzorra kapott összefüggés is *mindkét oldalra* fennáll, feltéve, hogy a $\mathfrak{B}$ tenzor redukált. Ha ugyanis a $\mathfrak{B}$ tenzor nem lenne redukált, akkor az

$$S(\mathfrak{B}) \cap N(\mathfrak{B}) = K(\mathfrak{B}), \quad S'(\mathfrak{B}) \cap N'(\mathfrak{B}) = K'(\mathfrak{B})$$

$$S(\mathfrak{B}) \setminus K(\mathfrak{B}) = S_1(\mathfrak{B}) \quad \text{és} \quad S'(\mathfrak{B}) \setminus K'(\mathfrak{B}) = S'_1(\mathfrak{B})$$

jelölésekkel az algoritmust először az $\eta_i \in S_1(\mathfrak{B})$, $v_i \in S'_1(\mathfrak{B})$ segédvektorokkal hajtva végre az $S_1(\mathfrak{B})$ dimenziószámával egyenlő $k-1$ -számú diad levonása után a $\mathfrak{B}_{k-1}$ projektort kapjuk, és az $\eta_k \in K(\mathfrak{B})$, $v_k \in K'(\mathfrak{B})$ segédvektorokkal már nem tudnánk folytatni az algoritmust, mert $\eta_k \perp v_k$;

$$\eta_k \in K(\mathfrak{B}) \subset N(\mathfrak{B}) \perp S'_1(\mathfrak{B}) = N'(\mathfrak{B}_{k-1}),$$

és így

$$\eta_k \in S(\mathfrak{B}_{k-1}), \quad \mathfrak{B}_{k-1} \eta_k = \eta_k,$$

tehát $v_k \mathfrak{B}_{k-1} \eta_k = v_k \eta_k = 0$, a nevező 0-vá válna. *Qu. e. d.*

Megjegyzés. A bizonyításból következik, hogy a 2. tétel szerinti algoritmus alkalmas annak eldöntésére, hogy a $\mathfrak{B}$ tenzor redukált-e: ha az algoritmus úgy szakad meg, hogy *csak a nevezőbe* kerülne 0, akkor a $\mathfrak{B}$ tenzor *nem redukált*.

Alkalmazás

A tér felbontása az $\mathfrak{A}$ tenzor sajátértékeihez tartozó bal és jobb oldali invariáns alterekre.

Az $\mathfrak{A}$ tenzor λ_i sajátértékéhez tartozó invariáns alterek:

$$N[(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{I})^{s_i}] \quad \text{és} \quad N'[(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{I})^{s_i}],$$

ahol s_i az $\mathfrak{A}$ tenzor minimálpolinomjában a λ_i sajátértékhez tartozó kitevő. Az $(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{I})^{s_i}$ tenzor *redukált*, mert a λ_i -hez tartozó minden fővektort megsemmisít, a $\lambda_j \neq \lambda_i$ sajátértékhez tartozókat pedig az

$$(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{I})^{s_i} = [(\mathfrak{A} - \lambda_j \mathfrak{I}) + (\lambda_j - \lambda_i) \mathfrak{I}]^{s_i}$$

összefüggésnek a binominális tétellel kifejtett alakja kapcsán ugyanazon sajátértékhez tartozókba viszi át; így

$$N[(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{I})^{s_i}] \cap S[(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{I})^{s_i}] = 0.$$

Tehát a 2. tételt az $(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{I})^{s_i}$ tenzorra alkalmazva a kapott $\mathfrak{M}_i$ projektor szorzatalterei éppen a keresett invariáns alterek. A számítás lerövidíthető, ha az algoritmust $\mathfrak{M}_2$ meghatározásától kezdve nem az egységtenzorral, hanem az $\mathfrak{I} - \sum_{p=1}^{i-1} \mathfrak{M}_p$

tenzorral kezdjük. Erre a lehetőséget a $\sum \mathfrak{M}_i = \mathfrak{I}$ összefüggés fennállása és a III. tétel adja meg.

4. példa. Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 21 & 37 & -54 & -6 \\ 2 & 15 & 26 & -40 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 12 & -16 & -2 \\ 1 & 4 & 7 & -11 & -1 \end{bmatrix}$$

matrixú tenzor sajátértékeihez tartozó invariáns altereket! A tenzor minimálpolinomja — a számítást mellőzve —:

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

$$\lambda_1 = 1, \quad s_1 = 2;$$

$$B = (A - E)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -87 & -144 & 201 & 30 \\ 0 & -58 & -96 & 134 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -29 & -48 & 67 & 10 \\ 0 & -8 & -12 & 16 & 4 \end{bmatrix};$$

A $Be_i = c_i$ és $e_i^* B = b_i$ jelöléssel

$$P_1 = E - \frac{Ec_5 b_5^* E}{b_5^* Ec_5} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 30 & 45 & -60 & -15 \\ 0 & 22 & 30 & -40 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & -18 & -5 \\ 0 & 4 & 6 & -8 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_2 = P_1 - \frac{P_1 c_2 b_4^* P_1}{b_4^* P_1 c_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_2 c_1 = 0, \quad P_2 c_4 = 0,$$

$$P_2 c_3 = 0, \quad \text{Tehát } M_1 = P_2.$$

$\lambda_2 = -1$, $s_2 = 1$; most tehát

$$B = A + E = \begin{bmatrix} 3 & 21 & 37 & -54 & -6 \\ 2 & 16 & 26 & -40 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 12 & -15 & -2 \\ 1 & 4 & 7 & -11 & 0 \end{bmatrix};$$

$$E - M_1 = P_3 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$P_4 = P_3 - \frac{P_3 c_2 b_4^* P_3}{b_4^* P_3 c_2} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 18 & -24 & -6 \\ 0 & 8 & 12 & -16 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} P_4 c_1 &= 0, \\ P_4 c_3 &= 0, \\ P_4 c_4 &= 0, \\ P_4 c_5 &= 0. \end{aligned} \quad \text{Így} \quad M_2 = P_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -2.$$

$$M_3 = E - M_1 - M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -15 & -24 & 33 & 6 \\ 0 & -10 & -16 & 22 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 & -8 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$

Tehát a λ_2 és λ_3 sajátértékhez egy-egy sajátvektorpár tartozik, a λ_1 sajátértékhez tartozó, M_1 -gyel jellemzett altér pedig többdimenziós. (Ennek az altérnek további felbontásával a 6. példában foglalkozunk.)

A harmadik irányított algoritmus

3. TÉTEL. Legyen $\tilde{f}_i$ ill. h_i az $\mathfrak{A}$ tenzor λ sajátértékéhez tartozó jobb oldali ill. bal oldali k -hosszúságú fővektorláncának $[8]$ i -edrendű fővektora, és $\mathfrak{P}$ oly projektor, amelyre $\tilde{f}_i \in S(\mathfrak{P})$ és $h_i \in S'(\mathfrak{P})$; ($i = 1, 2, \dots, k$). Ha a $\mathfrak{P}$ projektorra olyan rangcsökkentő algoritmust alkalmazunk, amelynek y_i és v_i segédvektoraira $v_i = \tilde{f}_{k+1-i}$

és $v_i = h_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$), akkor a levont diadok jobb oldali vektorai megegyeznek a felvett $\tilde{f}_{k+1-i}$ fővektorokkal, bal oldali vektorai pedig a h_i fővektorok által generált altérbe eső, az $\tilde{f}_{k+1-i}$ jobb oldali fővektorokkal biortogonális rendszert alkotó h'_i bal oldali fővektorok.

Bizonyítás. Minthogy $h_i \mathfrak{P} = h_i$, a $h'_1, h'_2, h'_3, \dots$ egymás utáni képzése alapján világos, hogy ezek a h_i vektorok lineáris kombinációi. Továbbá, ha az algoritmust tetszőleges segédvektorokkal továbbfolytatnánk, akkor a $\mathfrak{P}$ projektor II. tétel szerinti felbontásához jutnánk; így a felbontás bármely része is (nem teljes) reciprok rendszer, az egyes lépéseknél kapott tenzorok pedig projektorok. Másrészt a fővektorlánc képzése szerint

$$\tilde{f}_{k-m} = (\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{B})^m \tilde{f}_k \quad \text{és} \quad h_p = h_k (\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{B})^{k-p}$$

$$(p = 1, 2, \dots, m),$$

tehát

$$h_p \tilde{f}_{k-m} = h_k (\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{B})^{k+m-p} \tilde{f}_k = 0.$$

Így $\tilde{f}_{k-m} \perp h_1, h_2, \dots, h_m$. Az m lépés után kapott P_m projektorra az I. tétel következményében leírtak alapján $N'(\mathfrak{P}_m) = N'(\mathfrak{P}) \cup H_m$, ahol H_m a $h_1, h_2, \dots, h_m$ vektorok által generált altér. Minthogy

$$\tilde{f}_{k-m} \subset S(\mathfrak{P}) \perp N'(\mathfrak{P}) \quad \text{és} \quad \tilde{f}_{k-m} \perp H_m,$$

azért

$$\tilde{f}_{k-m} \perp N'(\mathfrak{P}_m), \quad \text{tehát} \quad \tilde{f}_{k-m} \subset S(\mathfrak{P}_m),$$

$\mathfrak{P}_m \tilde{f}_{k-m} = \tilde{f}_{k-m}$, a jobb oldali fővektorok változatlanul kerülnek be az algoritmus diadjaiba. *Qu. e. d.*

Alkalmazás

Az $\mathfrak{A}$ tenzor Jordan-transzformációjának kiszámítása. Legyen $\mathfrak{M}$ olyan projektor, amelyre

$$S(\mathfrak{M}) = N[(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{B})^s]$$

$$S'(\mathfrak{M}) = N'[(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{B})^s],$$

ahol s a λ sajátértékhez tartozó minimálpolinomkitevő. (Vö. a 2. tétel alkalmazásával.) Az $\mathfrak{M}$ szorzataltéréből olyan vektorpárt választunk ki, amelyeket $(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{B})^{s-1}$ nem semmisít meg. Ezekből az s -edrendű fővektorokból $\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{B}$ -vel való beszorzásokkal kiszámítjuk az s hosszúságú jobb és bal oldali fővektorláncot és $\mathfrak{M}$ kiindulási tenzorral alkalmazzuk a 3. tételt. Ezután a maradék projektorral és annak szorzataltérében levő leghosszabb jobb és bal oldali fővektorláncsal ismét elvégezzük a számítást stb. Végül a maradék projektor $\mathfrak{D}$ lesz, több fővektorlánc nincs. A kapott biortogonális fővektorrendszer (egy adott bázisban) az egyik lehetséges keresett transzformációs matrixot adja.

5. példa. Számítsuk ki a 2. példában megadott tenzor *Jordan*-transzformációját! A 2. példa szerint a minimálpolinom: $(\lambda - 1)^3$. Egyetlen sajátérték van, tehát $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{J}$.

$$A - E = \begin{bmatrix} 1 & -28 & -43 & 59 & 12 \\ 2 & -18 & -26 & 34 & 8 \\ -1 & -1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & -16 & 22 & 4 \\ 1 & 6 & 11 & -16 & -2 \end{bmatrix};$$

$$y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad y_2 = (A - E)y_3 = \begin{bmatrix} -28 \\ -18 \\ -1 \\ -10 \\ 6 \end{bmatrix}; \quad y_1 = (A - E)y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$v_3^* = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0];$$

$$v_2^* = v_3^*(A - E) = [-1 \quad -1 \quad -3 \quad 5 \quad 0];$$

$$v_1^* = v_2^*(A - E) = [0 \quad -1 \quad -2 \quad 2 \quad 0];$$

$$P_1 = E - \frac{E y_3 v_1^* E}{v_1^* E y_3} = E + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$P_2 = P_1 - \frac{P_1 y_2 v_2^* P_1}{v_2^* P_1 y_2} = P_1 - \frac{y_2 v_2^* P_1}{v_2^* y_2} = P_1 + \begin{bmatrix} -28 \\ -18 \\ -1 \\ -10 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 29 & 0 & 28 & -84 & 0 \\ 18 & 0 & 16 & -52 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & -29 & 0 \\ -6 & 0 & -6 & 18 & 1 \end{bmatrix};$$

$$P_3 = P_2 - \frac{y_1 v_3^* P_2}{v_3^* y_1} = P_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 30 & -87 & 0 \\ 20 & 0 & 20 & -58 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & -29 & 0 \\ -5 & 0 & -4 & 15 & 1 \end{bmatrix};$$

$$z_2 = P_3 e_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad z_1 = (A - E) z_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$w_2^* = [10 \quad 0 \quad 10 \quad -29 \quad 0]$$

$$w_1^* = w_2^* (A - E) = [0 \quad 0 \quad 4 \quad 2 \quad 4].$$

A második fővektorlánc kettőnél nem lehet hosszabb, mert az összes dimenziószám öt.

$$P_4 = P_3 - \frac{z_2 w_1^* P_3}{w_1^* z_2} = P_3 - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 60 & 0 & 60 & -174 & 0 \\ 40 & 0 & 40 & -116 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 20 & -58 & 0 \\ -10 & 0 & -10 & 29 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_5 = P_4 - \frac{z_1 w_2^* P_4}{w_2^* z_1} = P_4 - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 10 & -29 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{O}.$$

Tehát egy hármas és egy kettes hosszúságú fővektorlánc van. Így

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -28 & -43 & 59 & 12 \\ 2 & -17 & -26 & 34 & 8 \\ -1 & -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & -16 & 23 & 4 \\ 1 & 6 & 11 & -16 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -28 & 0 & 12 & 0 \\ 2 & -18 & 1 & 8 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -8 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -8 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & -29 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

6. *példa.* Fejezzük be a 4. példában megadott tenzor Jordan-transzformációját! A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó projektormatrix:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}; \quad A - E = \begin{bmatrix} 1 & 21 & 37 & -54 & -6 \\ 2 & 14 & 26 & -40 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 12 & -17 & -2 \\ 1 & 4 & 7 & -11 & -2 \end{bmatrix};$$

$$s_1 = 2; \quad y_2 = M_1 e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad y_1 = (A - E)y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$v_2^* = e_5^* M_1 = [0 \quad 2 \quad 3 \quad -4 \quad 0],$$

$$v_1^* = v_2^* (A - E) = [1 \quad 0 \quad 1 \quad -3 \quad 0].$$

$$P_4 = M_1 - \frac{y_2 v_1^* M_1}{v_1^* y_2} = M_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 1 \quad -3 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_5 = P_4 - \frac{y_1 v_2^* P_4}{v_2^* y_1},$$

$$P_5 = P_4 - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \quad 2 \quad 3 \quad -4 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 2 \quad -2 \quad 0]$$

Tehát M_1 egy kettes és egy egyes hosszúságú fővektorláncot tartalmaz. Így — felhasználva a 4. példa eredményeit is —

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 21 & 37 & -54 & -6 \\ 2 & 15 & 26 & -40 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 12 & -16 & -2 \\ 1 & 4 & 7 & -11 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -5 & -8 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

IRODALOM

- [1] EGERVÁRY J.: Matrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldására, *MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* II. kötet 1953.
- [2] J. EGERVÁRY: Über eine konstruktive Methode zur Reduktion einer Matrix auf die Jordan'sche Normalform, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*. 10 (1959) FASC. 1—2.
- [3] D. K. FADDEEV—V. N. FADDEEVA: *Vücsiszlitelnüje metodü linejnoj algebrü*, Moszkva—Lenin-grád, 1963.
- [4] F. R. GANTMACHER: *Teorija matricü*, Moszkva, 1954.
- [5] I. M. GELFAND: *Lekcii po linejnoj algebre*, Moszkva, 1951.
- [6] P. R. HALMOS: *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Princeton.
- [7] J. A. SCHONTEN: *Ricci-Calculus*, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954.
- [8] R. ZURMÜHL: *Matrizen*. (Eine Darstellung für Ingenieure.) Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958.

(Becérkezett: 1967. III. 27)

THE DEVELOPEMENT OF EGERVÁRY'S RANK-DIMINISHING OPERATIONS

BY GY. TEVAN

Summary

The present paper deals with a developement of Egerváry's rank-diminishing method by the suitable taking of the helpvectors. Thus simple methods are obtained to solve linear equations-systems and to determine the minimal-polynom and the Jordantransformation of a matrix.