RELAXÁCIÓS PONTELHELYEZÉSI ELJÁRÁSOK VIZSGÁLATA DISZKRÉT GEOMETRIAI SZEMPONTBÓL

Írta: RUDA MIHÁLY

Bevezetés

A diszkrét geometriában gyakran fordul elő olyan feladat, hogy adott (n) számú pontot kell egy alakzaton úgy elhelyezni, hogy a pontok egymástól mért távolságainak a minimuma a lehető legnagyobb legyen. (Egy ilyen pontelrendezést extremális rendszernek nevezünk.)

A fenti problémára még olyan aránylag egyszerű alakzat esetén — mint egy gömbfelület — sem ismeretes tetszőleges n-re általános megoldás. Néhány extremális elrendezést ismerünk kis pontszámra, illetve aszimptotikusan végtelen nagy n esetére vannak becslések.[1] Így magától merül fel a kérdés, hogy vajon van-e egységes eljárás extremális pontrendszerek meghatározására. Olyan algoritmusok vizsgálata volt a célunk, amelyektől remélhettük, hogy maximumot vagy legalábbis lokális maximumot szolgáltatnak a pontok közti távolságok minimumára. Ebben a cikkben néhány relaxációs eljárást[2] tettünk vizsgálat tárgyává ilyen szempontból. Az itt vizsgált eljárások azonban nem minden esetben vezetnek abszolút vagy lokális szélsőértékhez.

Megjegyezhető, hogy a fenti probléma fő alkotórészei — az elhelyezendő elemek (pontok), a felület illetve az elemek elhelyezésére szolgáló alakzat (gömb), a távolságfogalom (a gömb két pontja közti, egy legrövidebb főkörív ívhossza) és az extremalitási kritérium (a pontpárok közti minimális távolság maximális volta) — mind természetes módon általánosíthatók. Így az érdekes rokon problémáknak gazdag sokaságát kaphatjuk; vizsgálhatjuk ponthalmazoknak más ponthalmazokban más metrika illetve más extremalitási kritériumok szerinti elhelyezéseit.

Ezekkel a problémákkal teljes általánosságban itt nem foglalkozunk, csupán néhány speciális eset relaxációs módszerekkel való megoldhatóságát vizsgáljuk meg. Megmaradunk pontok elhelyezésénél és annál az extremalitási kritériumnál, hogy a pontok egymástól mért távolságainak a minimuma a maximális értéket vegye fel; a pontok elhelyezésére azonban különböző tartományokat szerepeltetünk különféle metrikákkal.

A szerző köszönetét fejezi ki FEJES TÓTH LÁSZLÓ professzornak és HEPPES ALADÁRnak értékes tanácsaikért és támogatásukért.

Általános megjegyzések, egzisztencia, unicitás

Bevezetésképpen bemutatunk két példát a különböző metrikák szerepével kapcsolatban. Ezekből a példákból látható lesz az, hogy a metrika megválasztása lényegesen befolyásolhatja az eredményt.

[1] Ld. [2], [3] és [4].
[2] Ezekről ld. [1], [5].

1. Helyezzünk el n számú pontot egy euklideszi térben levő egyszerű íven extremálisan, ha *a)* két pont távolsága a görbének e pontok között levő darabjának az ívhossza, *b)* két pont távolsága ezeknek az euklideszi térbeli távolsága (1. ábra).

2. Helyezzünk el n számú pontot egy gömbfelület konkáv, zárt tartományában levő egyszerű íven extremálisan, ha két pont távolsága

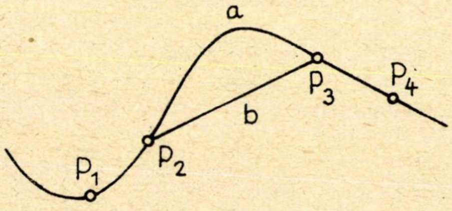
a) az euklideszi térbeli távolság,

b) a gömbi távolság (két pont közti egy legrövidebb főkörív hossza),

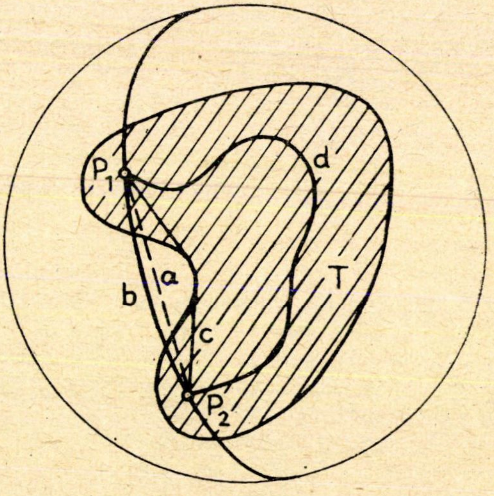
c) két pontot összekötő legrövidebb — az adott tartományban haladó — pálya ívhossza,

d) a két pontnak a tartományba írt görbén mért („belső") távolsága (2. ábra).

Más metrikák esetén más-más megoldások is felléphetnek (például, ha egy ellipszisen helyezünk el három pontot extremálisan az 1. példában bemutatott kétféle metrika szerint). Egyetlen metrika esetén is előfordulhat azonban több megoldás, de az is, hogy nem létezik extremális pontelrendezés. Az előzőre példa: egy körlapon helyezzünk el hat pontot úgy, hogy *a)* egy pont a kör középpontjában, a többi egy, a körbe írt szabályos ötszög csúcsain *b)* mind a hat egy, a körbe írt szabályos hatszög csúcsain heyezkedjék el. Mindkét esetben egy extremális elrendezésről van szó (a minimális távolság éppen a kör sugara), sőt az *a)* esetben tetszőleges sok különböző elrendezés is adható, hiszen nem szükséges, hogy a kerületen levő pontok pontosan egy szabályos ötszög csúcsain legyenek. Arra az esetre, amikor nem létezik megoldás, példa egy korlátos nyílt intervallumon két pont extremális elhelyezése az egyenes szokásos metrikája szerint (megjegyezzük, hogy példánkban létezik ugyan a minimális távolság felső határa, de ezt az értéket az adott tartományon belül soha semmilyen pontelrendezés nem veheti fel). Így tehát általánosságban sem egzisztencia, sem unicitási tétel nem mondható ki. Elég tág körben azonban igaz egy egzisztencia tétel:



1. ábra



2. ábra

Egy teljes, metrikus tér korlátos, zárt részhalmazán mindig létezik extremális pontrendszer.

Tekintsük ugyanis az adott részhalmazon az összes — n pontból álló — pontrendszert. Ezek mindegyikéhez tartozik egy minimális távolság. Az így adódó minimális távolságok által alkotott számhalmaz korlátos (az alakzat korlátossága miatt), létezik tehát felső határa, és így tartalmaz egy, a felső határhoz konvergáló sorozatot is. Tekintsük a pontrendszereknek ehhez a konvergens számsorozathoz tartozó sorozatát. Válasszunk ki a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokból álló rendszerek mindegyikéből egy P_i pontot. A részhalmaz korlátossága miatt a P_i pontok sorozatából kiválasztható egy konvergens részsorozat. Ezután csak az ehhez a konvergens részsorozathoz tartozó pontrendszereket nézzük! Végigmenve így mind az n ponton, végül egy olyan pontrendszersorozatot kapunk, amelynek minden pontja konvergens sorozatot ad. Ezek a teljesség miatt egy, az adott metrikus térhez tartozó pontrendszert határoznak meg határértékként. Ebben a rendszerben a pontok közti, minimális távolság szintén határérték (a metrikus tér ún. háromszögaxiómája miatt), de mivel a fentiek szerint a minimális távolság határértéke most éppen a felső határ, ezért éppen egy extremális rendszert kaptunk, amely az alakzat zártsága miatt hozzátartozik az alakzathoz.

Könnyű belátni, hogy a fenti feltételek nem szükségesek, de nyilván adható példa olyan esetre is, amikor ezek a feltételek nem teljesülnek és extremális pontrendszer sem létezik. Euklideszi térben levő nyílt halmazokon pl. nincs extremális elrendezés, hiszen bármely pontrendszer egy megfelelő pontból kivetítve, valamilyen értékkel nagyítható a nyílt halmazon belül. Általában metrikus terekben ez már nem mondható ki ilyen általánosan. Tekintsük ugyanis például egy gömbfelület nyílt tartományát, amely tartalmazza a gömbfelület egyik felét! Ez egy metrikus térben levő korlátos nyílt halmaz (távolságként a gömbi távolságot vesszük), mégsem mondható, hogy nem létezhet rajta extremális rendszer, hiszen három pontot el tudunk rajta helyezni extremálisan (egy főkörbe írt szabályos háromszög csúcsain). Ha viszont az adott R metrikus tér kölcsönösen egyértelműen leképezhető egy euklideszi térre, és az R tér minden R_1, R_2, R_3, R_4 pontjára igaz, hogy $\varrho(R_1, R_2) > \varrho(R_3, R_4)$ ha $\varrho(P_1, P_2)$ is nagyobb, mint $\varrho(P_3, P_4)$, ahol P_1, P_2, P_3, P_4 az R_1, R_2, R_3, R_4 euklideszi térbeli képei, akkor az euklideszi térre vonatkozó vetítéses eljárás megfelelője itt is véghezvihető, tehát az R metrikus tér egy korlátos, nyílt részhalmazán szintén nem létezhet extremális pontrendszer.

Ezek után rátérünk cikkünk tulajdonképpeni tárgyára.

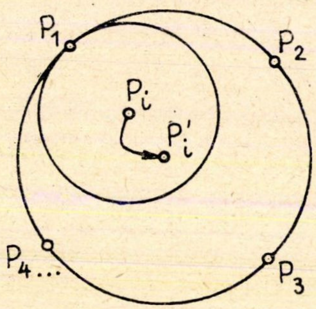
Relaxációs eljárások

Gyakorlati szempontból a fenti egzisztencia és unicitási problémákon kívül az is érdeklődésre tarthat számot, hogy ha léteznek extremális elrendezések, akkor azok milyenek, illetve hogyan állíthatók elő. A bevezetésben említett relaxációs eljárásokkal próbáltuk megoldani ezt a problémát. Egy ilyen eljárás úgy képzelhető el, hogy — a lineáris egyenletrendszerek egy közelítő megoldásához hasonlóan — egy tetszőleges elrendezésből kiindulva, a pontokat valamilyen meghatározott rendszer szerint úgy mozgatjuk, hogy lépésenként mindig közelebb kerülünk (de legalábbis nem távolodunk) a kívánt helyzethez. Így, mivel a kívánt — extremális — helyzet éppen olyan, hogy a pontok egymástól a lehető legtávolabb vannak, az eljárásokat is úgy választjuk meg, hogy az egyes lépések után a pontok közti távolságok lehetőleg nőjenek. Ezen az alapon a következő relaxációs módszereket vizsgáltuk meg:

I. Egyenként mozgatjuk a pontokat $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ egy előre meghatározott ciklikus sorrend szerint úgy, hogy az éppen elmozdított P_i pont a lehető legtávolabb kerüljön a hozzá legközelebbi pontoktól (vagyis, hogy a P_iP_j, $i \neq j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ távolságok minimuma a legnagyobbra nőjön). Ha a P_iP_j távolságok minimumát a P_i bármilyen áthelyezésével sem tudjuk növelni, akkor a P_i pont az eredeti helyén marad. Ha elérkezünk az n-edik ponthoz, akkor folytatjuk az eljárást a sorrend szerinti első ponttal.

II. Az előzővel azonos módon mozgatjuk az egyes pontokat, de nem egy rögzített sorrend szerint, hanem mindig egy olyan P_i pontot mozgatunk, amelyre a min $|P_iP_j|$ $(j=1, 2, ..., i-1, i+1, ..., n)$ a legkisebb.

III. Az I. eljáráshoz hasonlóan, ciklikus sorrend szerint mozgatjuk a pontokat, de úgy, hogy a soron következő P_i pont elmozgatásával a P_iP_j távolságok minimuma szigorúan monoton nőjön, miközben a P_i pont egy folytonos görbe mentén mozog az adott alakzaton (ld. pl. a 3. ábrán). Például, ha az alakzat egy egyszerű görbe és a pontok távolságának a köztük levő ívhosszat tekintjük, akkor ez az eljárás azt jelenti, hogy a pontok sorrendje nem változik, és az elmozdított P_i pont mindig a szomszédos pontok által meghatározott (P_kP_l) ív közepére kerül; illetve nyílt görbéknél esetleg az egyik végpontba.



3. ábra

Nézzük most meg, hogy mikor alkalmazhatók eredményesen a fenti eljárások.

Először is az a kérdés merül fel, hogy a fenti eljárások egyáltalán konvergensek-e. (Hiszen ha nem konvergálnak, akkor nem is remélhető, hogy egy meghatározott pontrendszerhez vezessenek.)

Gyakorlati szempontból az lenne a legjobb, ha véges sok lépésben véget érnének eljárásaink. Ha a pontok elhelyezésére szolgáló alakzat véges sok pontból áll, akkor nyilván teljesül ez. Végtelen sok pontból álló alakzat esetén viszont általában már nem. Például, ha egy körön akarunk — egy tetszőleges helyzetből kiindulva — három pontot extremálisan elhelyezni, akkor csak végtelen sok lépésben juthatunk el általában ehhez. (Ugyanez a helyzet többnyire nyílt vagy zárt görbén háromnál több pont esetén.) Ekkor, ha az eljárás közben az alakzatnak (kör) az egyes pontok által elfoglalt helyeit (pontjait) kiválasztjuk (megtartva az eredeti metrikát), egy megszámlálható sok pontból álló alakzatot is kapunk, ahol szintén végtelen sok lépésből állnak eljárásaink.

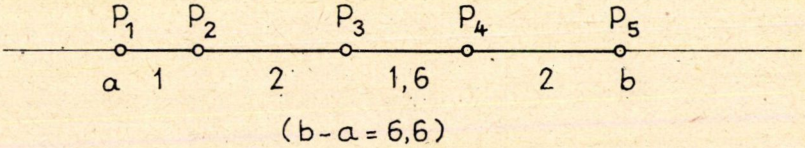
Természetesen olyan folytonos alakzat is adható, ahol véges sok lépésből áll az adott eljárások mindegyike. Így pl. ha egy szakaszon vagy egy háromszögön helyezünk el háromnál nem több pontot. Viszont hasonlóan egyszerű sokszögeknél (egy négyszögön négy pont stb.) már végtelen sok lépés is lehetséges.

Ezek után kérdéses tehát az, hogy eljárásaink végtelen sok lépés esetén egy konvergáló pontrendszersorozatot adnak-e vagy nem. Elképzelhető ugyanis (főleg ha általában a metrikus tereket tekintjük), hogy az adott alakzaton pontrendszerünk egy ilyen eljárás során állandóan mozog; mégpedig vagy úgy, hogy az egyes lépések nagysága 0-hoz tart, de az elmozdulások összege divergens sor, vagy úgy, hogy az egyes lépések nagysága sem tart 0-hoz.

A továbbiakban tárgyalt esetek olyanok, hogy a konvergencia teljesülése belátható, így csupán szélsőérték szempontjából vizsgáljuk eljárásainkat.

Érdekes, hogy a II. eljárás már olyan esetben sem vezet a kívánt eredményre, amikor például egy egyenes szakaszon (egy [a, b] zárt intervallumon) akarunk öt pontot extremális módon elhelyezni, a 4. ábra szerinti helyzetből kiindulva. (A pontok távolsága az egyenes szokásos metrikája szerint veendő.)

Látható, hogy itt a II. eljárást alkalmazva, a pontrendszer egy olyan elrendezéshez konvergál, ahol a pontok közti távolságok balról jobbra rendre 1,5333...; 1,5333...; 1,5333...; 2, az extremális elrendezésnél viszont minden távolság egyenlő (1,65) lenne.



4. ábra

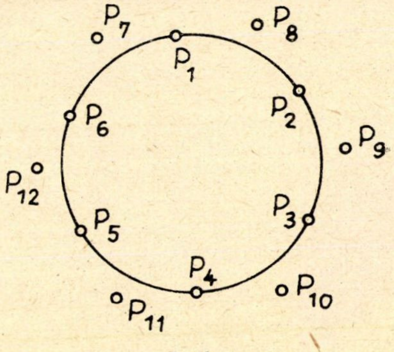
Ilyen esetekben az I. és a III. eljárások — a későbbiekben láthatóan — eredményesek, viszont ahol az általunk adott példákban ezek (I. és III.) nem vezetnek eredményre, ott a II. eljárás sem ad exrtemális rendszert. Ezért a továbbiakban ezzel az eljárással nem foglalkozunk.

Vegyük sorra most a másik két (I., III.) eljárást. Álljon először a pontok elhelyézésére szolgáló alakzat véges sok m pontból; ezen helyezzük el a $P_1, P_2, ..., P_n$ pontokat.

Ha $m \leqq n$, akkor a probléma triviális; $m < n$ esetén az alakzat legalább egy pontjába kerül legalább két különböző (P_i, P_j) pont, így a minimális távolság mindig nulla; $m = n$ esetében minden pontba pontosan egy pont jut.

Ha $m > n$, akko $\binom{m}{n}$ lehetséges elrendezés közül kell egy extremálisat kiválasztani.

Ebben az esetben az I. és a III. eljárás nem mindig vezet extremális rendszerhez. Ezt mutatja az 5. ábrán látható példa is. Az 5. ábrán levő alakzat síkbeli. A távolságot a sík szokásos metrikája szerint értelmezzük. Az alakzat 12 pontból áll. $(P_1, P_2, ..., P_{12})$. Ezen kell elhelyezni hat pontot. Legyenek $P_1, P_2, ..., P_6$ egy szabályos hatszög csúcsai, $P_7, P_8, ..., P_{12}$ pedig e köré a hatszög köré írt körön kívül úgy, hogy $P_1P_2 = P_2P_3 = ... = P_6P_1 > P_2P_9, P_9P_3, ...$ stb. és $P_7P_8, P_8P_9, ..., P_{12}P_7 > P_1P_2 ...$.



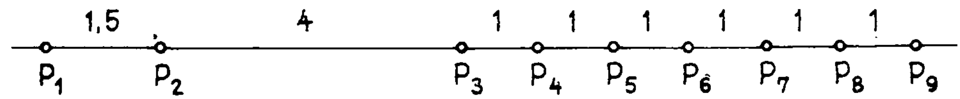
5. ábra

Ha a hat pontot $P_1, P_2, ..., P_6$-ba helyezzük, akkor a fenti eljrások szerint egyetlen pont sem mozdítható el, de az elrendezés nem extremális, hiszen a $P_7, P_8, ... P_{12}$ elrendezés „jobb" nála.

Adható ilyen példa egy egyenesen levő pontokból álló alakzat esetére is (6. ábra). Az alakzat a $P_1, P_2, ..., P_9$ pont, ezen helyezünk el öt pontot. Kiindulási helyzet a P_1, P_2, P_3, P_6, P_9; itt a minimális távolság 1,5 és ez egyik pont áthelyezésével sem nőhet, de a P_2, P_3, P_5, P_7, P_9 elrendezésnél a minimális távolság 2.

Véges sok pontból álló alakzatok után érdekes lenne megszámlálható sok pontból álló halmazokon is vizsgálni eljárásaink eredményességét. Ezzel itt nem foglalkozunk, hanem rögtön rátérünk „folytonos" alakzatok vizsgálatára.

Kontinuum számosságú ponthalmazok közül először tekintsük az egyszerű térgörbéket (ezek euklideszi térbeli korlátos, zárt halmazok) — amelyek kör vagy zárt intervallum topologikus képei — az előbbieket zárt, az utóbbiakat nyílt görbének nevezzük.



6. ábra

Eljárásaink szempontjából lényeges, hogy az elhelyezendő pontok távolságaként a két pont közti ív hosszát (belső metrika) vagy a két pontot összekötő húr hosszát (külső metrika) tekintjük-e.

Ha a távolságot belső metrika szerint mérjük és a pontokat zárt görbén helyezzük el, akkor az I. és III. eljárás egy extremális rendszerhez vezet.[3]

Ez az állítás a következő lépésekben látható be:

1. Nyilvánvaló (az adott definíciók szerint), hogy eljrásainkat (zárt görbe és belső metrika esetén) alkalmazva a szomszédos pontok közti távolságok maximuma nem nőhet.

2. Az I. eljárást alkalmazva elég sok lépés után a pontok sorrendje már nem változhat. Jelöljük ugyanis minden szóbakerülő lépésnél a maximális intervallum hosszát (két szomszédos pont közti távolságok maximumát) d-vel. Ekkor igaz, hogy:

a) Az I. eljárás egy lépése után az éppen elmozdított P_i pont $d/2$ sugarú nyílt környezetében nem lehet a rendszernek egyetlen más pontja sem. (Mivel P_i mindig olyan helyre lép, ahol maximális távolságban vannak a legközelebbi pontok.)

b) Ahhoz, hogy egy pont kilépjen a szomszédos pontjai által meghatározott ívből, ahhoz a szomszédos pontok legalább egyikének $d/2$-nél közelebb kell lennie hozzá. Viszont amikor már minden pont legalább egyszer sorra került — az első n lépés után ez bekövetkezik (n a pontok száma) — elmondható, hogy nincs olyan pont, melynek $d/2$ sugarú nyílt környezetében más pont is van, mert ha volnának ilyen pontok, akkor ezek közül legalábbis a sorrend szerint utolsó pont nem az *a)*-ban leírt módon viselkedne — a legutolsó rá vonatkozó lépésnél (figyelembe véve d monoton fogyását).

c) Az I. eljárásnál tehát már az első n lépés után sem változik a pontok sorrendje — ugyanúgy, mint a III. eljárásnál.

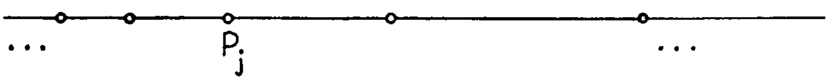
Megjegyzés: Nyílt görbe esetén a III. eljárásnál a szélső pontok rögtön a görbe végpontjaiba lépnek, így ez az eset azonos lesz a zárt görbe esetével. Az I. eljárásnál nem tudjuk, hogy a szélső pontok hogyan viselkednek, tehát erre az esetre — hacsak nem rögzítünk egy-egy pontot a végpontokban — nem vonatkozik a bizonyítás.

Ezt a megjegyzést figyelembe véve az első n lépés után mindkét eljárásról a következő mondható:

[3] Természetesen a probléma itt — még nyílt görbe esetén is — egyszerűen az, hogy — mindenféle eljárástól eltekintve — az adott görbén, „egyenletes eloszlásban” helyezzük el a pontokat. Ez közvetlenül is elvégezhető.

3. Minden egyes lépés után a szomszédos $\overset{\frown}{P_iP_j}$, $\overset{\frown}{P_jP_k}$ ívek különbségeinek abszolút értékének az összege $(\Sigma|\overset{\frown}{P_iP_j}-\overset{\frown}{P_jP_k}|)$ csak csökkenhet. (Lehet, hogy egy lépés után ez az összeg nem változik.) Így az eljárás során $\Sigma|\overset{\frown}{P_iP_j}-\overset{\frown}{P_jP_k}| = \Delta$ egy monoton fogyó, alulról korlátos számsorozatot ad (alsó korlát 0), alsó határának tehát léteznie kell, legyen ez $H \geqq 0$.

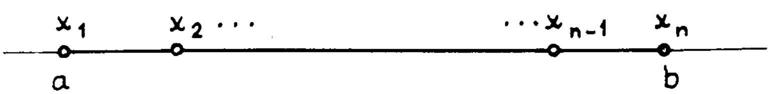
Állítás: $H=0$. Ha ugyanis $H>0$ volna, létezne tetszőleges sok lépés után is legalább egy P_j pont, hogy a mellette levő ívek különbsége $\delta_j = |\overset{\frown}{P_iP_j}-\overset{\frown}{P_jP_k}| \geqq \geqq \frac{H}{n} > 0$. Ilyenkor a P_i, P_j, P_k közül legalább az egyik elmozdul $\delta \geqq \frac{H}{4n} > 0$ értékkel. Ez az elmozdulás csak akkor nem csökkenti a Δ-t, ha az elmozduló pont melletti nagyobb ív mellett egy még nagyobb, a kisebbik mellett még kisebb ív van (7. ábra).



7. ábra

Ez azonban, az ívek egyenlőtlensége miatt, a szomszédos pontok újabb elmzodulását eredményezi. Ez a folyamat mindkét irányban lépésről lépésre terjed, mindaddig, míg egy olyan ponthoz érünk, amelynek elmozdulásával a Δ csökken. Ilyen pont nyílt görbéknél legalábbis a két utolsó előtti pont, és zárt görbéknél is van legalább egy ilyen P_i pont (hiszen a görbén levő véges sok intervallumon keresztül egy irányba haladva nem lehet, hogy az intervallumok folyton nőjenek.) A Δ ilyen — tetszőleges sok lépés utáni — H-val arányos csökkenése ellentmond a $H>0$ állításnak, tehát $H=0$, vagyis minden ív egyenlő lesz (legalábbis határértékben) az eljárás lefolytatása után. Ez a helyzet viszont éppen az extremális elrendezés.

Megjegyzés: A III. eljárásra vonatkozó bizonyítást vissza lehet vezetni a lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló ún. *Gauss—Seidel*-féle módszerre (lásd [1] 437. old.). Ugyanis ennek lépései teljesen megfelelnek a III. eljárásnak, ha azt vesszük, hogy az extremális megoldást (belső metrika szerint) a következő egyenletrendszer írja le:



8. ábra

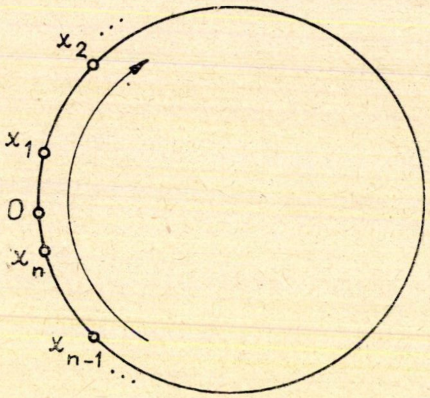
Nyílt görbére: (8. ábra) az ív (b—a) hosszúságú, ezen helyezünk el n számú pontot.

$$
\begin{aligned}
x_1 - a &= 0\\
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0\\
x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0\\
&\cdots\cdots\cdots\\
x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n &= 0\\
x_n - b &= 0
\end{aligned}
$$

Zárt görbére: (9. ábra) a görbe hossza a, n pontot helyezünk el rajta. (Két pont (x_1, x_n) között rögzítünk egy kiindulási (0) pontot. Ha x_n — a kitűzött irányban — esetleg túllépi a 0-t egy d értékkel, akkor x_n értékét $a+d$-nek vesszük...).

$$\begin{array}{llll}
x_n - 2x_1 + x_2 & & & -a = 0 \\
\quad x_1 - 2x_2 + x_3 & & & = 0 \\
\qquad x_2 - 2x_3 + x_4 & & & = 0 \\
\qquad \vdots & & & \vdots \\
x_n & & + x_{n-2} - 2x_{n-1} & = 0 \\
-2x_n + x_1 & & + x_{n-1} + a & = 0
\end{array}$$

Ezekre az egyenletrendszerekre alkalmazva a *Gauss—Seidel*-eljárást, a helyes megoldáshoz konvergáló értékeket kapunk $x_1, x_2, \ldots, x_n$-re, vagyis a fenti (I., III.) eljárások is az extremális helyzethez konvergálnak.



9. ábra

A lineáris egyenletrendszerek közelítő megoldására vonatkozó ún. *Southwell*-féle relaxációs eljárásból (lásd [1] 430. oldal) kiindulva, görbékre (belső metrika esetén) a következő, egy extremális rendszerhez konvergáló eljárás adódik:

IV. A III. eljárásban adott módon mozgatjuk a pontokat, de nem egy rögzített sorrend szerint, hanem mindig azt a pontot mozgatjuk, amely (a III. eljárás szerint) a legmesszebb kerülhet eredeti helyétől.

Az eddigiekből látható, hogy a fenti (I., III., IV.) eljárások milyen szoros kapcsolatban vannak a lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló — említett — relaxációs módszerekkel. Mivel a *Gauss—Seidel-* és *Southwell*-féle eljárásokat csak lineáris egyenletrendszerek megoldására használják, kérdés, hogy vajon a (térgörbéknél belső metrika szerinti) velük analóg eljárásaink milyen eredményre vezetnek nem lineáris, két, három vagy több dimenziós alakzatok esetén.

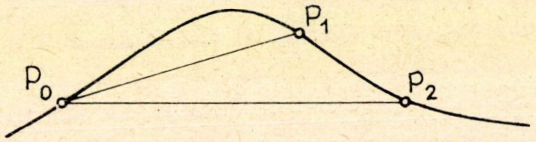
Tulajdonképpen, ha egy térgörbén a pontok távolságát külső metrika szerint tekintjük, már akkor is egy nem lineáris problémával állunk szemben. Az elhelyezendő pontok távolsága legyen a pontokat összekötő húr hossza; az adott alakzatok továbbra is nyílt és zárt térgörbék. Ebben az esetben általánosságban nehezebb megmondani, hogy milyen lesz egy extremális pontrendszer.

Az általános eset helyett most csak tekintsük az olyan görbéket, amelyekre bármely P_0 pontjukból — egy irányba — kiinduló $\widehat{P_0P_1}$ illetve $\widehat{P_0P_2}$ ívre a $\widehat{P_0P_1}$ ív kisebb, mint a $\widehat{P_0P_2}$ ív, ha a P_0P_1 húr is kisebb, mint a P_0P_2 húr, és fordítva (10. ábra). (Ez a kikötés általánosabb, mint ha például azt tettük volna fel, hogy rövidebb ívhez rövidebb húr tartozik, és fordítva.)

A következőkben az ilyen görbéket szigorúan monoton görbéknek nevezzük.

Megjegyzések: 1. Az ilyen görbéknél egy tetszőleges P_0 pontból kiinduló P_0P húr hossza a megfelelő ív hosszának — mint paraméternek — szigorúan monoton függvénye, és fordítva.

2. A fenti monotonitási tulajdonsággal rendelkeznek pl. a folytonos, monoton függvények görbéi (a síkban).



10. ábra

Egyszerű zárt görbék esetén egy húrhoz két ív is tartozik. Ezért, hogy a szigorú monotonitás definícióját zárt görbékre is értelmezhessük, kössük ki, hogy zárt görbéknél egy húrhoz mindig a legrövidebb hozzá tartozó ívet rendeljük. Ekkor azonban belátható, hogy a síkban a kör az egyetlen szigorúan monoton görbe, és a térben is csak egy gömbbe írt és a gömb középpontjára szimmetrikus görbékről lehet szó.

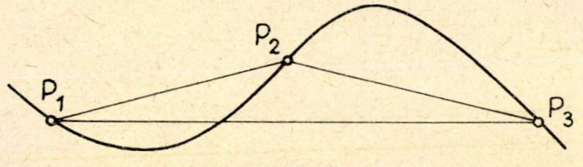
Megjegyzés: A szigorúan monoton, zárt görbéknek ezt a szűk osztályát kiterjeszthetnénk a definíció egy olyan általánosításával, hogy csak azt követelnénk meg, hogy bármely P_0 pontból kiindulva a görbe P pontjain végigfutva, a P_0P húrok szigorú növekedésével mindkét irányba haladva eljuthassunk a görbe egy másik Q pontjába (az így meghatározott két $\widehat{P_0Q}$ ív nem feltétlenül egyenlő). Így pl. az ellipszist már a szigorúan monoton görbék közé sorolhatnánk. Megtehetnénk azt is, hogy a görbe húrjainak — az ívhossz függvényében vett — szigorúan monoton növekedését csak a P_0 (kiindulási) pontok egy R sugarú környezetébe eső darabjára követelnénk meg — így R-től függően lehetne egy görbe szigorúan monoton vagy sem. (Pl. a kör tetszőleges R-re szigorúan monoton.) Ilyen módon természetesen a szigorúan monoton, nyílt görbék osztálya is kiszélesedne.

Ezeket a lehetőségeket félretéve itt megmaradunk az eredeti definíció mellett. A szigorúan monoton görbékről kimondhatunk néhány igen egyszerű állítást:

1. *Ha egy $\widehat{P_1P_3}$ ívre egy P_2 osztópontot helyezünk, akkor a P_1P_2 és P_2P_3 húr kisebb, mint a P_1P_3 húr* (11. ábra).

2. *Ha egy rögzített P_1 és egy mozgó P_2 pont közti $\widehat{P_1P_2}$ ív nő, akkor növekszik a P_1P_2 húr is, és fordítva.*

3. Egy irányban haladva a görbén, bármely ponthoz a szomszédos pont van a legközelebb — kivéve, ha egy zárt görbén egy teljes ívhossz felénél nagyobb „üres" ív van (amelyen a pontrendszernek nincs pontja).



11. ábra

Ezek alapján könnyen látható, hogy egy extremális elrendezés egy szigorúan monoton görbén csak egy egyenletes elrendezés lehet (ahol minden húr egyenlő).[4]

[4] Egy egyenletes elrendezéshez — a belső metrika esetéhez hasonlóan — közvetlen módon is eljuthatunk: n darab egyenlő húrt mérünk egymás után a görbére, és ezeket addig csökkentjük, vagy növeljük, míg pontosan ki nem töltik az egész görbét. Megjegyzendő, hogy vannak nyilván olyan görbék is, amelyeken nem ilyen (egyenletes) egy extremális elrendezés. Pl. ha egy ellipszisen helyezünk el extremálisan három pontot, külső metrika szerint.

Nyílt görbék esetén (és a körnél) így egyértelműen adott az extremális elrendezés (hiszen nyílt görbén egyetlen egyenletes elrendezés lehet — ha kihasználjuk az egész görbét). Térbeli zárt görbék esetén azonban rögzíteni kell egy kiindulási pontot. Így a pontok közti távolság — egy egyenletes elrendezésnél — még a kiindulási pont függvénye is lesz. *Tehát egy tetszőleges, egyenletes elrendezés zárt görbék esetén nem szolgáltat általában extrémumot*[5].

A szigorúan monoton görbékre vonatkozóan, relaxációs eljárásainkról a következők mondhatók.

A III. eljárás szigorúan monoton görbékre (külső metrika esetén is) ugyanúgy az elhelyezendő pontok egyenletes elrendezéséhez vezet, mint az egyenes szakasz (görbék belső metrikával) esetén, hiszen (a 2. tulajdonság miatt) a szomszédos húrok különbségének az összege itt is ugyanúgy csökken és nullához tart. Igaz ugyan, hogy zárt görbék esetén, ha van a teljes ívhossz felénél hosszabb „üres" ív, állításunk nem igaz, de viszont könnyen látható, hogy az első n lépés után (n a pontok száma, és $n \geqq 2$) biztosan nem lesz ilyen hosszú ív.

Az I. eljárás nehezebben vizsgálható, hiszen a végpontokkal kapcsolatos — a belső metrika esetén is fellépő — problémák itt is jelen vannak, és a különböző görbületű ívek előfordulása is erősen befolyásolja a pontok sorrendjének változását. Így ezzel az eljárással most nem foglalkozunk.

A IV. eljárásról viszont könnyű belátni, hogy monoton görbékre — külső és belső metrika esetén egyaránt — egy egyenletes elrendezéshez vezet (amelyről tudjuk, hogy nyílt görbéknél, körnél és zárt görbéknél belső metrika esetén extremális elrendezés, zárt görbéknél külső metrika esetén pedig általában nem az). Ezt a következőképpen láthatjuk be:

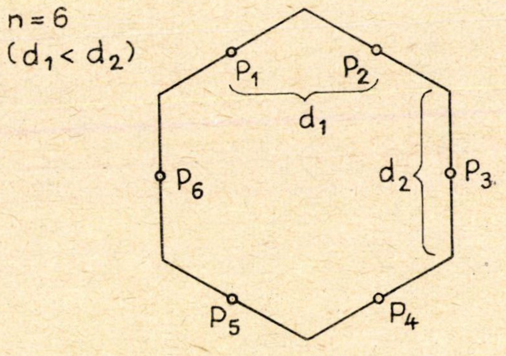
Tegyük fel, hogy az egyenletes elrendezés tetszőleges sok lépés után sem áll be (még határértékként sem). Ilyenkor nyilván kell lennie olyan pontnak, amely tetszőleges sokszor mozdul el. (Ez nyílt görbék esetén szélső pont nem lehet, mert a legelső lépés alkalmával a megfelelő végpontba lép és azután mindenképpen ott marad — a IV. eljárás értelmében.) Ettől a ponttól mindkét irányban megkeressük az első, csak véges sokszor elmozduló pontot. Ennek a pontpárnak az eljárás lefolytatása után egy egyenletes elrendezést kell közrefognia, hiszen a köztük levő, csupa végtelen sokszor elmozduló pont csak ilyet alakíthat ki a III. eljáráshoz hasonló módon. Ezekben a részekben külön-külön egyenletes elrendezés lesz (az előzőek szerint), de az is igaz, hogy az egyes ilyen részekben szereplő pontok távolságának minden részben ugyanakkorának kell lennie, mert ellenkező esetben lennének olyan, két szomszédos részt elválasztó, csak véges sokszor elmozduló pontok, amelyek két határozottan különböző nagyságú intervallumot választanának el tetszőleges sok lépés után is, így mivel a többi pont csak tetszőleges kis értékben különböző hosszúságú húrt választ el (elég sok lépés után) — ezek közül az egyiknek tetszőleges sok lépés után is el kellene mozdulnia, ami ellentmondás. Előfordulhat még az is, hogy minden pont mozog, ekkor viszont (a III. eljáráshoz hasonlóan), szintén egy egyenletes elrendezéshez jutunk.

A görbékre vonatkozó, eddig tett megszorításunk (monotonitás feltételezése) csak egy elégséges feltételt ad eljárásaink eredményességére vonatkozóan. Vannak

[5] Mivel extremális elrendezés létezik és ha van akkor csak egyenletes elrendezés lehet, ezért nyilván az egyenletes elrendezések halmazában van legalább egy extremális rendszer.

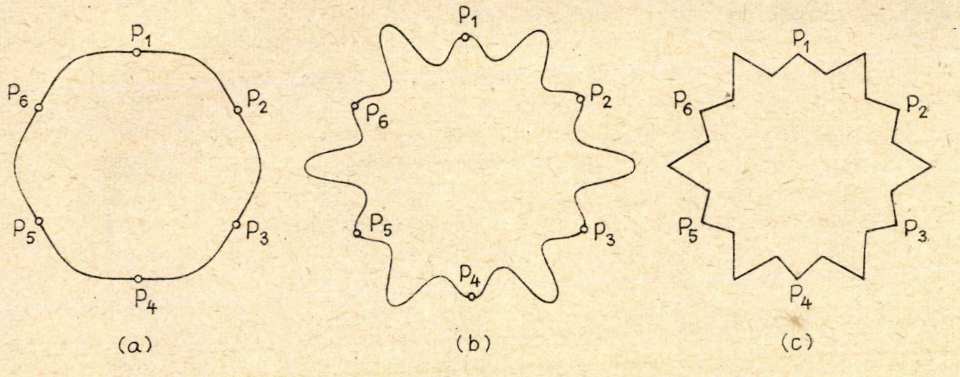
azonban olyan görbék, amelyeknél eljárásaink általában nem vezetnek extremális elrendezéshez. Ilyen görbékkel fogunk most foglalkozni.

Helyezzünk el n pontot ($n \geqq 3$) egy szabályos n szög oldalszakaszainak a közepén (12. ábra). Ezek közül egyet sem tudunk a görbe (a sokszög határa) más pontjába áthelyezni úgy, hogy a többi ponttól távolabb kerüljön. Eljárásaink egyike sem változtat tehát ezen az elrendezésen, pedig ha a sokszög csúcsaiban van mind az n pont, akkor a minimális távolság nagyobb. Ily módon tetszőleges n számú pontra adtunk olyan példát, amikor eljárásaink egyike sem vezet extremális rendszerhez. Természetesen könnyen adhatunk ilyen példákat más hasonló esetekre is. Pl. a) sima, konvex görbe, b) általában konkáv görbe vagy c) konkáv sokszög (ld. 13. ábra). Ha ezeket a görbéket alkalmas helyen megszakítjuk, akkor egyben nyílt görbék esetére is vannak példáink.



12. ábra

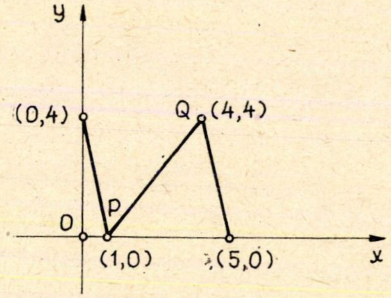
Adhatók még példaként olyan síkgörbék is, melyek egyenlete $y=f(x)$ alakba írhatók (az eddigi példák nem ilyenek) — ilyen eset látható a 14. ábrán is: két pontot (P és Q) helyezünk a görbe (1,0) illetve (4,4) pontjába. Eljárásaink nyilván ezt az elrendezést is változatlanul hagyják (a görbe alakja miatt), de a (0,4) illetve (5,0) pontok egy jobb elrendezést adnak.



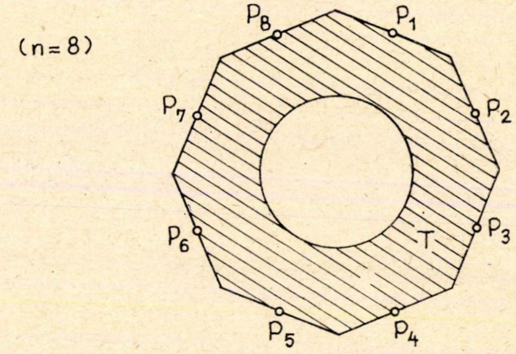
13. ábra

Ezek után síkbeli tartományokat is tekinthetünk, pl. a 12., 13. ábrán levő görbék által határolt síkidomokra ($n=6$ esetén) ugyanaz mondható, mint a határoló görbékre. Az n (pontszám) nagyobb értéke esetén — ha az I. eljárást alkalmazzuk — az egyes tartományok belső pontjaiba már elléphetnének a határról az egyes pontok. Ezen úgy segíthetünk, hogy a tartomány belsejéből egy megfelelő nagyságú kört „kivágunk” — a 15. ábrán látható módon. (Ez könnyen véghezvihető teljes szigorúsággal is.)

A síkon, a fenti eseteken kívül, még olyan „egyszerű" alakzatnál is, mint a körlap, lehetséges, hogy nem jutunk extremális rendszerhez. Pl. $n=4$, 5, 8 pont esetén a 16*a* ábrán látható rendszerek stabilak eljárásainkkal szemben, de a 16*b* ábrán „jobbak" (extremális elrendezések) vannak.



14. ábra



15. ábra

Síkbeli esetekről még elmondható, hogy a szabályos négy- és hatszög-rácsok stabilak eljárásainkkal szemben, sőt ezeknek valamely megfelelő részét tekintve, ezen részek által kifeszített tartományon, mint tartalmazó alakzaton, ezek a részek is egy stabil pontrendszert adnak (17. ábra). Viszont általában a négy vagy hatszögrácsok nem szolgáltatnak extremális elrendezést. Ezen túl a III. és IV. eljárásokról még az is elmondható, hogy bármely stabil, kongruens körrendszer által kifeszített rendszert változatlanul hagynak.

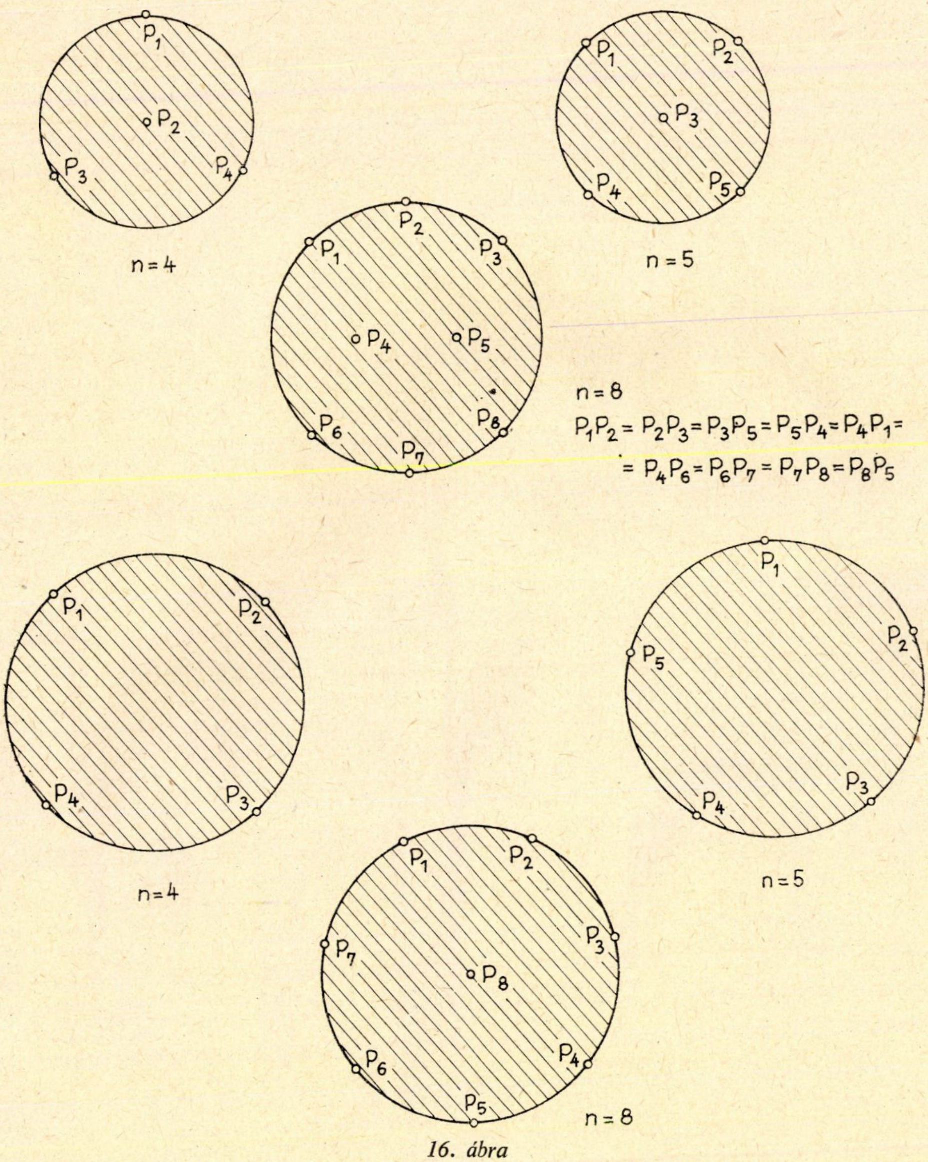
Az előzőekhez hasonlóan, térbeli ellenpéldákat is adhatunk. Pl. a 12. ábra esetének megfelelően: egy 2 egység alapélű és $\sqrt{2}$ egység magasságú négyzetalapú hasáb (18. ábra) alap és fedőlapján az oldalélek középpontjába helyezünk pontokat (összesen nyolc pontot). Ezek a pontok eljárásaink hatására nem mozdulnak el (sem a hasáb felületén sem a belsejébe). Mégis, ha a 18. ábra szerint helyezzük el a pontokat, nagyobb lehet a minimális távolság (mint az előbbi $\sqrt{2}$).

Ugyanígy gömbön (vagy gömbben) levő pontrendszerekre is adhatunk példákat: Gömbbe írt (egy főkörön levő) négyzet, szabályos háromszögalapú hasáb, és kocka csúcsai által adott pontrendszerek egyike sem változik az adott (I., III., IV.) eljárások hatására, de a megfelelő extremális rendszerek mások: a gömbbe írt szabályos tetraéder, a göbbe írt oktaéder és az archimedeszi antiprizma.

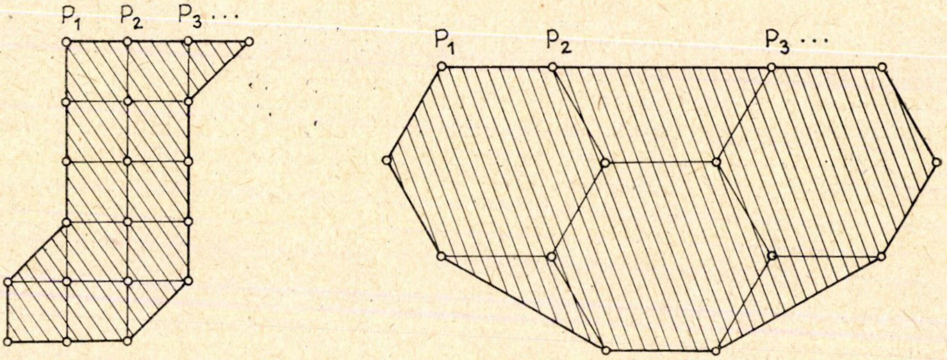
Térben a szabályos illetve stabil gömbrendszerekről ugyanazt elmondhatjuk, amit a síkban a körrendszerekről mondtunk — eljárásainkkal kapcsolatban.

A fentiekben szereplő példákból látszik, hogy eljárásaink több dimenziós esetben korlátokba ütközhetnek. A felsorolt példákban a lehetséges esetek elég sok típusa szerepelt (különböző görbék, síkidomok, térbeli alakzatok; az elhelyezendő pontok különböző száma mellett) mégis az adott példák bizonyos szempontból speciálisaknak tekinthetők; pl. kör vagy gömb esetében legfeljebb 8 pontról volt szó (így nem tudunk még nagyobb pontszám esetére semmi biztosat mondani), vagy a sokszögek esetén (12. ábra) az oldalszám mindig megegyezett az elhelyezendő pontok számával, é. í. t.

Ezek után felmerül a kérdés, vajon hogyan lehetne elérni, hogy eljárásaink több dimenziós esetekben is eredményesek legyenek. Ennek egyik módja az lehetne, hogy egyszerre egynél több (2, 3, 4) pontot mozgatunk. Eljárásaink több pont mozgatásával sem vezetnek mindig a kívánt eredményre, mint azt a 19. ábrán levő két elrendezés is mutatja. Az *a)* esetben a pontok által adott négyzetrács töltse ki pontosan a téglalap alakú T tartományt. Ekkor 2, 3 vagy 4 pont egyszerre történő moz-

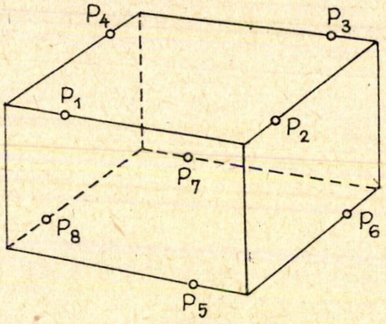


16. ábra



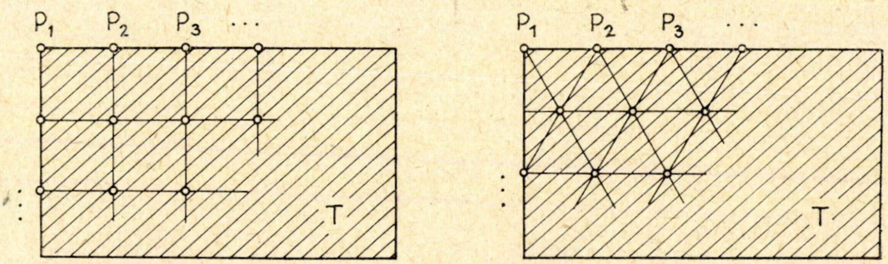
17. ábra

gatásával sem lehet úgy változtatni a rendszeren, hogy a pontok közti távolságok minimuma nőjön. (Ez belátható az összes lehetséges típusú eset végigpróbálásával.) Viszont, ha elég sok pont szerepel, akkor a *b)* esetben látható szabályos háromszögrács (ugyanannyi pont és ugyanakkora minimális távolság esetén), egy az előző *T*-hez hasonló, de kisebb téglalapon is elfér (éppen a nagyobb sűrűség miatt), így az eredeti *T*-n belül felnagyítható, tehát egy nagyobb értéket ad a pontok közti távolságokra, mint az *a)* eset (ezt egy konkrét példán keresztül is végig lehet számolni). Látható tehát, hogy hiába mozgatunk egyszerre több (2, 3, 4) pontot, mégsem jutunk mindig extremális elrendezéshez. Sokkal több pont egyszerre történő mozgatásával valószínűleg jobb eredményt lehetne elérni, de akkor az eljárás válna túl bonyolulttá.



18. ábra

Az eddigiekben az egyes eljárások eredményeit csupán abszolút szélsőérték szempontjából vizsgáltuk. Kérdés, hogy eljárásaink, melyek általában nem vezetnek abszolút szélsőértékhez, vajon lokális szélsőértéket szolgáltat-



a) b)

19. ábra

nak-e (vagyis, hogy ha az eredményként kapott pontrendszer minden pontját csak egy elég kis értékkel mozdítjuk el, akkor a minimális távolság nem növekszik).

Ilyen esetek láthatók a 13b, c ábrán, a körre adott példákban és a 14. ábrán is — valóban ezekben az esetekben az adott $P_1, \ldots, P_n$ pontrendszer pontjait egy elég kis értékkel elmozdítva nem kaphatunk „jobb" elrendezéseket. (Hasonlóan a szabályos négy- és hatszögrácsok által kifeszített rendszerek is egy lokális szélsőértéket adnak.) Természetesen ezek a példák egyáltalán nem jelenthetik azt, hogy tetszőleges rendszerből kiindulva eljárásaink mindig egy lokális szélsőértéket adó rendszerhez vezetnek. Hogy valóban nem mindig juthatunk lokális szélsőértékhez eljárásaink segítségével, azt a következő példákból is láthatjuk:

Tekintsük a 12. ábrán adott szabályos n-szöget. Az oldalak középpontjait elfoglaló rendszer pontjainak mindegyikét a sokszög kerületén egy adott körüljárási irányban valamilyen egyenlő értékkel elmozdítva a pontok távolsága növekszik, egészen addig, míg a legközelebbi csúcspontba nem jutnak. Hasonlóan, a gömbön adott 4, 6, vagy 8 pontból álló, nem extremális rendszerek (négyzet, hasáb, kocka), melyeken eljárásaink nem változtatnak, az összes pont egyszerre történő folytonos mozgatásával (pl. a kockánál két szemköztes lap ellenkező irányba való csavarásával és közelítésével) az extremális helyzetbe vihetők, (tetraéder, oktaéder, archimedeszi antiprizma), miközben a minimális távolság folytonosan növekszik (tehát nem adnak lokális szélsőértéket).

Itt jegyezzük meg, hogy a szélsőérték vizsgálata a szokásos módon — a pontok közti távolság minimumát (mint a pontrendszer függvényét) leíró F függvény differenciáljának segítségével — általában nem történhet, mivel F-nek az egyes pontok koordinátái szerinti parciális deriváltjainak egy maximum helyen legalább az egyike nem létezik.

*

Befejezésül összefoglalunk néhány még nyitott kérdést. Nincs még egyszerű eljárásunk, amely nem csak bizonyos térgörbék esetében alkalmazható, hanem általánosabb esetben is.

Nem határoztuk még meg alakzatoknak egy lehető legszélesebb osztályát, amelyre az általunk tárgyalt (I—IV.) eljárások extremális rendszerhez vezetnek. Tulajdonképpen eljárásaink eredményességére vonatkozóan egy minél gyengébb szükséges feltételt kellene kimondani, mint ahogyan az előzőekben a térgörbékre egy elégséges feltételt sikerült is adni.

Egy fontos probléma a gömb esete. Erre csak speciális esetekre szóló ($n=4$, 6 és 8) ellenpéldákat adtunk, így még előfordulhat, hogy nagyobb pontszámra eljárásaink sikeresek. Előfordulhat az is, hogy nem ilyen speciális elrendezésekből kiindulva, ha nem is mindig, de az esetek nagy többségében mégis eljuthatunk egy extremális rendszerhez.

Itt említjük meg, hogy vannak a relaxációs eljárásokkal rokon egyéb pontelhelyezési módszerek is, amiket különösen a gömbi probléma miatt érdemes megvizsgálni. Ezek a vizsgálatok azonban külön tanulmányt igényelnek.

A relaxációs eljárások egyes lépéseire nincs még megfelelő olyan numerikus módszerünk, amellyel valójában meghatározhatnánk egy extremális elrendezést — ismerve például az egyes pontok koordinátáit. Ilyen numerikus módszerek voltak — térgörbéknél belső metrika esetén — az ún. *Gauss—Seidel* illetve *Southwell*-féle relaxációs eljárások.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] BECKENBACH, H. F.: *Modern matematika mérnököknek,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1960.

[2] FEJES TÓTH L.: *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum,* Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953.

[3] FEJES TÓTH L.: Újabb eredmények a diszkrét geometriában. *MTA III. Oszt. Közl., 13* (1963).

[4] HEPPES A.—MOLNÁR J.: Újabb eredmények a diszkrét geometriában. I.—II.—III. *Mat. Lapok 11* (1960) Nr. 4., *13* (1962), Nr. 1—2., *16* (1965) Nr. 1—2.

[5] SHAW, F. S.: *An Introduction to Relaxation Metods,* Dover Publications, New York 1953.

(Beérkezett: 1967. X. 20.)

RELAXATION TYPE METHODS FOR EXTREMAL POINT DISTRIBUTIONS IN DISCRET GEOMETRY

by

MIHÁLY RUDA

Summary

In this paper the author studies the range of effectiveness of certain relaxation-type methods for finding „extremal" configurations of a given number of points in a given domain. A configuration is said to be extremal if the minimal distance of pairs of its points attains its greatest possible value. Beyond positive results in many cases the methods studied here are proved to lack general effectiveness.