

A FÉLIG KORLÁTOS HERMITIKUS OPERÁTOROK ÖNADJUNGÁLT FOLYTATÁSAINAK ELMÉLETE ÉS ALKALMAZÁSAI. (I)*

Írta: M. G. KREJN

A $\mathfrak{H}$ Hilbert-térben értelmezett T lineáris operátort NEUMANN JÁNOST [1] követve hermitikusnak nevezzük, ha az operátor $\mathfrak{D}(T)$ értelmezési tartománya sűrű $\mathfrak{H}$ -ban és minden $g, f \in \mathfrak{D}(T)$ elempárra $(Tg, f) = (g, Tf)$. A T hermitikus operátort alulról félig korláatosnak mondjuk, ha

$$m(T) = \inf_{f \in \mathfrak{D}(T)} \frac{(Tf, f)}{(f, f)} > -\infty.$$

Alapvető munkájában (lásd [1], 103. old.) NEUMANN JÁNOS kimondta azt a sejtést, hogy minden félig korláatos hermitikus T operátornak van legalább egy félig korláatos önadjungált (hipermaximális) $\tilde{T}$ folytatása, amelyre

$$m(\tilde{T}) = m(T).$$

Ezt később M. H. STONE [7] és más módon K. FRIEDRICHS [2] bizonyította be, nyitva hagyták azonban azt a kérdést, vajon csak egy ilyen $\tilde{T}$ folytatás létezik-e¹.

Sikerült kimutatnunk, hogy a szóban forgó folytatás csak bizonyos, nem minden félig korláatos operátorra teljesülő feltételek mellett lesz egyértelmű. Ezt az eredményt a következő általánosabb feladat megoldása során kapjuk meg: Keresendők a T operátornak mindazok az önadjungált $\tilde{T}$ folytatásai, amelyekre $m(\tilde{T}) \cong \gamma$, ahol γ tetszés szerinti, $m(T)$ -nél nem nagyobb szám. A T félig korláatos operátorról áttérve az $S = T - \gamma I$ ($m(S) \cong 0$) pozitív operátor vizsgálatára az utóbbi feladatot visszavezetjük az S operátor összes pozitív önadjungált $\tilde{S}$ folytatásainak megkeresésére. Kiderül, hogy az ilyen folytatások között található két „szélső” folytatás, S_μ és S_M (a „durva” és a „finom” folytatás), amelynek számos figyelemre méltó extrémális tulajdonsága van.

Így például ahhoz, hogy egy S' pozitív önadjungált operátor az S operátor folytatása legyen, szükséges és elégséges a következő feltétel: minden $f \in \mathfrak{H}$ elemre

$$((S_\mu + aI)^{-1}f, f) \leq ((S' + aI)^{-1}f, f) \leq ((S_M + aI)^{-1}f, f),$$

ahol a tetszés szerinti pozitív szám.

Azok az olvasók, akik ismerik K. FRIEDRICHS művét, vizsgálatainkból (lásd I. fej. 10. tétel) látni fogják, hogy az S pozitív operátor folytatásának általa ajánlott módszere mindig az S_μ durva folytatásra vezet.

* Математический сборник 20 (1947) 431—495. A fordítás itt közölt része a cikk I. fejezetének 1—5 §-át és irodalomjegyzékét tartalmazza.

¹ Ezt a kérdést csak egyszerű hermitikus operátorra vonatkozóan van értelme feltenni; a tagadó válasz csak ebben az esetben nem triviális (lásd [12]).

Minthogy a matematikai fizika feladataiban előforduló hermitikus operátorok majdnem mind félig korlátosak, eredményeink a matematikai fizika feladataival kapcsolatban számos alkalmazásra találnak. Speciálisan azok a képletek, amelyeket az S operátor valamilyen $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatásáról a durva folytatásra való áttérésre nyertünk (lásd I. fej. 12. tétel), lehetővé teszik parciális differenciálegyenletekhez tartozó különféle peremérték-feladatok *Green*-függvényének megszerkesztésére alkalmas új hatásos módszerek kidolgozását (lásd III. fej.*).

Vizsgálati módszerünk kiinduló pontja az a körülmény, hogy az S pozitív hermitikus operátor önadjungált folytatásainak keresése visszavezethető egy olyan A korlátos lineáris operátor önadjungált és normatartó folytatásainak a keresésére, amelynek $\mathfrak{D}(A)$ értelmezési tartománya nem sűrű $\mathfrak{H}$ -ban, és amely teljesíti a hermitikusság feltételét:

$$(Ag, f) = (g, Af) \quad (g, f \in \mathfrak{D}(A)).^2$$

Valóban, ha S zárt pozitív hermitikus operátor és $S \neq S^*$, akkor, amint könnyen belátható, az

$$A(f + Sf) = f - Sf \quad (f \in \mathfrak{D}(S))$$

egyenlőség egy A korlátos hermitikus operátort definiál, amelynek

$$\mathfrak{D}(A) = (I + S)\mathfrak{D}(S)$$

értelmezési tartománya zárt és a $\mathfrak{H}$ tér valódi altere, továbbá

$$\|A\| = \sup_{f \in \mathfrak{D}(A)} \frac{|Af|}{|f|} = 1.$$

Nem nehéz megmutatni, hogy ha az A operátort egy $\tilde{A}$ korlátos önadjungált operátorra folytatjuk, amelynek a normája $\|\tilde{A}\| = 1$, és ezután képezzük az $\tilde{S} = (I - \tilde{A})(I + \tilde{A})^{-1}$ operátort, akkor megkapjuk az S operátor $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatásainak általános alakját.

Így az I. fejezetet a $\mathfrak{H}$ térben nem sűrű $\mathfrak{D}(A)$ értelmezési tartománnyal rendelkező A korlátos hermitikus operátorok önadjungált folytatásairól szóló tételekkel kezdjük (1. és 2. §); ezek talán önmagukban is érdekesek némileg. A továbbiakban ezen tételek alapján tanulmányozzuk a félig korlátos hermitikus operátorok önadjungált folytatásait.

Különös figyelmet szentelünk a véges defektusindexű nem korlátos hermitikus operátoroknak (6., 7. és részben 8. §), szem előtt tartva az egydimenziós peremérték-feladatoknál játszott szerepüket.

A II. fejezetben az általános elmélet tételeit egydimenziós peremérték-feladatok vizsgálatára alkalmazzuk. Ezek a vizsgálatok bizonyos értelemben a szerző korábbi munkáinak ([3], [4]) általánosítását és lezárását képezik. Az I. fejezetben szereplő általános fogalmak és állítások lehetővé tették a megfontolások lerövidítését és a gondolatmenetek jobb kidomborítását. E fejezet eredményei könnyen általánosíthatók differenciálegyenlet-rendszerekre vonatkozó egydimenziós peremérték-feladatok különböző osztályaira.

* A tervezett III. fejezet közlésére valójában nem került sor. (Ford. megj.)

² Megengedünk magunknak bizonyos lazaságot és az ilyen A operátorokat szintén hermitikusnak nevezzük.

A III. fejezetben* az általános elmélet eredményeit felhasználjuk parciális differenciálegyenletekre vonatkozó többdimenziós peremérték-feladatok tanulmányozására. Az I. fejezetben tárgyalt általános fogalmak a peremérték-feladatokkal kapcsolatban új problémákhoz vezetnek. A *Green*-függvények itt kapott új jellemzéseinek és megszerkesztésük módszereinek jelentősége lehet az alkalmazások szempontjából is.

Az I. fejezet fő eredményei bizonyítás nélkül megtalálhatók a Доклады Академии наук СССР című folyóiratban megjelent [5] közleményünkben. Ugyanebben a folyóiratban jelent meg a szerző [6] közleménye is, amelyben az I. fejezet 6. §-hoz csatlakozó és azt részben kiegészítő eredmények kerültek ismertetésre.

Terminológia és jelölésmód tekintetében lényegében STONE [7] könyvét követjük.

I. FEJEZET

ÁLTALÁNOS ELMÉLET

1. §. A $H_{\mathfrak{H}}$ operátor

1. A továbbiakban $\mathfrak{H}$ mindig valamilyen Hilbert-teret jelent.

A $\mathfrak{H}$ térben ható különféle hermitikus operátorokat fogunk vizsgálni. Mint-hogy még nem alakult ki egységes terminológia, megmondjuk, hogy egy A lineáris operátort, amelynek az értelmezési tartománya $\mathfrak{D}(A)$ ($\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{H}$, $A\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{H}$), akkor fogunk hermitikusnak nevezni, ha

$$(Ag, f) = (g, Af) \quad (g, f \in \mathfrak{D}(A)).$$

Ebben és a következő két paragrafusban folytonos hermitikus A operátorokat fogunk vizsgálni. Amint ismeretes, az A lineáris operátor akkor és csak akkor folytonos, ha korlátos, vagyis van véges normája:

$$\|A\| = \sup_{f \in \mathfrak{D}(A)} \frac{|Af|}{|f|} < \infty.$$

Ha az A hermitikus operátor az egész $\mathfrak{H}$ téren értelmezve van ($\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{H}$), akkor korlátos és

$$\|A\| = \sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{|(Af, f)|}{(f, f)}.$$

Az ilyen operátorokat korlátos önadjungált operátoroknak fogjuk nevezni.

Ebben a paragrafusban minden alkalommal, amikor nem mondunk mást, feltesszük, hogy a szóban forgó operátorok korlátos önadjungált operátorok.

Állapodjunk meg abban, hogy ha

$$A \neq B \quad \text{és} \quad (Af, f) \leq (Bf, f) \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

akkor az

$$A < B \quad \text{vagy} \quad B > A$$

jelölésmódot használjuk.

* Lásd a 274. oldalon álló lábjegyzetet.

A továbbiakban H pozitív operátort jelent ($H > 0$). Ilyen operátorhoz található egy és csak egy pozitív operátor, amelynek a négyzete H -val egyenlő; ennek a jele $H^{\frac{1}{2}}$ lesz.

Ha

$$Hf = \int_0^l \lambda dE(\lambda)f \quad (f \in \mathfrak{H}; \quad l = \|H\|)$$

a H operátor spektrálfelbontása, akkor

$$H^{\frac{1}{2}}f = \int_0^l \lambda^{\frac{1}{2}} dE(\lambda)f \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

A továbbiakban fontos szerepet fog játszani a következő

1. TÉTEL. Legyen $\mathfrak{N}$ a $\mathfrak{H}$ tér zárt altére, H pedig valamilyen pozitív operátor. Ekkor³ a

$$1) \quad C \leq H \quad 2) \quad \mathfrak{N}(C) \subset \mathfrak{N}$$

feltételeket teljesítő összes C operátorok Q halmazában található maximális operátor (vagyis olyan operátor, amely a halmaz minden más C operátoránál nagyobb). Ez a $H_{\mathfrak{N}}$ operátor kifejezhető a

$$(1.1) \quad H_{\mathfrak{N}} = H^{\frac{1}{2}}P_{\mathfrak{Q}}H^{\frac{1}{2}}$$

képlettel, ahol $P_{\mathfrak{Q}}$ a $H^{\frac{1}{2}}f \in \mathfrak{N}$ tulajdonsággal rendelkező $f \in \mathfrak{H}$ vektorokból álló $\mathfrak{Q}$ altérre való merőleges vetítés operátora.

Bizonyítás⁴. Jelöljük $\mathfrak{D}$ -vel az $\mathfrak{N}$ altér $\mathfrak{H}$ -ra vonatkozó ortogonális komplementumát:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}.$$

Ekkor tetszés szerinti $C \in Q$ operátorra

$$(Cf, g) = 0, \quad Cg = 0 \quad (f \in \mathfrak{H}, \quad g \in \mathfrak{D}),$$

tehát

$$(Cf, f) = (C(f-g), f-g) \quad (f \in \mathfrak{H}, \quad g \in \mathfrak{D}).$$

A $C \leq H$ összefüggés alapján

$$(Cf, f) \leq (H(f-g), f-g) = |H^{\frac{1}{2}}(f-g)|^2 \quad (f \in \mathfrak{H}, \quad g \in \mathfrak{D}).$$

következésképpen

$$(1.2) \quad (Cf, f) \leq \inf_{g \in \mathfrak{D}} |H^{\frac{1}{2}}f - H^{\frac{1}{2}}g|^2.$$

³ Az elfogadott szokásnak megfelelően $\mathfrak{R}(A)$ -val az összes Af ($f \in \mathfrak{D}(A)$) értékek halmazát jelöljük; tehát $A\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{R}(A)$.

⁴ A tétel alább ismertetett bizonyítása lényegesen egyszerűbb a szerzőtől származó eredeti bizonyításánál. A bizonyítás leegyszerűsítéséért a szerző I. M. Gelfandnak tartozik köszönettel.

Legyen $\mathfrak{L}$ azoknak a h vektoroknak az összessége, amelyek ortogonálisak $H^\pm \mathfrak{D}$ -re, $P_{\mathfrak{L}}$ pedig az $\mathfrak{L}$ -re való merőleges vetítés operátora. Az (1. 2) egyenlőtlenség értelmében

$$(Cf, f) \leq |P_{\mathfrak{L}} H^\pm f|^2 = (H^\pm P_{\mathfrak{L}} H^\pm f, f) \quad (f \in \mathfrak{L}).$$

Nyilvánvaló, hogy $H^\pm P_{\mathfrak{L}} H^\pm \leq H$.

Az $\mathfrak{L}$ altér definíciója szerint $h \in \mathfrak{L}$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $(h, H^\pm g) = 0$ ($g \in \mathfrak{D}$), azaz $(H^\pm h, g) = 0$ ($g \in \mathfrak{D}$), vagy másképpen $H^\pm h \in \mathfrak{N}$.

Ennélfogva $\mathfrak{N}(H^\pm P_{\mathfrak{L}} H^\pm) \subset \mathfrak{N}$.

Ezzel beláttuk, hogy $H^\pm P_{\mathfrak{L}} H^\pm \in \mathcal{Q}$, és így a tételt bebizonyítottuk.

2. Felsoroljuk a $H_{\mathfrak{N}}$ operátor néhány tulajdonságát.

Az (1. 1) képletből adódik, hogy $\mathfrak{N}(H_{\mathfrak{N}}) \subset \mathfrak{N}(H^\pm)$, tehát

$$\mathfrak{N}(H_{\mathfrak{N}}) \subset \mathfrak{N}(H) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}(H^\pm).$$

Az is nyilvánvaló, hogy az $\mathfrak{L}$ halmaz nem változik meg, ha az $\mathfrak{N}$ alteret az $\overline{\mathfrak{N}(H)}$ altérrel helyettesítjük; ezek szerint

$$\alpha) \quad H_{\mathfrak{N}} = H_{\overline{\mathfrak{N}(H)}}.$$

Innen könnyen nyerjük a következőt:

$$\beta) \quad H_{\mathfrak{N}} = 0 \text{ akkor és csak akkor, ha}^5$$

$$\mathfrak{N}(H) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}(H^\pm) = (0).$$

Tekintettel az $\alpha)$ tulajdonságra csak azt kell belátnunk, hogy $H_{\mathfrak{N}} \neq 0$, ha $\mathfrak{N}(H) \neq (0)$. De ha

$$\varphi \in \mathfrak{N}(H), \quad \varphi \neq 0,$$

akkor található olyan $\psi \in \mathfrak{L}$ elem, hogy

$$\varphi = H^\pm \psi.$$

Normáljuk a φ elemet úgy, hogy $|\psi| = 1$ legyen; ekkor

$$|(f, \varphi)|^2 = |(f, H^\pm \psi)|^2 = |(H^\pm f, \psi)|^2 \leq |H^\pm f|^2 = (Hf, f) \quad (f \in \mathfrak{L}).$$

Ily módon a

$$C_\varphi f = (f, \varphi) \varphi$$

képlettel értelmezett C_φ operátornak megvannak az 1. tételben szereplő 1), 2) tulajdonságai, következésképpen

$$0 < C_\varphi \leq H_{\mathfrak{N}}.$$

$\gamma)$ A

(1. 3)

$$H_{\mathfrak{N}} f = Hf$$

egyenlőség azokra és csak azokra az $f \in \mathfrak{L}$ elemekre áll fenn, amelyekre $Hf \in \mathfrak{N}$.

⁵ (0) az egyetlen $0 (\in \mathfrak{L})$ elemből álló halmaz jele.

Valóban, az (1.3) egyenlőség ekvivalens azzal, hogy

$$|P_{\mathfrak{L}} H^{\pm} f|^2 = (H_{\mathfrak{N}} f, f) = (Hf, f) = |H^{\pm} f|^2.$$

Ebből az egyenlőségből viszont következik, hogy

$$P_{\mathfrak{L}} H^{\pm} f = H^{\pm} f, \text{ vagyis } H^{\pm} f \in \mathfrak{L}.$$

De $g = H^{\pm} f \in \mathfrak{L}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $H^{\pm} g \in \mathfrak{N}$, azaz $Hf \in \mathfrak{N}$.

$\delta)$ Ha létezik korlátos H^{-1} inverz operátor, akkor az $\mathfrak{N}$ altérben tekintett $H_{\mathfrak{N}}$ operátornak ebben az altérben van inverz operátora. Ha az utóbbit a $H_{\mathfrak{N}}^{(-1)}$ jellel jelöljük, akkor⁶

$$H_{\mathfrak{N}}^{(-1)} f = P_{\mathfrak{N}} H^{-1} P_{\mathfrak{N}} f \quad (f \in \mathfrak{N}).$$

Valóban, a $\gamma)$ állítás szerint

$$(1.4) \quad (H_{\mathfrak{N}} f, f) = (Hf, f)$$

minden $f \in H^{-1} \mathfrak{N}$ elemre. Elvégezve az (1.4) egyenlőségben az

$$f = H^{-1} g \quad (g \in \mathfrak{N})$$

helyettesítést, kapjuk:

$$(H^{-1} H_{\mathfrak{N}} H^{-1} g, g) = (H^{-1} g, g) \quad (g \in \mathfrak{N}).$$

Ha itt a g elemet $g = P_{\mathfrak{N}} f$ ($f \in \mathfrak{H}$) alakban állítjuk elő és felhasználjuk, hogy

$$H_{\mathfrak{N}} f = H_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{N}} f = P_{\mathfrak{N}} H_{\mathfrak{N}} f \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

akkor az

$$(1.5) \quad (R H_{\mathfrak{N}} R g, g) = (R g, g)$$

képletet nyerjük, ahol R -rel azt az $\mathfrak{N}$ térben értelmezett operátort jelöltük, amelyet az

$$R g = P_{\mathfrak{N}} H^{-1} P_{\mathfrak{N}} g = P_{\mathfrak{N}} H^{-1} g \quad (g \in \mathfrak{N})$$

egyenlőség határoz meg. Minthogy

$$(R g, g) = (H^{-1} g, g) \cong \frac{1}{l} (g, g) \quad (g \in \mathfrak{N}, \quad l = \|H\|),$$

létezik korlátos R^{-1} inverz operátor, és az (1.5) egyenlőségben elvégezve a

$$g = R^{-1} f \quad (f \in \mathfrak{N})$$

helyettesítést, azt kapjuk, hogy

$$H_{\mathfrak{N}} f = R^{-1} f \quad (f \in \mathfrak{N}),$$

és éppen ez volt az állítás.

3. Az alábbiakban olyan képleteket ismertetünk, amelyek különböző konkrét feladatok során alkalmasak $H_{\mathfrak{N}}$ kiszámítására.

⁶ $P_{\mathfrak{N}}$ az az operátor, amelyik a $\mathfrak{H}$ teret merőlegesen $\mathfrak{N}$ -re vetíti.

A $\delta)$ állítás a továbbiakban sehol sem kerül felhasználásra. Mégis érdekes annyiban, hogy véges dimenziójú $\mathfrak{H}$ tér esetén a $H_{\mathfrak{N}}$ operátor alkalmas bázisra vonatkozó matrixa a H operátor megfelelő matrixából egyszerű racionális műveletek útján megkapható.

Először megjegyezzük, hogy egy $\varphi \in \mathfrak{H}$ elem akkor és csak akkor tartozik az $\mathfrak{R}(H^\pm)$ altérhez, ha

$$|\psi| = \left(\int_0^l \frac{d|E(\lambda)\varphi|^2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

E feltétel teljesülése esetén

$$\varphi = H^\pm \psi,$$

ahol

$$(1.6) \quad \psi = \int_0^l \frac{dE(\lambda)\varphi}{\sqrt{\lambda}} (= H^{(-\pm)}\varphi).$$

Legyen $\mathfrak{H}_0$ a H operátor összes zérushelyeinek a halmaza, $\mathfrak{H}_+$ pedig $\mathfrak{H}_0$ ortogonális komplementuma:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_+ \quad (H\mathfrak{H}_0 = 0, \quad H\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_+).$$

Az $\mathfrak{R}(H^\pm) \subset \mathfrak{H}_+$ halmazon az (1.6) egyenlőséggel értelmezett (általában nem korlátos) $H^{(-\pm)}$ operátor a $\mathfrak{H}_+$ altéren tekintett $H^\pm$ operátor inverze, és ha φ befutja az $\mathfrak{R}(H^\pm)$ halmazt, akkor $\psi = H^{(-\pm)}\varphi$ befutja az egész $\mathfrak{H}_+$ alteret.

Az $\mathfrak{R}(H^\pm)$ lineáris sokaságon vezessünk be egy új $[\varphi, \chi]$ skaláris szorzatot a

$$[\varphi, \chi] = \int_0^l \frac{d(E(\lambda)\varphi, \chi)}{\lambda} \quad (\varphi, \chi \in \mathfrak{R}(H^\pm))$$

képlet segítségével. Erre a skaláris szorzatra nézve az $\mathfrak{R}(H^\pm)$ halmaz a $\mathfrak{H}_+$ térrel izometrikus teljes Hilbert-tér, mert

$$[\varphi, \chi] = (H^{(-\pm)}\varphi, H^{(-\pm)}\chi).$$

Jegyezzük meg, hogy a

$$[\varphi] = \sqrt{[\varphi, \varphi]} \cong \frac{1}{\sqrt{l}} |\varphi| \quad (\varphi \in \mathfrak{R}(H^\pm))$$

összefüggés folytán minden a $[\varphi]$ norma szerint konvergens $\{\chi_n\} \subset \mathfrak{R}(H^\pm)$ sorozat a $|\varphi|$ normára vonatkozóan még inkább konvergál (és természetesen ugyanahhoz a határértékhez).

Jelölje $\mathfrak{Q}_+$ azoknak az $f \in \mathfrak{H}_+$ vektoroknak a zárt halmazát, amelyekre $H^\pm f \in \mathfrak{R}$. Más szóval

$$\mathfrak{Q}_+ = \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{H}_+,$$

vagy még másképpen

$$\mathfrak{Q}_+ = H^{(-\pm)}\mathfrak{R}(H).$$

Ha $f \in \mathfrak{Q}$, azaz $H^\pm f \in \mathfrak{R}$, akkor f -et $f = f_0 + f_+$ alakban előállítva, ahol $f_0 \in \mathfrak{H}_0$, $f_+ \in \mathfrak{H}_+$, kapjuk:

$$H^\pm f_0 = 0, \quad H^\pm f_+ = H^\pm f \in \mathfrak{R},$$

és innen $f_0 \in \mathfrak{Q}$, $f_+ \in \mathfrak{Q}_+ \subset \mathfrak{Q}$.

Ezek szerint

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0 \oplus \mathfrak{Q}_+, \quad \mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{H}_0$$

és

$$P_{\mathfrak{Q}} = P_{\mathfrak{Q}_0} + P_{\mathfrak{Q}_+}.$$

Minthogy $\mathfrak{R}(H^{\pm}) \subset \mathfrak{H}_+$, fennáll

$$P_{\mathfrak{Q}_0} H^{\pm} = 0, \quad P_{\mathfrak{Q}} H^{\pm} = P_{\mathfrak{Q}_+} H^{\pm},$$

és így a $H_{\mathfrak{R}}$ operátor (1.1) kifejezése a következővel helyettesíthető:

$$(1.7) \quad H_{\mathfrak{R}} = H^{\pm} P_{\mathfrak{Q}_+} H^{\pm}.$$

Legyen $\{\varphi_v\}_{v \in N}$ teljes ortonormális rendszer $\mathfrak{R}(H)$ -ban (a $[\varphi, \chi]$ skaláris szorzatra vonatkozóan):

$$[\varphi_\mu, \varphi_v] = \delta_{\mu v} \quad (\mu, v \in N).$$

Megmutatjuk, hogy ekkor

$$(1.8) \quad H_{\mathfrak{R}} f = \sum_{v \in N}^{\Pi} (f, \varphi_v) \varphi_v,$$

és végtelen N halmaz esetén tetszés szerinti $f \in \mathfrak{H}$ vektorra az (f, φ_v) ($v \in N$) együtthatók közül csak megszámlálhatóan sok különbözik nullától, továbbá a jobb oldalon álló sor erősen konvergens az $[f]$ normára nézve⁷, tehát az $|f|$ normára nézve még inkább.

Valóban, az $\mathfrak{R}(H)$ tér $\{\varphi_v\}$ teljes ortonormális rendszerének az $\mathfrak{Q}_+$ tér egy (közönséges értelemben) teljes ortonormális $\{\psi_v\}$ rendszere felel meg, ahol

$$(1.9) \quad \psi_v = H^{(-\pm)} \varphi_v, \quad \varphi_v = H^{\pm} \psi_v \quad (v \in N).$$

Ezek szerint

$$(1.10) \quad P_{\mathfrak{Q}_+} H^{\pm} f = \sum_{v \in N} (H^{\pm} f, \psi_v) \psi_v = \sum_{v \in N} (f, \varphi_v) \psi_v;$$

másrészt figyelembe véve, hogy

$$\chi_n \rightarrow \chi \quad \text{esetén} \quad [H^{\pm} \chi_n - H^{\pm} \chi] \rightarrow 0,$$

az (1.7), (1.9), (1.10) egyenlőségekből kapjuk:

$$H_{\mathfrak{R}} f = H^{\pm} \left(\sum_{v \in N} (f, \varphi_v) \psi_v \right) = \sum_{v \in N}^{\Pi} (f, \varphi_v) \varphi_v,$$

és ezt kellett bebizonyítani.

4. Időzzünk még annál az esetnél, amikor $\mathfrak{R}(H)$ véges dimenziójú.

é) Ha $\mathfrak{R}(H)$ n -dimenziós tér és $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ ennek egy bázisa, akkor

$$(1.11) \quad H_{\mathfrak{R}} f = \sum_{j,k=1}^n \gamma_{jk} (f, \varphi_j) \varphi_k \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

ahol a $\Gamma_n = \|\gamma_{jk}\|_1^n$ matrix a

$$\Phi_n = \|[\varphi_j, \varphi_k]\|_1^n$$

matrix inverze.

⁷ Ez úgy tüntetjük fel, hogy a Σ jel fölé $[\]$ jelet írunk.

Csakugyan, nem nehéz igazolni, hogy az (1. 11) egyenlőség jobb oldalán álló összeg nem változik meg, ha a $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ bázist valamilyen más bázissal helyettesítjük. Másrészt ha a $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ bázist úgy választjuk, hogy

$$[\varphi_j, \varphi_k] = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n),$$

akkor $\Gamma_n = \Phi_n^{-1}$ az egységmatrix lesz, és az (1. 11) egyenlőség jobb oldalán álló összeg a

$$\sum_{j=1}^n (f, \varphi_j) \varphi_j$$

összegbe megy át, amely az (1. 8) összefüggés értelmében a $H_{\mathfrak{N}}f$ elemmel egyenlő.

Megjegyezzük, hogy az (1. 11) képletet még a következőképpen is fel lehet írni:

$$(1.12) \quad H_{\mathfrak{N}}f = -\frac{1}{|\Phi_n|} \begin{vmatrix} 0 & (f, \varphi_1) & \dots & (f, \varphi_n) \\ \varphi_1 & & & \\ \vdots & & \Phi_n & \\ \varphi_n & & & \end{vmatrix}.$$

Ha $\mathfrak{N}$ egydimenziós, $\mathfrak{N}(H) = \mathfrak{N}$ és $\varphi \in \mathfrak{N}$ ($\varphi \neq 0$), akkor azt kapjuk, hogy

$$(1.13) \quad H_{\mathfrak{N}}f = \frac{(f, \varphi)}{[\varphi]^2} \varphi \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Ez a képlet abban az esetben is érvényes, amikor $\mathfrak{N}(H) = 0$ és így $H_{\mathfrak{N}} = 0$, mert ilyenkor $\varphi \notin \mathfrak{N}(H^\perp)$ és úgy tekinthetjük, hogy

$$[\varphi]^2 = \int_0^l \frac{d|E(\lambda)\varphi|^2}{\lambda} = \infty.$$

Ha az (1. 13) formulát összevetjük azzal a ténnyel, hogy az 1. tétel szerint

$$H_{\mathfrak{N}} = \max C,$$

ahol C eleget tesz az

$$\mathfrak{N}(C) \subset \mathfrak{N}, \quad C \leq H$$

feltételeknek, akkor könnyen nyerjük⁸, hogy

$$(1.14) \quad \sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{|(f, \varphi)|^2}{(Hf, f)} = \int_0^l \frac{d|E(\lambda)\varphi|^2}{\lambda} \quad (\varphi \in \mathfrak{H}).$$

⁸ Valóban, ha $\mathfrak{N}(C) \subset \mathfrak{N}$, akkor $Cf = \alpha(f, \varphi)\varphi$; továbbá ha $C \leq H$, akkor $\alpha|(f, \varphi)|^2 \leq (Hf, f)$, azaz

$$\alpha \leq \alpha_H = \inf \frac{(Hf, f)}{|(f, \varphi)|^2}$$

és innen

$$H_{\mathfrak{N}}f = \alpha_H(f, \varphi)\varphi.$$

Összehasonlítva ezt az (1.13) egyenlőséggel megkapjuk az (1.14) összefüggést.

Ezt az egyenlőséget nem nehéz közvetlenül is bebizonyítani, belőle pedig már következik (1. 13).

5. Most legyen $\{\varphi_j\}_1^\infty$ egy $\mathfrak{R}(H)$ -beli elemekből álló sorozat, amelynek a lineáris burka sűrű $\mathfrak{R}(H)$ -ban az $[f]$ normára nézve⁹, és legyen

$$\Phi_n = \|[\varphi_j, \varphi_k]\|_1^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Az elmondottak után nem nehéz belátni, hogy

$$(1.15) \quad H_{\mathfrak{R}} f = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Phi_n|} \begin{vmatrix} 0 & (f, \varphi_1) \dots (f, \varphi_n) \\ \varphi_1 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_n & \vdots \end{vmatrix} \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

ahol a jobb oldalon álló határérték nemcsak a régi $|f|$ normára vonatkozóan, hanem az $[f]$ norma értelmében is létezik.

Valóban, minthogy a határérték jele után álló kifejezés nem változik meg, ha a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ vektorokat tetszés szerinti egymástól lineárisan független és a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ vektorokkal lineárisan kifejezhető $\varphi'_1, \dots, \varphi'_n$ vektorokkal helyettesítjük, a kifejezés akkor sem változik meg, ha a $\{\varphi_k\}_1^\infty$ sorozatot a belőle a $[\varphi, \psi]$ skaláris szorzatra vonatkozó lépésenkénti ortonormálással nyerhető $\{\varphi'_k\}_1^\infty$ sorozattal pótoljuk. Ezek szerint eleve feltehetjük, hogy

$$[\varphi_j, \varphi_k] = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \dots).$$

De ekkor az (1. 15) összefüggés a

$$H_{\mathfrak{R}} f = \sum_1^\infty (f, \varphi_j) \varphi_j \quad (f \in \mathfrak{H})$$

összefüggésbe megy át, ezt pedig már igazoltuk a 3. pontban.

2. §. Az A_μ és az A_M operátor

1. *Ebben a paragrafusban korlátozott hermitikus A operátorokat fogunk vizsgálni.* Az általánosság megszorítása nélkül mindig feltehetjük, hogy az ilyen operátorok $\mathfrak{D}(A)$ értelmezési tartománya zárt. Minket az az eset fog érdekelni, amikor $\mathfrak{D}(A)$ a $\mathfrak{H}$ tér valódi része (altere); ebben az esetben érvényes a következő

2. TÉTEL. *Minden korlátozott hermitikus A operátornak van legalább egy önadjungált folytatása, amelynek a normája megegyezik A normájával.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\|A\| = 1$. Minthogy bármilyen $f \in \mathfrak{H}$ elemre

$$|(Ag, f)| \leq \|A\| \cdot \|g\| \cdot \|f\| = \|g\| \|f\|,$$

⁹ Ilyen sorozat létezése biztosítja van, ha $\mathfrak{L}$ szeparábilis, tehát még inkább, ha $\mathfrak{H}$ szeparábilis.

az (Ag, f) ($g \in \mathfrak{D}(A)$) kifejezés folytonos lineáris funkcionál a $\mathfrak{D}(A)$ halmazon. Következésképpen, RIESZ FRIGYES lemmája értelmében, tetszés szerinti $f \in \mathfrak{H}$ elemnek egyértelműen megfelel egy $h \in \mathfrak{D}(A)$ elem, amelyre

$$(2.1) \quad (Ag, f) = (g, h) \quad (g \in \mathfrak{D}(A)),$$

és fennáll $|h| \leq |f|$.

Legyen

$$(2.2) \quad h = A^\circ f \quad (f \in \mathfrak{H}, A^\circ f \in \mathfrak{D}(A)).$$

Könnyen belátható, hogy az A° operátor lineáris, továbbá

$$|A^\circ f| \leq |f| \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Legyen P a $\mathfrak{H}$ tér $\mathfrak{D}(A)$ altérre való merőleges vetítésének operátora. A (2.1), (2.2) egyenlőségek alapján $g, f \in \mathfrak{D}(A)$ esetén

$$(g, A^\circ f) = (Ag, f) = (g, Af) = (g, PAf),$$

és így

$$A^\circ f = PAf \quad (f \in \mathfrak{D}(A)).$$

Legyen $\mathfrak{N}$ a $\mathfrak{D}(A)$ altér ortogonális komplementuma $\mathfrak{H}$ -ban:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{D}(A) \oplus \mathfrak{N},$$

$\{e_v\}_{v \in N}$ pedig ortonormális bázis $\mathfrak{N}$ -ben. Tetszés szerinti $f \in \mathfrak{D}(A)$ elemre

$$Af - A^\circ f = Af - PAf \in \mathfrak{N},$$

tehát

$$Af = A^\circ f + \sum_{v \in N} c_v(f) e_v \quad (f \in \mathfrak{D}(A)),$$

ahol

$$c_v(f) = (Af, e_v) \quad (v \in N).$$

Feltevés szerint $\|A\| = 1$, úgyhogy

$$(2.3) \quad |Af|^2 = |A^\circ f|^2 + \sum_{v \in N} |c_v(f)|^2 \leq |f|^2 \quad (f \in \mathfrak{D}(A)).$$

Legyen

$$(g, f)_1 = (g, f) - (A^\circ g, A^\circ f) \quad (g, f \in \mathfrak{H});$$

akkor az $|A^\circ f| \leq |f|$ ($f \in \mathfrak{H}$) összefüggés értelmében

$$(f, f)_1 \geq 0 \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

és így bevezethetjük az

$$(2.4) \quad |f|_1 = \sqrt{(f, f)_1} = \sqrt{|f|^2 - |A^\circ f|^2} \quad (\geq 0)$$

normát.

Azonosítva $\mathfrak{H}$ -ban mindazon f, f' elempárokat, amelyekre $|f - f'|_1 = 0$, és teljessé téve a $\mathfrak{H}$ teret az új $|f|_1$ normára vonatkozóan, egy új $\mathfrak{H}_1$ Hilbert-teret kapunk.

Jelölje $\mathfrak{D}_1$ a $\mathfrak{D}(A)$ halmaz $\mathfrak{H}_1$ -beli lezárását. A (2.3) egyenlőtlenség következtében bármelyik $f \in \mathfrak{D}(A)$ elemre

$$(2.5) \quad \sum_{v \in N} |c_v(f)|^2 \leq |f|_1^2.$$

Ebből adódik, hogy $c_v(f)$ ($v \in N$) lineáris, korlátos (folytonos) funkcionál a $\mathfrak{H}_1$ részhalmazzal tekintett $\mathfrak{D}(A)$ halmazon; következésképpen $c_v(f)$ a folytonosság megtartásával egyértelműen folytatható $\mathfrak{D}_1$ -re. Az is világos, hogy ennek során a (2. 5) összefüggés érvényes marad minden $f \in \mathfrak{D}_1$ elemre.

RIESZ FRIGYES lemmája alapján minden $v \in N$ index mellett található olyan $h_v \in \mathfrak{D}_1$, amelyre

$$(2. 6) \quad c_v(f) = (f, h_v)_1 \quad (f \in \mathfrak{D}_1).$$

Vezessük be tetszés szerinti $v \in N$ indexre a

$$(2. 7) \quad \gamma_v(f) = (f, h_v)_1 \quad (f \in \mathfrak{H}_1)$$

jelölést.

Legyen P_1 a $\mathfrak{H}_1$ tér $\mathfrak{D}_1$ -re való merőleges vetítésének operátora. Ekkor a (2. 6), (2. 7) egyenlőségek értelmében

$$\gamma_v(f) = \gamma_v(P_1 f) = c_v(P_1 f) \quad (f \in \mathfrak{H}_1, \quad v \in N),$$

tehát, figyelembe véve a (2. 5) egyenlőtlenséget, kapjuk:

$$(2. 8) \quad \sum_{v \in N} |\gamma_v(f)|^2 = \sum_{v \in N} |c_v(P_1 f)|^2 \leq |P_1 f|_1^2 \leq |f|_1^2 \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Legyen

$$A_1 f = A^0 f + \sum_{v \in N} \gamma_v(f) e_v \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Ha $g \in \mathfrak{D}(A)$, akkor $\gamma_v(g) = c_v(g)$, ennél fogva

$$(2. 9) \quad A_1 g = A g \quad (g \in \mathfrak{D}(A));$$

ezenkívül a (2. 8), (2. 4) összefüggések értelmében

$$|A_1 f|^2 = |A^0 f|^2 + \sum_{v \in N} |\gamma_v(f)|^2 \leq |A^0 f|^2 + |f|_1^2 = |f|^2,$$

vagyis

$$\|A_1\| = 1.$$

Tekintsük az A_1 operátor A_1^* adjungált operátorát. Figyelembe véve a (2. 1), (2. 2) egyenlőségeket azt találjuk, hogy $g \in \mathfrak{D}(A)$ esetén

$$(A_1^* g, f) = (g, A_1 f) = (g, A^0 f) = (A g, f) \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

és innen

$$(2. 10) \quad A_1^* g = A g \quad (g \in \mathfrak{D}(A)).$$

De akkor az

$$\tilde{A} = \frac{1}{2} (A_1 + A_1^*)$$

önadjungált operátor az A operátor kívánt tulajdonságú folytatása lesz, mert (2. 6), (2. 7) és (2. 10) értelmében

$$\tilde{A} g = A g \quad (g \in \mathfrak{D}(A)),$$

továbbá

$$1 = \|A\| \leq \|\tilde{A}\| \leq \frac{1}{2} (\|A_1\| + \|A_1^*\|) = 1,$$

azaz $\|\tilde{A}\| = 1$. A tételt bebizonyítottuk.

2. *A* torábbiakban mindig feltesszük, hogy *A* hermitikus operátor, amelyre

$$\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(\bar{A}) \neq \mathfrak{H} \quad \text{és} \quad \|A\| = 1.$$

Az $\mathfrak{N}$ betűvel $\mathfrak{D}(A)$ ortogonális komplementumát fogjuk jelölni:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{D}(A) \oplus \mathfrak{N}.$$

$\mathfrak{B}(A)$ -val fogjuk jelölni az *A* operátor összes olyan $\tilde{A}$ önadjungált folytatásainak a halmazát, amelyekre $\|\tilde{A}\| = 1$.

A 2. tétel értelmében a $\mathfrak{B}(A)$ halmaz nem üres; sőt, érvényes a következő

3. TÉTEL. *A* $\mathfrak{B}(A)$ halmaznak van A_μ minimális eleme és A_M maximális eleme, és $\mathfrak{B}(A)$ azokból és csak azokból az A' korlátos önadjungált operátorokból áll, amelyek eleget tesznek az

$$A_\mu \leq A' \leq A_M$$

feltételnek.

Bizonyítás. $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ esetén egy A' operátor akkor és csak akkor lesz *A* önadjungált folytatása, ha előállítható

$$A' = \tilde{A} + C$$

alakban, ahol *C* olyan önadjungált operátor, amely $\mathfrak{D}(A)$ elemein a nulla értéket veszi fel:

$$Cf = 0 \quad (f \in \mathfrak{D}(A)).$$

Az utóbbi feltétel ekvivalens azzal, hogy

$$(2.11) \quad \mathfrak{N}(C) \subset \mathfrak{N} \quad (\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}(A)).$$

Másrészt $\|A'\| \leq 1$ akkor és csak akkor, ha

$$|(A'f, f)| \leq |f|^2 \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

vagyis

$$-(f + \tilde{A}f, f) \leq (Cf, f) \leq (f - \tilde{A}f, f).$$

Az 1. tétel szerint az utóbbi egyenlőtlenségek a (2.11) feltétel mellett akkor és csak akkor teljesülnek, ha

$$(2.12) \quad -(I + \tilde{A})_{\mathfrak{N}} \leq C \leq (I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}}.$$

A (2.11), (2.12) feltételek fennállnak többek között akkor, ha *C* helyébe az $(I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}}$ vagy a $-(I + \tilde{A})_{\mathfrak{N}}$ operátort írjuk.

Ennélfogva az

$$(2.13) \quad A_\mu = \tilde{A} - (I + \tilde{A})_{\mathfrak{N}},$$

$$A_M = \tilde{A} + (I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}}$$

operátorok $\mathfrak{B}(A)$ -hoz tartoznak, és ha A' az *A* operátor valamelyik önadjungált folytatása, akkor az $A' \in \mathfrak{B}(A)$ összefüggés szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$(2.14) \quad A_\mu \leq A' \leq A_M$$

legyen.

A bizonyítás befejezése céljából már csak azt kell megmutatnunk, hogy minden a (2. 14) feltételt kielégítő A' önadjungált operátor A folytatása.

A (2. 14) egyenlőtlenségekből adódik, hogy

$$R = A' - A_\mu \cong 0, \quad R \cong A_M - A_\mu;$$

másrészt

$$A_\mu f = A_M f = A f \quad (f \in \mathfrak{D}(A))$$

miatt

$$0 \cong (Rf, f) \cong (A_M f, f) - (A_\mu f, f) = 0 \quad (f \in \mathfrak{D}(A)),$$

azaz $(Rf, f) = 0$ ($f \in \mathfrak{D}(A)$), és innen $R \cong 0$ felhasználásával

$$Rf = A'f - Af = 0.$$

A tételt bebizonyítottuk.

A (2. 13) képlet értelmében $\tilde{A} = A_\mu$ esetén

$$(2. 15) \quad (I + \tilde{A})_{\mathfrak{R}} = 0;$$

$\tilde{A} = A_M$ esetén pedig

$$(2. 16) \quad (I - \tilde{A})_{\mathfrak{R}} = 0.$$

Másrészt a $H_{\mathfrak{R}}$ operátor β) tulajdonsága (lásd 1. §) szerint a (2. 15), (2. 16) egyenlőségek rendre az

$$(2. 17) \quad \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}((I + \tilde{A})^\pm) = \{0\}, \quad \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}((I - \tilde{A})^\pm) = \{0\}$$

egyenlőségekkel ekvivalensek.

Ebből következik az alábbi

4. TÉTEL. Legyen $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$, és az $\tilde{A}$ operátor spektrális felbontása

$$(2. 18) \quad \tilde{A}f = \int_{-1}^1 \lambda dF(\lambda) f \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Ekkor $\tilde{A} = A_\mu$ (ill. $\tilde{A} = A_M$) teljesüléséhez szükséges és elégséges, hogy a

$$J(\varphi, \tilde{A}) = \int_{-1}^1 \frac{d|F(\lambda)\varphi|^2}{1+\lambda} \quad \text{ill.} \quad J(\varphi, -\tilde{A}) = \int_{-1}^1 \frac{d|F(\lambda)\varphi|^2}{1-\lambda}$$

integrál értéke ∞ legyen tetszés szerinti $\varphi \in \mathfrak{R}$ ($\varphi \neq 0$) elemre.

Az $\tilde{A}$ operátor akkor és csak akkor lesz A egyetlen ≤ 1 normájú önadjungált folytatása, ha egyidejűleg

$$J(\varphi, \tilde{A}) = J(\varphi, -\tilde{A}) = \infty \quad (0 \neq \varphi \in \mathfrak{R}).$$

Valóban, az $f \in \mathfrak{H}$ elem akkor tartozik az $\mathfrak{R}((I \pm \tilde{A})^\pm)$ halmazhoz, ha a megfelelő $J(f, \pm \tilde{A}) < \infty$ feltétel teljesül; így a tétel első állításában szereplő feltételek rendre ekvivalensek a (2. 17) feltételekkel. A tétel második állítása viszont következik az elsőből, mert $\mathfrak{B}(A)$ akkor és csak akkor áll az egyetlen $\tilde{A}$ operátorból, ha egyidejűleg $\tilde{A} = A_\mu$ és $\tilde{A} = A_M$.

3. Minden A hermitikus operátorhoz ($\|A\| \leq 1$) hozzá fogunk rendelni egy „skaláris szorzatot” és egy „normát” a következőképpen:

$$(g, f)_A = (g, f) + (Ag, f), \quad |g|_A = \sqrt{(g, g)_A} \quad (g, f \in \mathfrak{D}(A)).$$

Ekkor minden $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ folytatásnak ugyanezen képletek szerint megfelel egy $(g, f)_{\tilde{A}}$ skaláris szorzat és egy $|g|_{\tilde{A}}$ norma ($g, f \in \mathfrak{H}$), és ezek a $(g, f)_A$ skaláris szorzat ill. a $|g|_A$ norma folytatását képezik.

A (2. 17) Lépletek közül az elsőből könnyen következik az alábbi

5. TÉTEL. Ahhoz, hogy egy $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ operátor megegyezzen az A_μ operátorral, szükséges és elégséges, hogy $\mathfrak{D}(A)$ sűrű legyen $\mathfrak{H}$ -ban az $|f|_{\tilde{A}}$ normára vonatkozóan.

Bizonyítás. A (2. 15) összefüggés értelmében az $\tilde{A} = A_\mu$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy

$$H_{\mathfrak{N}} = 0,$$

ahol $H = I + \tilde{A}$.

Másrészt tekintettel arra, hogy $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}$, az 1. tétel bizonyítása során tett megállapítás alapján tetszés szerinti $f \in \mathfrak{H}$ elemre

$$(Hf, f) = \inf_{g \in \mathfrak{D}(A)} (H(f-g), f-g) = \inf_{g \in \mathfrak{D}(A)} |f-g|_{\tilde{A}}^2,$$

ebből pedig nyerjük a tételt.

4. Most olyan kritériumot fogunk adni arra, hogy csak egy $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ operátor létezzék, amelyben csak az A operátor szerepel (nem pedig valamelyik folytatása).

Előzetesen megjegyezzük, hogy ha az (1. 14) összefüggést a $H = I - \tilde{A}^2$ operátorra alkalmazzuk, ahol $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ spektrális felbontását a (2. 18) képlet szolgáltatja, akkor a következőt kapjuk:

$$(2. 19) \quad \sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{|(f, \varphi)|^2}{|f|^2 - |\tilde{A}f|^2} = \int_{-1}^1 \frac{d|F(\lambda)\varphi|^2}{1-\lambda^2} \quad (\varphi \in \mathfrak{H}),$$

ha pedig itt φ helyébe az $\tilde{A}\varphi$ elemet írjuk, azt nyerjük, hogy

$$(2. 20) \quad \sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{|(\tilde{A}f, \varphi)|^2}{|f|^2 - |\tilde{A}f|^2} = \int_{-1}^1 \frac{\lambda^2 d|F(\lambda)\varphi|^2}{1-\lambda^2} \quad (\varphi \in \mathfrak{H}).$$

6. TÉTEL. Ahhoz, hogy az A hermitikus operátornak ($\|A\| \leq 1$) egyetlen olyan $\tilde{A}$ önadjungált folytatása legyen, amelynek a normája ≤ 1 , szükséges és elégséges, hogy minden $\varphi \perp \mathfrak{D}(A)$ ($\varphi \neq 0$) vektorra teljesüljön a

$$(2. 21) \quad \sup_{f \in \mathfrak{D}(A)} \frac{|(Af, \varphi)|^2}{|f|^2 - |Af|^2} = \infty$$

feltétel.

Bizonyítás. Először mutassuk meg, hogy $A_\mu < A_M$ esetén a (2. 21) feltétel nem teljesül minden $\varphi \perp \mathfrak{D}(A)$ (vagyis $\varphi \in \mathfrak{N}$) elemre.

Valóban, ha $A_\mu < A_M$, akkor az

$$\tilde{A} = \frac{1}{2} (A_\mu + A_M)$$

választás mellett (2. 13) alapján

$$\frac{1}{2} (A_M - A_\mu) = A_M - \tilde{A} = \tilde{A} - A_\mu = (I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}} = (I + \tilde{A})_{\mathfrak{N}}.$$

Legyen a $\chi_0 \in \mathfrak{N}$ elem olyan, hogy

$$\varphi_0 = (I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}} \chi_0 = (I + \tilde{A})_{\mathfrak{N}} \chi_0 \neq 0;$$

akkor $\varphi_0 \in \mathfrak{N}$, és az 1. tétel értelmében

$$\varphi_0 \in \mathfrak{N} [(I - \tilde{A})^\sharp], \quad \varphi_0 \in \mathfrak{N} [(I + \tilde{A})^\sharp],$$

tehát

$$\int_{-1}^1 \frac{d|F(\lambda)| \varphi_0|^2}{1 \pm \lambda} < \infty.$$

Ebből (2. 20) segítségével kapjuk:

$$\sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{|(\tilde{A}f, \varphi_0)|^2}{|f|^2 - |\tilde{A}f|^2} < \infty,$$

és így még inkább

$$(2. 22) \quad \sup_{f \in \mathfrak{D}(A)} \frac{|(Af, \varphi_0)|^2}{|f|^2 - |Af|^2} < \infty.$$

Ezek szerint a tételben szereplő feltétel elégséges ahhoz, hogy $A_\mu = A_M$ legyen.

Most be fogjuk bizonyítani, hogy a feltétel szükséges is. Ehhez azt kell megmutatni, hogy ha egy $\varphi_0 \in \mathfrak{N}$ ($\varphi_0 \neq 0$) elemre teljesül a (2. 22) feltétel, akkor $A_\mu < A_M$.

Tetszés szerinti $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ operátorból kiindulva vezessünk be a $\mathfrak{H}$ térben egy új $(g, f)_1$ skaláris szorzatot és egy új $|g|_1$ normát a következőképpen:

$$(g, f)_1 = (g, f) - (\tilde{A}g, \tilde{A}f), \quad |g|_1 = \sqrt{(g, g)_1} \quad (g, f \in \mathfrak{H}).$$

Mint hogy $f \in \mathfrak{D}(A)$ esetén $\tilde{A}f = Af$, a (2. 22) feltétel azt jelenti, hogy a

$$c(f) = (Af, \varphi_0) \quad (f \in \mathfrak{D}(A))$$

funkcionál a $\mathfrak{D}(A)$ lineáris halmazon az $|f|_1$ normára nézve folytonos. Jelentse $\tilde{c}(f)$ ($f \in \mathfrak{H}$) ennek a funkcionálnak az egész $\mathfrak{H}$ térre való lineáris és az $|f|_1$ normára nézve folytonos kiterjesztését. Ekkor fennáll

$$(2. 23) \quad |\tilde{c}(f)| \leq \gamma |f|_1 \leq \gamma |f| \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

ahol $\gamma > 0$ állandó. Ebből következik, hogy a $\tilde{c}(f)$ funkcionál a régi normára nézve is folytonos, tehát található olyan $h \in \mathfrak{H}$ elem, hogy

$$(2. 24) \quad \tilde{c}(f) = (f, h) \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

De akkor (2. 19) és (2. 23) értelmében

$$\int_{-1}^1 \frac{d|F(\lambda)h|^2}{1-\lambda^2} = \sup \frac{|\tilde{c}(f)|^2}{|f|_1^2} \leq \gamma^2,$$

és így

$$(2. 25) \quad \int_{-1}^1 \frac{d|F(\lambda)h|^2}{1\pm\lambda} < \infty.$$

Másrészt tekintettel arra, hogy

$$(f, h - \tilde{A}\varphi_0) = (f, h) - (Af, \varphi_0) = \tilde{c}(f) - c(f) = 0 \quad (f \in \mathfrak{D}(A)),$$

vagyis $h - \tilde{A}\varphi_0 \perp \mathfrak{D}(A)$, kapjuk:

$$h = \tilde{A}\varphi_0 - \varphi_1 \quad (\varphi_1 \in \mathfrak{N}).$$

Továbbá ha az

$$\left(\int_{-1}^1 \frac{d|F(\lambda)(g-h)|^2}{1\pm\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{-1}^1 \frac{d|F(\lambda)g|^2}{1\pm\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-1}^1 \frac{d|F(\lambda)h|^2}{1\pm\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}$$

egyenlőtlenségben a

$$g = \tilde{A}\varphi_0 \pm \varphi_0, \quad g-h = \varphi_1 \pm \varphi_0$$

választással élünk, akkor a (2. 25) képlet és az

$$\int_{-1}^1 \frac{d|F(\lambda)g|^2}{1\pm\lambda} = \int_{-1}^1 (1\pm\lambda) d|F(\lambda)\varphi_0|^2 < \infty$$

összefüggés felhasználásával azt nyerjük, hogy

$$\int_{-1}^1 \frac{d|F(\lambda)(\varphi_1 \pm \varphi_0)|^2}{1\pm\lambda} < \infty.$$

Minthogy $\varphi_1 \pm \varphi_0 \in \mathfrak{N}$ és a $\varphi_1 \pm \varphi_0$ vektorok közül legalább az egyik nem nulla (mert $\varphi_0 \neq 0$), a 4. tétel szerint $\mathfrak{B}(A)$ tartalmaz $\tilde{A}$ -tól különböző operátorokat, vagyis $A_\mu < A_M$.

A tételt bebizonyítottuk.

5. A $\mathfrak{D}(A) \neq \mathfrak{H}$ zárt halmazon értelmezett A hermitikus operátort egyszerűnek fogjuk nevezni, ha $\mathfrak{D}(A)$ nem tartalmaz egyetlen, A -ra nézve invariáns lineáris alteret sem.

Ha az A operátor nem egyszerű, akkor az összes $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{D}(A)$ invariáns alterek halmazelméleti összege maximális invariáns $\mathfrak{L}_M$ alteret alkot. Ebben az esetben a $\mathfrak{H}$ teret és a $\mathfrak{D}(A)$ alteret

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_M \oplus \mathfrak{H}_1, \quad \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{L}_M \oplus \mathfrak{D}_1 \quad (\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{H}_1)$$

alakú ortogonális direkt összegként előállítva az A operátor összes lehetséges $\tilde{A}$ önadjungált folytatásai ($\|\tilde{A}\| \leq 1$) megkeresésének a feladatát visszavezethetjük a $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}(A_1)$ halmazon értelmezett és ott az A operátorral megegyező, tehát már $\mathfrak{H}_1$ -beli értékészlettel rendelkező A_1 operátor összes $\tilde{A}_1$ önadjungált folytatásainak ($\|\tilde{A}_1\| \leq 1$) a megkeresésére.¹⁰

Természetes módon adódik a következő kérdés: van-e minden egyszerű A operátornak ($\|A\| \leq 1$) egyszerű spektrumú $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ folytatása? Meg lehet mutatni, hogy a válasz tagadó. Ha azonban $\mathfrak{D}(A)$ ortogonális komplementuma egydimenziós, akkor bármelyik

$$\tilde{A}f = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dF(\lambda)f \quad (f \in \mathfrak{H})$$

önadjungált folytatásnak egyszerű spektruma van.

Valóban, legyen $\varphi \perp \mathfrak{D}(A)$ ($\varphi \neq 0$). Tekintsük az $F(\lambda)\varphi$ ($-\infty < \lambda < \infty$) halmaz $\mathfrak{H}_0$ zárt lineáris burkát és ennek ortogonális komplementumát, $\mathfrak{N}$ -et: $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{N}$. Mint ismeretes, $\tilde{A}\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_0$ és $\tilde{A}\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}$. Másrészt $\varphi \in \mathfrak{H}_0$ miatt $\varphi \perp \mathfrak{N}$, és így $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{D}(A)$. De A egyszerű operátor, azaz $\mathfrak{N} = \{0\}$, $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$, és ebből következik az állítás helyesége.

A 4. tételre támaszkodva nem nehéz példát szerkeszteni olyan egyszerű hermitikus A operátorokra ($\|A\| \leq 1$), amelyeknél az alábbi esetek egyike vagy másika áll fenn:

$$1) A_\mu = A_M, \quad 2) A_\mu < A_M.$$

Először is megjegyezzük, hogy ha a $-1, 1$ pontok közül akár csak az egyik is nem tartozik valamilyen $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ folytatás spektrumához, akkor biztosan a 2) esettel van dolgunk. Csakugyan, ilyenkor tetszés szerinti $\varphi \in \mathfrak{H}$ elemre a $J(\varphi, \pm A)$ integrálok közül az egyik véges, tehát az állítás a 4. tételből adódik.

Ezek szerint ha $\|A\| < 1$, akkor mindig a 2) eset áll fenn, mert a 2. tétel értelmében van olyan $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ operátor, amelyre $\|\tilde{A}\| = \|A\| = l < 1$, és így $\tilde{A}$ spektruma a $[-l, l]$ intervallumban helyezkedik el.

Ha $\|A\| = 1$ és a $-1, 1$ pontok mindketten hozzátartoznak egy $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ spektrumához, akkor mindkét eset lehetséges.

Valóban, legyen B önadjungált operátor a

$$Bf = \int_{-1}^1 \lambda dF(\lambda)f \quad (f \in \mathfrak{H})$$

spektrális felbontással, és tegyük fel, hogy a $-1, 1$ pontok B spektrumához tartoznak. Ekkor mindig található olyan $\varphi_0 \in \mathfrak{H}$, hogy egyidejűleg

$$J(\varphi_0, \pm B) = \int_{-1}^1 \frac{d|F(\lambda)\varphi_0|^2}{1 \pm \lambda} = \infty.$$

¹⁰ Speciálisan ez az oka annak, hogy az $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ operátorok általános alakjának a meghatározására vonatkozó feladat teljesen triviálisan oldható meg, ha $\mathfrak{D}(A)$ invariáns A -ra nézve, vagyis ha A önadjungált operátor $\mathfrak{D}(A)$ -ban.

Jelöljük $\mathfrak{D}$ -vel azoknak az f vektoroknak az összességét, amelyek ortogonálisak φ_0 -ra, és értelmezzünk egy A operátort az $Af = Bf$ ($f \in \mathfrak{D}$) képlettel. Ekkor a 4. tétel szerint B az A operátor egyetlen olyan önadjungált folytatása lesz, amelynek a normája ≤ 1 ($A_\mu = A_M = B$).

Megfordítva, ha a $\varphi_0 \neq 0$ elemet úgy választjuk meg, hogy a $J(\varphi_0, \pm B)$ integrálok közül legalább az egyik véges legyen, akkor a 2) eset fog fennállni ($A_\mu < A_M$).

Ha ezenkívül a B operátornak egyszerű spektruma van, akkor φ_0 egyik vagy másik esetnek megfelelő megválasztása során szorítkozhatunk azokra a $\varphi \in \mathfrak{H}$ elemekre, amelyekre az $F(\lambda)\varphi$ ($-1 \leq \lambda \leq 1$) halmaz zárt lineáris burka megegyezik $\mathfrak{H}$ -val; így az A operátor egyszerű lesz.

Ennek az állításnak a belátása céljából megjegyezzük, hogy ha egy $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{D}$ zárt lineáris halmazra $A\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{Q}$, tehát egyúttal $B\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{Q}$, akkor fennállnak az $F(\lambda)\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{Q}$ ($-1 \leq \lambda \leq 1$) összefüggések is. Másrészt a konstrukció alapján $\mathfrak{D} \perp \varphi_0$, és ennél fogva $\varphi_0 \perp F(\lambda)\mathfrak{Q}$ ($-1 \leq \lambda \leq 1$), azaz tetszés szerinti $f \in \mathfrak{Q}$ elemre

$$(\varphi_0, F(\lambda)f) = (F(\lambda)\varphi_0, f) = 0 \quad (-1 \leq \lambda \leq 1).$$

Ezek szerint ha a φ_0 elemet úgy választottuk, hogy az $F(\lambda)\varphi_0$ ($-1 \leq \lambda \leq 1$) elemek zárt lineáris burka az egész $\mathfrak{H}$ tér, akkor $\varphi_0 = 0$, tehát $\mathfrak{Q} = \{0\}$, vagyis az A operátor egyszerű.

3. §. Pozitív operátorok pozitív önadjungált folytatásai

1. Az $S (\neq 0)$ (korlátos vagy nem korlátos) hermitikus operátort pozitívnak mondjuk (jelben: $S > 0$), ha

$$(3.1) \quad (Sf, f) \geq 0 \quad (f \in \mathfrak{D}(S)).$$

A (3.1) képletből következik, hogy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} |f + Sf|^2 &= |f|^2 + 2(Sf, f) + |Sf|^2 \geq |f|^2, \\ |f + Sf|^2 &\geq |f|^2 - 2(Sf, f) + |Sf|^2 = |f - Sf|^2. \end{aligned}$$

Ennélfogva az

$$(3.3) \quad A(f + Sf) = f - Sf \quad (f \in \mathfrak{D}(S))$$

képlet útján az S operátorhoz hozzárendelhetünk egy $A = A(S)$ operátort, amelynek értelmezési tartománya

$$\mathfrak{D}(A) = (I + S)\mathfrak{D}(S),$$

és amely a következő két tulajdonsággal rendelkezik:

$$(3.4) \quad 1) \|A\| \leq 1, \quad 2) Ag + g \neq 0 \quad (g \in \mathfrak{D}(A), \quad g \neq 0).$$

A (3.2) egyenlőtlenségek közül az első azt mutatja, hogy $I + S$ a $\mathfrak{D}(S)$ halmazt kölcsönösen egyértelműen képezi le a $\mathfrak{D}(A)$ halmazra. Igazoljuk még az A operátor 2) tulajdonságát. Ha $g \in \mathfrak{D}(A)$, $g \neq 0$, akkor található olyan $f \in \mathfrak{D}(S)$, $f \neq 0$, hogy $g = f + Sf$, tehát (3.3) értelmében

$$Ag + g = 2f \neq 0.$$

Megjegyezzük azt is, hogy A , ugyanúgy mint S , hermitikus operátor. Valóban, ha $g_k \in \mathfrak{D}(A)$ ($k=1, 2$), akkor

$$g_k = f_k + Sf_k \quad (f_k \in \mathfrak{D}(S), k=1, 2),$$

tehát

$$\begin{aligned} (Ag_1, g_2) &= (f_1 - Sf_1, f_2 + Sf_2) = (f_1, f_2) - (Sf_1, Sf_2) = \\ &= (f_1 + Sf_1, f_2 - Sf_2) = (g_1, Ag_2). \end{aligned}$$

Az A és az S operátor közt fennálló (3. 3) kapcsolatot a következőképpen is fel lehet írni:

$$A = (I - S)(I + S)^{-1}.$$

Könnyen belátható, hogy az A operátor ismeretében mindig meg lehet határozni S -et. Ha $f \in \mathfrak{D}(S)$, akkor a

$$g = f + Sf, \quad Ag = f - Sf$$

összefüggésekből

$$f = \frac{1}{2}(g + Ag), \quad Sf = \frac{1}{2}(g - Ag).$$

Felhasználva, hogy mialatt g befutja a $\mathfrak{D}(A)$ halmazt, azalatt f befutja a $\mathfrak{D}(S)$ halmazt, arra a következtetésre jutunk, hogy az S operátort teljesen meghatározza az

$$(3. 5) \quad S(g + Ag) = g - Ag \quad (g \in \mathfrak{D}(A))$$

egyenlőség, amelyet még a következő alakban is felírhatunk:

$$S = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

Most legyen A tetszés szerinti, a (3. 4) tulajdonságokkal rendelkező hermitikus operátor. Megmutatjuk, hogy a (3. 5) egyenlőség egy pozitív hermitikus S operátort definiál, amelyből A a (3. 3) képlet szerint nyerhető.

Valóban, a (3. 5) egyenlőség olyan S operátort értelmű, amelynek $\mathfrak{D}(S)$ értelmezési tartománya a $\mathfrak{D}(A)$ halmazból az $I + A$ operátor által létesített kölcsönösen egyértelmű leképezés során keletkezik, azaz

$$\mathfrak{D}(S) = (I + A)\mathfrak{D}(A).$$

Minthogy a (3. 5) egyenlőség csak abban különbözik a (3. 3) egyenlőségtől, hogy A és S szerepe fel van cserélve, azért S -re elvégezve ugyanazokat a megfontolásokat, mint amelyeket korábban A -ra alkalmaztunk, azt kapjuk, hogy S hermitikus operátor és fennáll a (3. 3) összefüggés.

Hátra van még annak az igazolása, hogy S -re teljesül a (3. 1) feltétel. Ennek érdekében megjegyezzük, hogy $f \in \mathfrak{D}(S)$ esetén található olyan $g \in \mathfrak{D}(A)$ elem, amelyre $f = g + Ag$, és ekkor a (3. 5) definíció szerint $Sf = g - Ag$; következésképpen

$$(Sf, f) = (g - Ag, g + Ag) = |g|^2 - |Ag|^2 \geq 0.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A most bizonyított állítás és az 1. tétel segítségével nem nehéz bebizonyítani az alábbi tételt, amelyet sejtésként NEUMANN JÁNOS [1] mondott ki, majd M. H. STONE (lásd [7], 9. 21. tétel) és K. FRIEDRICHS [2] bizonyított be.

7. TÉTEL. Minden a $\mathfrak{H}$ térben sűrű $\mathfrak{D}(S)$ értelmezési tartománnyal rendelkező S pozitív hermitikus operátornak van legalább egy pozitív önadjungált folytatása.

*Bizonyítás.*¹¹ Képezzük az S operátor segítségével az $A = (I - S)(I + S)^{-1}$ hermitikus operátort, amelyre, mint tudjuk, $\|A\| \leq 1$. Legyen $\tilde{A}$ az A operátor valamelyik önadjungált folytatása, amelyre $\|\tilde{A}\| \leq 1$. Könnyű belátni, hogy

$$(3.6) \quad \tilde{A}g + g \neq 0, \quad \text{ha} \quad g \neq 0 \quad (g \in \mathfrak{H}).$$

Csakugyan, ha feltesszük, hogy egy $\varphi \neq 0$ elemre $\tilde{A}\varphi + \varphi = 0$, akkor bármely $g \in \mathfrak{H}$ esetén $(\varphi, g + \tilde{A}g) = (\varphi + \tilde{A}\varphi, g) = 0$, tehát még inkább $(\varphi, g + Ag) = 0$, ha $g \in \mathfrak{D}(A)$, vagyis $\varphi \perp (I + A)\mathfrak{D}(A)$. De $(I + A)\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(S)$, a $\mathfrak{D}(S)$ halmaz pedig, mindenütt sűrű lévén $\mathfrak{H}$ -ban, nem lehet ortogonális a $\varphi \neq 0$ elemre. Ellentmondásra jutottunk.

Mínthogy $\tilde{A}$ rendelkezik a (3.4) tulajdonságokkal, képezhető az $\tilde{S} = (I - \tilde{A})(I + \tilde{A})^{-1}$ pozitív hermitikus operátor, amely nyilvánvalóan az $S = (I - A)(I + A)^{-1}$ operátor folytatása. Mínthogy továbbá az $\tilde{A}$ operátor önadjungált és a -1 pont (3.6) értelmében nem tartozik $\tilde{A}$ pontspektrumához, azért az $(I + \tilde{A})^{-1}$ operátor, és vele együtt az

$$\tilde{S} = 2(I + \tilde{A})^{-1} - I$$

operátor is önadjungált.

A tételt bebizonyítottuk.

Az előbbi megfontolások alapján az is világos, hogy az

$$\tilde{S} = (I - \tilde{A})(I + \tilde{A})^{-1}$$

képlettel megadott folytatások, ahol

$$\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A), \quad A = (I - S)(I + S)^{-1},$$

kimerítik az $S > 0$ hermitikus operátor pozitív önadjungált folytatásainak az összességét. Ezt az összességet a továbbiakban a $\mathfrak{P}(S)$ jellel fogjuk jelölni.

Mielőtt áttérnénk a $\mathfrak{P}(S)$ halmaz tanulmányozására, megemlítjük, hogy a 7. tételt ki lehet mondani kissé általánosabb alakban is, félig korlátos operátorokra.

A T hermitikus operátort alulról félig korlátosnak nevezzük, ha

$$m(T) = \inf_{f \in \mathfrak{D}(T)} \frac{(Tf, f)}{(f, f)} > -\infty.$$

7'. TÉTEL. Minden a $\mathfrak{H}$ térben sűrű $\mathfrak{D}(T)$ értelmezési tartománnyal rendelkező alulról félig korlátos hermitikus T operátornak van legalább egy alulról félig korlátos önadjungált $\tilde{T}$ folytatása, amelyre $m(\tilde{T}) = m(T)$.

Valóban, az

$$S = T - m(T)I$$

¹¹ H. FREUDENTHAL [12] is ajánlott egy egyszerű bizonyítást. Ez K. FRIEDRICHS ötletein alapszik, és szintén nem teszi lehetővé az S operátor összes pozitív önadjungált folytatásainak leírását.

hermitikus operátor pozitív és $\overline{\mathfrak{D}(S)} = \overline{\mathfrak{D}(T)} = \mathfrak{H}$, tehát van pozitív önadjungált $\tilde{S}$ folytatása, és ekkor

$$\tilde{T} = \tilde{S} + m(T)I$$

a T operátor kívánt, alulról félig korlátos önadjungált folytatása lesz.

2. Az $\tilde{S} \in \mathfrak{P}(S)$ önadjungált folytatások tanulmányozása során az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az S hermitikus operátor zárt, vagyis a $\mathfrak{D}(S)$ értelmezési tartomány az

$$|f|_S = \sqrt{|f|^2 + |Sf|^2}$$

normára nézve teljes normált tér. Minthogy

$$|Sf + f|^2 = |Sf|^2 + 2(Sf, f) + |f|^2 \geq |Sf|^2 + |f|^2,$$

$$|Sf + f|^2 \leq |Sf|^2 + 2|Sf| \cdot |f| + |f|^2 \leq 2(|Sf|^2 + |f|^2),$$

azért a

$$g = Sf + f \quad (f \in \mathfrak{D}(S))$$

lineáris transzformáció, amely a $\mathfrak{D}(S)$ halmazzal kölcsönösen egyértelműen a $\mathfrak{D}(A)$ halmazra képezi le, rendelkezik az

$$|f|_S \leq |g| \leq \sqrt{2} |f|_S$$

tulajdonsággal, és így mindkét irányban folytonos megfeleltetést létesít az $(|f|_S)$ normával ellátott $\mathfrak{D}(S)$ és az $(|f|)$ normával ellátott $\mathfrak{D}(A)$ halmaz között. Ennélfogva ha S zárt operátor, akkor $\mathfrak{D}(A)$ zárt halmaz $\mathfrak{H}$ -ban (egyébként ennek a megfordítása is igaz).

Ha $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{H}$, akkor A önadjungált operátor és S is ilyen.

Következésképpen ha $S \neq S^*$, akkor a $\mathfrak{D}(A)$ halmaz $\mathfrak{N}_{-1}$ ortogonális komplementumának n dimenziója nem egyenlő nullával.

Megjegyezzük, hogy $\mathfrak{N}_{-1}$ azonos az

$$S^*\varphi + \varphi = 0$$

egyenlet összes megoldásainak halmazával. Ezek szerint $\mathfrak{N}_{-1}$ az S^* operátor -1 sajátértékhez tartozó sajátaltére. Könnyen belátható, hogy ennek a dimenziója megegyezik az S^* operátor tetszés szerinti $z \notin [0, +\infty)$ komplex számhoz tartozó $\mathfrak{N}_z$ sajátalterének $n(\mathfrak{N}_z)$ dimenziójával.

Legyen $\tilde{S}$ az S operátor valamelyik pozitív önadjungált folytatása, és legyen $\tilde{S}$ spektrális felbontása

$$\tilde{S}f = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)f \quad (f \in \mathfrak{D}(\tilde{S})).$$

Legyen $z \notin [0, +\infty)$ és

$$Vf = \int_0^\infty \frac{\lambda + 1}{\lambda - z} dE(\lambda)f \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Nyilvánvaló, hogy V folytonos és van folytonos V^{-1} inverz operátora, továbbá

$$V^{-1}f = \int_0^{\infty} \frac{\lambda - z}{\lambda + 1} dE(\lambda)f, \quad V^*f = \int_0^{\infty} \frac{\lambda + 1}{\lambda - \bar{z}} dE(\lambda)f \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Ha $\varphi \in \mathfrak{N}_z$, azaz $S^*\varphi - z\varphi = 0$, akkor

$$(Sf - \bar{z}f, \varphi) = 0, \quad (V^*(Sf - \bar{z}f), V^{-1}\varphi) = 0 \quad (f \in \mathfrak{D}(S)).$$

De

$$V^*(Sf - \bar{z}f) = Sf + f \quad (f \in \mathfrak{D}(S)),$$

és így

$$(Sf + f, V^{-1}\varphi) = 0 \quad (f \in \mathfrak{D}(S)).$$

Tehát

$$V^{-1}\varphi \in \mathfrak{N}_{-1}, \quad \text{vagyis} \quad V^{-1}\mathfrak{N}_z \subset \mathfrak{N}_{-1}.$$

Felcserélve -1 és z , valamint V^{-1} és V szerepét azt kapjuk, hogy

$$V\mathfrak{N}_{-1} \subset \mathfrak{N}_z.$$

Ennélfogva

$$V\mathfrak{N}_{-1} = \mathfrak{N}_z, \quad V^{-1}\mathfrak{N}_z = \mathfrak{N}_{-1},$$

vagyis a V operátor kölcsönösen egyértelmű folytonos lineáris megfeleltetést létesít az $\mathfrak{N}_{-1}$ és az $\mathfrak{N}_z$ zárt altér között, úgyhogy

$$\dim \mathfrak{N}_z = \dim \mathfrak{N}_{-1} \quad (z \notin [0, +\infty)).$$

Ezek szerint az S pozitív hermitikus operátor defektus-indexe mindig (n, n) , ahol $n = \dim \mathfrak{N}_{-1}$.

3. Az $\tilde{S} \in \mathfrak{P}(S)$ önadjungált folytatások közül kitüntetünk két „szélső” önadjungált folytatást:

$$S_\mu = (I - A_\mu)(I + A_\mu)^{-1}, \quad S_M = (I - A_M)(I + A_M)^{-1},$$

ahol A_μ és A_M az

$$A = (I - S)(I + S)^{-1}$$

operátor ≤ 1 normájú minimális ill. maximális önadjungált folytatása.

Az S_μ operátort S durva folytatásának, az S_M operátort pedig S finom folytatásának fogjuk nevezni.

Ha $S_\mu = S_M$, és csak ekkor, S -nek egyetlen pozitív önadjungált folytatása van.

A 4. tételből egyszerű transzformációk segítségével nyerjük az alábbi tételt.

8. TÉTEL. Legyen S ($\mathfrak{D}(S) = \mathfrak{H}$) pozitív hermitikus operátor, $\mathfrak{N}_{-a}$ (a tetszőszerinti pozitív szám) az

$$S^*\varphi + a\varphi = 0$$

egyenlet összes φ megoldásaiból álló halmaz, továbbá $\tilde{S}$ egy $\mathfrak{P}(S)$ -hez tartozó operátor, amelynek spektrális felbontása

$$(3.7) \quad \tilde{S}f = \int_0^{\infty} \lambda dE(\lambda)f \quad (f \in \mathfrak{D}(\tilde{S})).$$

Ekkor az $\tilde{S} = S_\mu$ ($\tilde{S} = S_M$) egyenlőség teljesüléséhez szükséges és elégséges, hogy bármelyik $\varphi \in \mathfrak{N}_{-a}$ elemre

$$(3.8) \quad \int_0^\infty \lambda d|E(\lambda)\varphi|^2 = \infty \quad \left(\text{ill.} \quad \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} d|E(\lambda)\varphi|^2 = \infty \right)$$

legyen.

Ennélfogva az $\tilde{S}$ operátor akkor és csak akkor lesz az S operátor egyetlen pozitív önadjungált folytatása, ha

$$\int_0^\infty \lambda d|E(\lambda)\varphi|^2 = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} d|E(\lambda)\varphi|^2 = \infty \quad (\varphi \in \mathfrak{N}_{-a}).$$

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a=1$, mert különben az S operátort helyettesíthetjük az $S_1 = \frac{1}{a} S$ operátorral, amelyre $\mathfrak{N}_{-1}(S_1) = \mathfrak{N}_{-a}(S)$.

De $a=1$ esetén $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{-a}$ megegyezik $\mathfrak{D}(A)$ ortogonális komplementumával. Másrészt a 4. tétel értelmében az

$$\tilde{A} = (I - \tilde{S})(I + \tilde{S})^{-1}$$

operátor akkor azonos A_μ -vel, ha

$$(3.9) \quad J(\varphi; \tilde{A}) = 0 \quad (\varphi \in \mathfrak{N}),$$

és akkor azonos A_M -mel, ha

$$(3.9') \quad J(\varphi; -\tilde{A}) = 0 \quad (\varphi \in \mathfrak{N}).$$

Minthogy pedig a (3.7) felbontás alapján

$$\tilde{A}f = \int_0^\infty \frac{1-\lambda}{1+\lambda} dE(\lambda)f = \int_{-1}^1 \mu dF(\mu)f \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

ahol

$$F(\mu) = I - E(\lambda) \quad \left(\mu = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad 0 \leq \lambda < \infty \right),$$

azért

$$\begin{aligned} J(\varphi; \pm \tilde{A}) &= \int_{-1}^1 \frac{d|F(\mu)\varphi|^2}{1 \pm \mu} = \frac{1}{2} \int_0^\infty (1 + \lambda^{\pm 1}) d|E(\lambda)\varphi|^2 = \\ &= \frac{1}{2} |\varphi|^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda^{\pm 1} d|E(\lambda)\varphi|^2. \end{aligned}$$

Ily módon a (3. 9), (3. 9') feltételek rendre ekvivalensek a (3. 8) alatti feltételekkel. A tételt bebizonyítottuk.

4. A 6. tétel lehetővé teszi, hogy egészen egyszerű kritériumot adjunk arra, hogy S -nek egyetlen pozitív önadjungált folytatása létezzék.

9. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az S pozitív operátornak $(\overline{\mathfrak{D}(S)} = \mathfrak{H}, S \neq S^*)$ csak egyetlen $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatása legyen, szükséges és elégséges, hogy tetszés szerinti $\varphi \in \mathfrak{N}_a$ elemre (a bárhogyan választott pozitív szám) fennálljon az*

$$(3. 10) \quad \inf_{f \in \mathfrak{D}(S)} \frac{(Sf, f)}{|(f, \varphi)|^2} = 0$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a=1$.

A 9. tétel be lesz bizonyítva, ha megmutatjuk, hogy $A = (I - S)(I + S)^{-1}$ esetén (3. 10) ekvivalens a 6. tételben szereplő (2. 21) feltétellel. De ha $S^*\varphi + \varphi = 0$, akkor $\varphi \perp f + Sf$ minden $f \in \mathfrak{D}(S)$ elem mellett, következésképpen

$$(Sf, \varphi) = -(f, \varphi), \quad (f, \varphi) = -\frac{1}{2} (Sf - f, \varphi) = \frac{1}{2} (Ag, f),$$

ahol $g = f + Sf$. Másrészt $g = f + Sf$ ($Ag = f - Sf$) esetén

$$4(Sf, f) = |g|^2 - |Ag|^2.$$

Visszaemlékezve még arra, hogy ha f befutja $\mathfrak{D}(S)$ -et, akkor $g = f + Sf$ befutja a $\mathfrak{D}(A)$ halmazt, nyerjük:

$$\sup_{f \in \mathfrak{D}(S)} \frac{|(f, \varphi)|^2}{(Sf, f)} = \sup_{g \in \mathfrak{D}(A)} \frac{|(Ag, \varphi)|^2}{|g|^2 - |Ag|^2} \quad (\varphi \in \mathfrak{N}_{-1}).$$

A tételt bebizonyítottuk.

5. A 9. tételből következik, hogy ha az S operátorra $(\overline{\mathfrak{D}(S)} = \mathfrak{H}; S \neq S^*)$ az

$$m(S) = \inf_{f \in \mathfrak{D}(S)} \frac{(Sf, f)}{(f, f)}$$

mennyiség pozitív, akkor $S_\mu \neq S_M$. Valóban,

$$\sup_{f \in \mathfrak{D}(S)} \frac{|(f, \varphi)|^2}{(Sf, f)} \leq |\varphi|^2 \sup_{f \in \mathfrak{D}(S)} \frac{(f, f)}{(Sf, f)} = \frac{|\varphi|^2}{m(S)}.$$

Ily módon az $m(S)=0$ feltétel szükséges ahhoz, hogy az S operátornak csak egy pozitív önadjungált folytatása legyen.

Ez a feltétel azonban nem elégséges, még abban az esetben sem, amikor az S operátor egyszerű¹². Ezt könnyen ki lehet mutatni a 4. § végén példaként ismer-

¹² Nem egyszerű S hermitikus operátorra az állítás triviális (lásd [12]). Az $S(\neq S^*)$ hermitikus operátort akkor nevezik egyszerűnek, ha $\mathfrak{H}$ nem tartalmaz olyan $\mathfrak{L}$ alteret, amely redukálja S -et és amelyben S önadjungált operátor.

tetett A operátorok felhasználásával, mi azonban ezektől függetlenül fogjuk a bizonyítást elvégezni.

Legyen H egy nem korlátos pozitív önadjungált operátor, amelynek a 0 pontot tartalmazó egyszerű folytonos spektruma van, és legyen H spektrális felbontása

$$Hf = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)f \quad (f \in \mathfrak{D}(H)).$$

Válasszunk φ ($|\varphi|=1$) gyanánt egy olyan vektort, amelyre az $E(\lambda)\varphi$ ($0 \leq \lambda < \infty$) halmaz zárt lineáris burka megegyezik $\mathfrak{H}$ -val és

$$(3.11) \quad \int_0^\infty \lambda d|E(\lambda)\varphi|^2 = \infty, \quad \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} d|E(\lambda)\varphi|^2 < \infty.$$

Legyen $\mathfrak{D}(S)$ mindazoknak az $f \in \mathfrak{D}(H)$ elemeknek az összessége, amelyekre

$$(3.12) \quad (f + Hf, \varphi) = 0,$$

és legyen

$$Sf = Hf, \quad \text{ha } f \in \mathfrak{D}(S).$$

A (3.11) alatti első feltétel értelmében $\varphi \notin \mathfrak{D}(H)$; ebből könnyen adódik, hogy $\mathfrak{D}(S)$ sűrű $\mathfrak{H}$ -ban.

Csakugyan, ha feltesszük az ellenkezőt, vagyis hogy létezik olyan $h \in \mathfrak{H}$ ($h \neq 0$) elem, amelyre

$$(f, h) = 0, \quad \text{ha } f \in \mathfrak{D}(S),$$

akkor a

$$\psi = (H + I)^{-1}h, \quad h = H\psi + \psi$$

jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$(f, H\psi + \psi) = (Hf + f, \psi) = 0$$

minden a (3.12) feltételnek eleget tevő f elemre. Ebből, felhasználva, hogy mialatt f befutja a $\mathfrak{D}(H)$ halmazt, azalatt $f + Hf$ végigfutja az egész $\mathfrak{H}$ teret, az adódik, hogy $\psi = c\varphi$ ($c \neq 0$). De $\psi \in \mathfrak{D}(H + I) = \mathfrak{D}(H)$, tehát $\varphi \in \mathfrak{D}(H)$. Ellentmondásra jutottunk.

Az olvasóra bízva annak az igazolását, hogy S egyszerű operátor, megmutatjuk még, hogy $m(S) = 0$.

A 0 pont a H operátor folytonos spektrumához tartozik, ezért tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ számhoz található két lineárisan független f_k ($k = 1, 2$) vektor, amelyre

$$(3.13) \quad E(\lambda)f_k = f_k, \quad \text{ha } \lambda > \varepsilon \quad (k = 1, 2).$$

Ekkor valamilyen α -ra az

$$f = \cos \alpha f_1 + \sin \alpha f_2$$

vektor teljesíteni fogja a (3.12) feltételt, azaz $f \in \mathfrak{D}(S)$, és (3.13) értelmében fennáll az

$$(Sf, f) = (Hf, f) = \int_0^\varepsilon \lambda d(E(\lambda)f, f) \leq \varepsilon(f, f)$$

egyenlőtlenség, innen pedig $m(S) = 0$. Másrészt a (3.11) összefüggések alapján az S operátornak végtelen sok különböző pozitív önadjungált folytatása van.

4. §. Az $\tilde{S}_\mu$, $\tilde{S}_M$ önadjungált folytatások extrémális tulajdonságairól

1. Legyen T ($\overline{\mathfrak{D}(T)} = \mathfrak{H}$) zárt hermitikus operátor, amely alulról félig korlátos, vagyis

$$m(T) = \inf_{f \in \mathfrak{D}(T)} \frac{(Tf, f)}{(f, f)} > -\infty.$$

K. FRIEDRICHS [2] nyomán vizsgálni fogjuk azt a $\mathfrak{D}[T] \subset \mathfrak{H}$ halmazt, amely az alábbi módon értelmezhető.

Az f elem akkor és csak akkor tartozik $\mathfrak{D}[T]$ -hez, ha van olyan $\{f_n\} \subset \mathfrak{D}(T)$ sorozat, hogy

$$(4.1) \quad \begin{aligned} &1) \quad f_n \rightarrow f, \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty, \\ &2) \quad (T(f_m - f_n), f_m - f_n) \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad m, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathfrak{D}(T) \subset \mathfrak{D}[T].$$

A most következő megfontolásokból ki fog derülni, hogy nem korlátos T operátor esetében (és minket éppen ez az eset fog csak érdekelni) $\mathfrak{D}(T)$ a $\mathfrak{D}[T]$ halmaznak mindig valódi része. Az is világos, hogy

$$\mathfrak{D}[T] = \mathfrak{D}[T + aI] \quad (-\infty < a < \infty).$$

Állapodjunk meg abban, hogy ha egy $f \in \mathfrak{D}[T]$ elemre és $\{f_n\} \subset \mathfrak{D}(T)$ sorozatra fennállnak az 1), 2) összefüggések, akkor azt mondjuk, hogy az $\{f_n\}$ sorozat T -konvergál az f elemhez, és ezt a következőképpen jelöljük:

$$(4.2) \quad f_n \xrightarrow{T} f.$$

Nyilvánvaló, hogy ha fennáll (4. 2), akkor érvényes az

$$f_n \xrightarrow{T+aI} f$$

összefüggés is, ahol a tetszés szerinti valós szám.

1. LEMMA (K. FRIEDRICHS). Ha $g, f \in \mathfrak{D}[T]$, továbbá $\{g_n\}$ és $\{f_n\}$ $\mathfrak{D}(T)$ -beli elemekből álló sorozatok, amelyek T -konvergálnak a g ill. f elemhez, akkor a

$$(4.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (Tg_n, f_n)$$

határérték létezik és csak g -től és f -től függ.

Bizonyítás. Nyilván elég az állítást valamilyen $T' = aI + T$ operátorra bebizonyítani. Ennélfogva az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy T pozitív operátor: $T > 0$.

Legyen $\tilde{T}$ a T operátor valamelyik pozitív önadjungált folytatása ($\tilde{T} \in \mathfrak{P}(T)$), és legyen $\tilde{T}$ spektrális előállítás

$$(4.4) \quad \tilde{T}f = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda) f.$$

Tekintsük a $\tilde{T}^\pm$ önadjungált operátort:

$$\tilde{T}^\pm f = \int_0^\infty \lambda^\pm dE(\lambda) f \quad (f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}^\pm)),$$

ahol $\mathfrak{D}(\tilde{T}^\pm)$ azoknak az $f \in \mathfrak{H}$ elemeknek az összessége, amelyekre

$$(4.5) \quad \int_0^\infty \lambda d|E(\lambda)f|^2 < \infty.$$

Nyilván

$$\mathfrak{D}(\tilde{T}) \subset \mathfrak{D}(\tilde{T}^\pm)$$

és

$$(\tilde{T}g, f) = (\tilde{T}^\pm g, \tilde{T}^\pm f) \quad (g, f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})).$$

Ezek szerint az, hogy egy $\{f_n\} \subset \mathfrak{D}(T)$ sorozat eleget tesz a 2) feltételnek, ekvivalens azzal, hogy

$$|\tilde{T}^\pm f_m - \tilde{T}^\pm f_n| \rightarrow 0, \quad \text{ha } m, n \rightarrow \infty;$$

ha pedig még az 1) feltétel is teljesül, akkor a $\tilde{T}^\pm$ operátor zárttsága miatt

$$f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}^\pm); \quad \tilde{T}^\pm f_n \rightarrow \tilde{T}^\pm f.$$

Tehát ha

$$g_n \xrightarrow{T} g, \quad f_n \xrightarrow{T} f,$$

akkor $g, f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}^\pm)$, és a $\{\tilde{T}^\pm g_n\}$, $\{\tilde{T}^\pm f_n\}$ sorozatok tartanak rendre a $\tilde{T}^\pm g$, $\tilde{T}^\pm f$ határértékekhez; de ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Tg_n, f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{T}^\pm g_n, \tilde{T}^\pm f_n) = (\tilde{T}^\pm g, \tilde{T}^\pm f).$$

A lemmát bebizonyítottuk.

A (4.3) határértéket a $T[g, f]$ jellel fogjuk jelölni.

Ilyen módon $T[g, f]$ minden $g, f \in \mathfrak{D}[T]$ elempárra értelmezett hermitikus bilineáris funkcionál.

Egyúttal bebizonyítottuk a következő lemmát:

2. LEMMA. Ha $T > 0$ és $\tilde{T} \in \mathfrak{P}(T)$, akkor

$$(4.6) \quad \mathfrak{D}[T] \subset \mathfrak{D}(\tilde{T}^\pm)$$

és

$$(4.7) \quad T[g, f] = (\tilde{T}^\pm g, \tilde{T}^\pm f) \quad (g, f \in \mathfrak{D}[T]).$$

3. LEMMA. Ha bevezetjük a

$$(g, f)_T = (g, f) + T[g, f], \quad |g|_T = \sqrt{(g, g)_T} \quad (g, f \in \mathfrak{D}[T])$$

jelöléseket, akkor $\mathfrak{D}[T]$ teljes Hilbert-tér lesz (a $(g, f)_T$ skaláris szorzatra nézve), amelyben a $\mathfrak{D}(T)$ részhalmaz mindenütt sűrű.

Ennek a belátása céljából elegendő megjegyezni, hogy ha $\{f_n\} \subset \mathfrak{D}(T)$ és $f \in \mathfrak{D}[T]$, akkor az

$$f_n \xrightarrow{T} f$$

és az

$$\|f_n - f\|_T \rightarrow 0$$

állítás egymással ekvivalens.

Szintén nehézség nélkül igazolható a

4. LEMMA. Ha T pozitív önadjungált operátor, akkor

$$(4.8) \quad \mathfrak{D}[T] = \mathfrak{D}(T^\pm)$$

és

$$(4.9) \quad T[g, f] = (T^\pm g, T^\pm f) \quad (g, f \in \mathfrak{D}[T]).$$

Bizonyítás. Minthogy a 4. lemma feltevései mellett $T = \tilde{T}$, azért a (4. 9) egyenlőség (4. 7) következménye, a (4. 8) összefüggés bebizonyításához pedig a (4. 6) képlet értelmében csak azt kell belátni, hogy

$$(4.10) \quad \mathfrak{D}(T^\pm) \subset \mathfrak{D}[T].$$

Legyen $f \in \mathfrak{D}(T^\pm)$; ekkor, feltéve, hogy a $T = \tilde{T}$ operátor spektrális felbontását a (4. 4) képlet szolgáltatja, fennáll a (4. 5) összefüggés.

Az

$$f_n = \int_0^n dE(\lambda)f = E(n)f \quad (n = 1, 2, \dots)$$

jelölés mellett

$$f_n \in \mathfrak{D}(T) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad f_n \rightarrow f,$$

továbbá

$$(T(f_{n+p} - f_n), f_{n+p} - f_n) = \int_n^{n+p} \lambda d|E(\lambda)f|^2 \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty, \quad p > 0;$$

vagyis $f \in \mathfrak{D}[T]$.

A (4. 10) összefüggést és vele együtt a 4. lemmát bebizonyítottuk.

2. Ugyanúgy, ahogy az előző paragrafusban, a továbbiakban is mindíg jelentsen S zárt pozitív hermitikus operátort, amelyre

$$\overline{\mathfrak{D}(S)} = \mathfrak{H}, \quad S^* \neq S.$$

A bebizonyított lemmák alapján könnyen igazolható az S operátor S_μ durva folytatásának alábbi jellemzése.

10. TÉTEL. Az S operátor összes lehetséges alulról félig korlátos önadjungált folytatásai között pontosan egy olyan $\tilde{S}$ folytatás található, amelyre $\mathfrak{D}(\tilde{S}) \subset \mathfrak{D}[S]$. Ez a folytatás S_μ , és fennáll a

$$(4.11) \quad \mathfrak{D}[S_\mu] = \mathfrak{D}[S]$$

összefüggés.

Bizonyítás. Tekintsünk először egy $\tilde{S} \in \mathfrak{P}(S)$ folytatást, amelyet a következő képlet értelmébe:

$$\tilde{S} = (I - \tilde{A})(I + \tilde{A})^{-1},$$

ahol

$$A = (I - S)(I + S)^{-1}.$$

Ha erre a folytatásra

$$(4.12) \quad \mathfrak{D}(\tilde{S}) \subset \mathfrak{D}[S],$$

akkor a 3. lemma szerint a $\mathfrak{D}(S)$ halmaz $\tilde{S}$ -sűrű (vagyis az $|f|_{\tilde{S}}$ normára nézve sűrű) a $\mathfrak{D}(\tilde{S})$ halmazban.

Másrészt ha $f \in \mathfrak{D}(\tilde{S})$, akkor

$$f = \frac{1}{2}(g + \tilde{A}g), \quad \text{ahol} \quad g = f + \tilde{S}f,$$

és így

$$(f, f) + (\tilde{S}f, f) = \frac{1}{2}((g, g) + (\tilde{A}g, g)) \quad \text{azaz} \quad |f|_{\tilde{S}} = \frac{1}{2}|g|_{\tilde{A}}.$$

Ennélfogva ha a $\mathfrak{D}(S)$ halmaz $\tilde{S}$ -sűrű $\mathfrak{D}(\tilde{S})$ -ban, akkor $\mathfrak{D}(A) = (I + S)\mathfrak{D}(S)$ a $|g|_{\tilde{A}}$ normára vonatkozóan sűrű a $\mathfrak{D}(\tilde{A}) = (I + \tilde{S})\mathfrak{D}(\tilde{S}) = \mathfrak{H}$ térben. De ekkor az 5. tétel szerint $\tilde{A} = A_{\mu}$, tehát

$$\tilde{S} = S_{\mu}.$$

Megfordítva, ha $\tilde{S} = S_{\mu}$ (vagyis $\tilde{A} = A_{\mu}$), akkor az 5. tétel alapján $\mathfrak{D}(A)$ sűrű $\mathfrak{H}$ -ban a $|g|_{\tilde{A}}$ normára nézve, következésképpen a $\mathfrak{D}(S)$ halmaz $\tilde{S}$ -sűrű $\mathfrak{D}(\tilde{S})$ -ban. Minthogy pedig a 3. lemma értelmében $\mathfrak{D}[S]$ a $\mathfrak{D}(S)$ halmaz $\tilde{S}$ -lezárása, azért $\mathfrak{D}(\tilde{S}) \subset \mathfrak{D}[S]$ és a $\mathfrak{D}(\tilde{S})$ halmaz $\tilde{S}$ -lezárása $\mathfrak{D}[S]$. Másrészt, szintén a 3. lemma szerint, ez a lezárás megegyezik a $\mathfrak{D}[\tilde{S}]$ halmazzal. Ennélfogva

$$\mathfrak{D}[S] = \mathfrak{D}[\tilde{S}] \quad (\tilde{S} = S_{\mu}).$$

Ilyen módon a (4.11) összefüggést bebizonyítottuk.

Hátravan még annak a megmutatása, hogy a (4.11) egyenlőségből nemcsak $\tilde{S} \in \mathfrak{P}(S)$ esetén következik, hogy $\tilde{S} = S_{\mu}$, hanem abban az általánosabb esetben is, amikor $\tilde{S}$ az S operátor tetszés szerinti alulról félig korlátos önadjungált folytatása.

Az utóbbi esetben válasszuk meg az $a > 0$ számot úgy, hogy $\tilde{S} + aI > 0$ legyen; ekkor a (4.12) összefüggésből kapjuk:

$$\mathfrak{D}(\tilde{S} + aI) = \mathfrak{D}(\tilde{S}) \subset \mathfrak{D}[S] = \mathfrak{D}[S + aI],$$

tehát a már bebizonyítottak értelmében

$$\tilde{S} + aI = (S + aI)_{\mu}.$$

Minthogy (4.12) speciálisan $\tilde{S} = S_{\mu}$ esetén is érvényes, fennáll

$$S_{\mu} + aI = (S + aI)_{\mu}$$

is, és innen $\tilde{S} = S_{\mu}$. A tételt bebizonyítottuk.

3. A 10. tétel lehetővé teszi, hogy a T hermitikus operátor durva folytatásának a fogalmát természetes módon kiterjesszük arra az esetre, amikor a T operátor alulról félig korlátos.

A T félig korlátos operátor ($\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{H}$) alulról félig korlátos önadjungált T' folytatását a T operátor durva folytatásának nevezzük, ha

$$(4.13) \quad \mathfrak{D}(T') \subset \mathfrak{D}[T].$$

Minthogy bármilyen a számra ($-\infty < a < \infty$)

$$\mathfrak{D}(T') = \mathfrak{D}(T' + aI), \quad \mathfrak{D}[T] = \mathfrak{D}[T + aI],$$

azért a (4.13) összefüggés ekvivalens azzal, hogy

$$(4.14) \quad \mathfrak{D}(T' + aI) \subset \mathfrak{D}[T + aI].$$

Ha most az a számot úgy választjuk meg, hogy $T + aI$ is, $T' + aI$ is pozitív legyen, akkor a 10. tétel szerint a (4.14) összefüggésből következik, hogy

$$(4.15) \quad T' + aI = (T + aI)_\mu.$$

Megfordítva, ha $T + aI > 0$, akkor a (4.15) képlettel értelmezett T' operátor a T operátor durva folytatása.

Ily módon a T félig korlátos operátor durva folytatása mindig létezik és egyértelmű. Jele T_μ lesz. A T_μ folytatás egyértelműsége miatt a (4.14) képletből, ahol $T' = T_\mu$, kapjuk:

$$(4.16) \quad (T + aI)_\mu = T_\mu + aI \quad (-\infty < a < \infty).$$

Ennek az összefüggésnek az értelmében $T + aI > 0$ esetén $T_\mu + aI > 0$; tehát

$$(4.17) \quad m(T_\mu) = m(T).$$

Az is nyilvánvaló, hogy a T operátor bármely más félig korlátos $\tilde{T}$ folytatására

$$m(\tilde{T}) \leq m(T).$$

4. A továbbiakhoz szükségünk lesz a következő két lemmára.

5. LEMMA. Legyen H_1 és H_2 két pozitív önadjungált korlátos operátor, és legyen $H_1 \leq H_2$, vagyis

$$(4.18) \quad (H_1 f, f) \leq (H_2 f, f) \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Ekkor

$$(4.19) \quad \mathfrak{R}(H_1^{\frac{1}{2}}) \subset \mathfrak{R}(H_2^{\frac{1}{2}}).$$

Ha ezenkívül a H_1 operátornak a 0 szám nem sajátértéke, akkor a (4.18) egyenlőtlenség ekvivalens a

$$(4.20) \quad H_2^{-\frac{1}{2}} f^2 \leq H_1^{-\frac{1}{2}} f^2 \quad (f \in \mathfrak{D}(H_1^{-\frac{1}{2}}) = \mathfrak{R}(H_1^{\frac{1}{2}}))$$

egyenlőtlenséggel.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy

$$(4.21) \quad H_2 f \neq 0, \quad \text{ha} \quad f \neq 0.$$

A (4. 18) egyenlőtlenség ekvivalens a

$$(4.22) \quad |H_1^\dagger f| \leq |H_2^\dagger f| \quad (f \in \mathfrak{H})$$

egyenlőtlenséggel.

Értelmezzünk az $\mathfrak{R}(H_2^\dagger)$ halmazon egy B operátort a

$$BH_2^\dagger f = H_1^\dagger f \quad (f \in \mathfrak{H})$$

egyenlőséggel. A (4. 22) összefüggés folytán $|Bf| \leq |f|$; a (4. 21) feltevés miatt $\mathfrak{R}(H_2^\dagger)$ sűrű $\mathfrak{H}$ -ban, úgyhogy a B folytonos operátor egyértelműen folytatható az egész $\mathfrak{H}$ térre. A

$$(4.23) \quad H_1^\dagger = BH_2^\dagger$$

egyenlőségben áttérve az adjungált operátorokra kapjuk:

$$(4.24) \quad H_1^\dagger = H_2^\dagger B^*,$$

és innen

$$\mathfrak{R}(H_1^\dagger) = \mathfrak{R}(H_2^\dagger B^*) \subset \mathfrak{R}(H_2^\dagger).$$

Most tekintsük azt az esetet, amikor a (4. 21) feltétel nem teljesül. Ebben az esetben a $\mathfrak{H}$ tér felbontható $\mathfrak{Q}$ és $\mathfrak{H}_1$ ortogonális összegére, ahol $\mathfrak{Q}$ a H_2 operátor zérushelyeinek összessége. De ha $H_2\mathfrak{Q} = \{0\}$, akkor (4. 18) szerint $H_1\mathfrak{Q} = \{0\}$ is fennáll. A $H_k\mathfrak{Q} = \{0\}$ ($k = 1, 2$) összefüggésekből következik, hogy $\mathfrak{R}(H_k) \subset \mathfrak{H}_1$ ($k = 1, 2$), és a lemma bebizonyítása céljából elegendő a H_1, H_2 operátorokat $\mathfrak{H}_1$ -en tekinteni — de ekkor visszajutunk a már vizsgált esetre.

Ha most a H_1 operátornak a 0 szám nem sajátértéke, akkor H_2 -nek sem sajátértéke; következésképpen léteznek a H_1^{-1}, H_2^{-1} önadjungált operátorok és így a $H_1^{-\dagger}, H_2^{-\dagger}$ operátorok is, és fennáll

$$\mathfrak{D}(H_1^{-\dagger}) = \mathfrak{R}(H_1^\dagger).$$

A (4. 24) egyenlőségből könnyen nyerjük:

$$H_2^{-\dagger} f = B^* H_1^{-\dagger} f \quad (f \in \mathfrak{D}(H_1^{-\dagger})),$$

minthogy pedig

$$(4.25) \quad \|B^*\| = \|B\| \leq 1,$$

vagyis $|B^*g| \leq |g|$ ($g \in \mathfrak{H}$), azért

$$|H_2^{-\dagger} f|^2 = |B^* H_1^{-\dagger} f|^2 \leq |H_1^{-\dagger} f|^2 \quad (f \in \mathfrak{D}(H_1^{-\dagger})).$$

Megfordítva, ha teljesül a (4. 20) egyenlőtlenség, akkor a

$$(4.26) \quad B^* H_1^{-\dagger} f = H_2^{-\dagger} f \quad (f \in \mathfrak{D}(H_1^{-\dagger}))$$

képlet korlátos lineáris B^* operátort definiál, amelynek értelmezési tartománya az egész $\mathfrak{H}$ tér (ugyanis $\mathfrak{R}(H_1^{-\dagger}) = \mathfrak{D}(H_1^\dagger) = \mathfrak{H}$) és normája ≤ 1 .

A (4. 26) egyenlőségben elvégezve az $f = H_1^\dagger g$ ($g \in \mathfrak{H}$) helyettesítést és mindkét oldalra alkalmazva a $H_2^\dagger$ operátort, a (4. 24) összefüggést kapjuk, és egyúttal (4. 23)-at

is, ahol B a B^* operátor adjungáltja. A (4. 23) összefüggésből (4. 25) felhasználásával adódik:

$$(H_1 f, f) = |H_1^{\frac{1}{2}} f|^2 = |BH_2^{\frac{1}{2}} f|^2 \leq |H_2^{\frac{1}{2}} f|^2 = (H_2 f, f) \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

A lemmát bebizonyítottuk.

4. 1. megjegyzés. Érdekes megemlíteni az 5. lemma következő folyományát: Ha $H_1 \leq H_2$ és $m(H_1) > 0$, akkor $H_2^{-1} \leq H_1^{-1}$.

Valóban, ha $m(H_1) > 0$, akkor $H_k^{-1}, H_k^{-\frac{1}{2}}$ ($k=1, 2$) korlátos operátorok, és

$$|H_k^{-\frac{1}{2}} f|^2 = (H_k^{-1} f, f) \quad (f \in \mathfrak{H}; \quad k=1, 2);$$

ezek szerint a (4. 20) egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy $H_2^{-1} \leq H_1^{-1}$.

6. LEMMA. Legyen S_1 és S_2 pozitív önadjungált operátor és a tetszés szerinti pozitív szám. Ekkor az

$$(4. 27) \quad (S_1 + aI)^{-1} \leq (S_2 + aI)^{-1}$$

egyenlőtlenség fennállásához szükséges és elégséges, hogy teljesüljön a következő két feltétel:

$$1) \quad \mathfrak{D}[S_1] \subset \mathfrak{D}[S_2],$$

$$2) \quad S_1[f, f] \leq S_2[f, f], \quad \text{ha } f \in \mathfrak{D}[S_1].$$

Bizonyítás. A

$$H_k = (S_k + aI)^{-1} \quad (k=1, 2)$$

operátorok korlátosak, önadjungáltak és pozitívak ($0 < H_k \leq a^{-1}I$; $k=1, 2$). Ennélfogva ha fennáll (4. 27), azaz $H_1 \leq H_2$, akkor az 5. lemma értelmében

$$(4. 28) \quad \mathfrak{R}(H_1^{\frac{1}{2}}) \subset \mathfrak{R}(H_2^{\frac{1}{2}}), \quad |H_2^{-\frac{1}{2}} f|^2 \leq |H_1^{-\frac{1}{2}} f|^2 \quad (f \in \mathfrak{D}(H_1^{-\frac{1}{2}}) = \mathfrak{R}(H_1^{\frac{1}{2}})),$$

minthogy pedig

$$\mathfrak{R}(H_k^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{R}((S_k + aI)^{-\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}((S_k + aI)^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{D}[S_k + aI] = \mathfrak{D}[S_k] \quad (k=1, 2)$$

és

$$|H_k^{-\frac{1}{2}} f|^2 = |(S_k + aI)^{-\frac{1}{2}} f|^2 = S_k[f, f] + a|f|^2 \quad (f \in \mathfrak{D}[S_k]; \quad k=1, 2),$$

azért éppen az 1), 2) feltételekhez jutunk.

Megfordítva, ha teljesülnek az 1), 2) feltételek, akkor érvényesek a (4. 28) összefüggések, ezek viszont az 5. lemma szerint ekvivalensek a $H_1 \leq H_2$ egyenlőtlenséggel, vagyis a (4. 27) relációval.

A lemmát bebizonyítottuk.

4. 2. megjegyzés. Könnyű belátni, hogy a 6. lemma érvényes marad akkor is, ha az $a > 0$ feltételt az $a > -m(S_k)$ ($k=1, 2$) feltétellel helyettesítjük.

11. TÉTEL. Legyen S pozitív hermitikus operátor ($\mathfrak{D}(\bar{S}) = \mathfrak{H}$, $S \neq S^*$), továbbá $\tilde{S}$ ennek egy pozitív önadjungált folytatása; ekkor bármilyen $a > 0$ számra

$$(4.29) \quad (S_\mu + aI)^{-1} \leq (\tilde{S} + aI)^{-1} \leq (S_M + aI)^{-1},$$

tehát

$$\mathfrak{D}[S_\mu] \subset \mathfrak{D}[\tilde{S}] \subset \mathfrak{D}[S_M]$$

és

$$S_M[f, f] \leq \tilde{S}[f, f] \quad (f \in \mathfrak{D}[\tilde{S}]).$$

Az S_μ -re és $\tilde{S}$ -ra vonatkozó megfelelő egyenlőtlenséget nem írjuk ki, mert a 2. és 4. lemma alapján

$$S[f, f] = S_\mu[f, f] = \tilde{S}[f, f] \quad (f \in \mathfrak{D}[S_\mu]).$$

Bizonyítás. Mint tudjuk, az S_μ , $\tilde{S}$, S_M operátoroknak megfelelően az A_μ , $\tilde{A}$, A_M operátorok, és ezek közt fennállnak az

$$(4.30) \quad A_\mu \leq \tilde{A} \leq A_M$$

egyenlőtlenségek. Mivel továbbá

$$\tilde{A} = (I - \tilde{S})(I + \tilde{S})^{-1} = 2(I + \tilde{S})^{-1} - I,$$

és analóg egyenlőségek érvényesek A_μ -re és A_M -re, azért a (4. 30) képletből adódik (4. 29) az $a=1$ esetben. De ekkor az 5. lemma értelmében teljesül (4. 28), amelyből viszont következik a (4. 29) összefüggés tetszés szerinti $a > 0$ szám mellett.

A tételt bebizonyítottuk.

Megemlítjük, hogy ha a (4. 29) egyenlőtlenségnek az $a=1$ esetben való érvényessége már be van bizonyítva, akkor bármilyen $a > 1$ szám esetén való érvényessége nehézség nélkül adódik a 4. 1. megjegyzésben megfogalmazott állításból.

5. A (4. 29) alatt szereplő első egyenlőtlenség fennáll az $\tilde{S}$ operátorra vonatkozó általánosabb feltevések mellett is.

Legyen $\tilde{S}$ az S operátor egy alulról félig korlátos folytatása (az S operátorról is feltehetjük, hogy alulról félig korlátos). Ekkor

$$(4.31) \quad (S_\mu + aI)^{-1} \leq (\tilde{S} + aI)^{-1}, \quad \text{ha} \quad a > -m(\tilde{S}).$$

Erről úgy győződhetünk meg, hogy a (4. 29) bal oldalán álló egyenlőtlenséget alkalmazzuk az

$$S_\mu - m(S)I, \quad \tilde{S} - m(S)I$$

operátorokra, amelyek közül az első az $S - m(S)I$ operátor durva folytatása, a második pedig tetszés szerinti pozitív önadjungált folytatás.

5. §. Az $m(S) > 0$ eset

1. Ebben az esetben a (4. 31) egyenlőtlenség érvényes speciálisan az $a=0$ választás mellett, vagyis

$$S_\mu^{-1} \leq \tilde{S}^{-1}.$$

Megmutatjuk, hogy ezenfelül igaz a következő állítás:

12. TÉTEL. Ha $m(\tilde{S}) > 0$, akkor

$$(5.1) \quad S_{\mu}^{-1} = \tilde{S}^{-1} - (\tilde{S}^{-1})_{\mathfrak{N}_0},$$

ahol $\mathfrak{N}_0$ az

$$(5.2) \quad S^* \varphi = 0$$

egyenlet összes φ megoldásaiból álló halmaz.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$m(\tilde{S}) > 1$$

és így egyúttal $m(S) > 1$.

Vezessük be az

$$S_1 = S - I, \quad \tilde{S}_1 = \tilde{S} - I$$

jelöléseket; ekkor

$$S_{1\mu} = S_{\mu} - I.$$

Legyen továbbá

$$A = (I - S_1)(I + S_1)^{-1};$$

ebben az esetben az

$$(5.3) \quad \begin{cases} A_{\mu} = (I - S_{1\mu})(I + S_{1\mu})^{-1} = 2S_{\mu}^{-1} - I, \\ \tilde{A} = (I - \tilde{S}_1)(I + \tilde{S}_1)^{-1} = 2\tilde{S}^{-1} - I \end{cases}$$

operátorok közül az első az A operátor minimális, a második az A operátor valamilyen korlátos ($\|\tilde{A}\| \leq 1$) önadjungált folytatását szolgáltatja.

A (2. 13) képlet értelmében

$$(5.4) \quad A_{\mu} = \tilde{A} - (I + \tilde{A})_{\mathfrak{N}_0},$$

ahol $\mathfrak{N}_0$ a

$$\mathfrak{D}(A) = (I + S_1)\mathfrak{D}(S) = S\mathfrak{D}(S)$$

halmazra merőleges vektorok összessége, vagy ami ugyanaz, az (5. 2) egyenlet összes megoldásaiból álló halmaz.

Az (5. 3) összefüggések értelmében (5. 4) ekvivalens azzal, hogy

$$2S_{\mu}^{-1} - I = 2\tilde{S}^{-1} - I - (2\tilde{S}^{-1})_{\mathfrak{N}_0},$$

ez viszont az (5. 1) egyenlőséggel ekvivalens.

A tételt bebizonyítottuk.

Emlékezzünk vissza arra, hogy (1. 8) alapján az (5. 1) összefüggés a következő alakban is felírható:

$$(5.5) \quad S_{\mu}^{-1}f = \tilde{S}^{-1}f - \sum_{v \in N} (f, \varphi_v) \varphi_v \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

ahol a $\{\varphi_v\}_{v \in N}$ vektorrendszert az alábbi módon nyerjük.

Az

$$(5.6) \quad \mathfrak{L} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}(\tilde{S}^{\pm}) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}[\tilde{S}]$$

halmazt Hilbert-térre tesszük azáltal, hogy két $g, f \in \mathfrak{L}$ elem skaláris szorzatát az

$$(5.7) \quad \tilde{S}[g, f] = (\tilde{S}^\dagger g, \tilde{S}^\dagger f)$$

képlettel definiáljuk. Ekkor $\{\varphi_v\}_{v \in N}$ rendszernek választhatunk bármilyen $\mathfrak{L}$ -beli teljes ortonormális rendszert, amelyre tehát

$$(5.8) \quad \tilde{S}[\varphi_v, \varphi_\mu] = \delta_{\mu v} \quad (\mu, v \in N).$$

Emlékeztetünk arra, hogy az (5.5) összefüggés jobb oldalán álló összeg legfeljebb megszámlálhatóan sok nullától különböző tagot tartalmaz és erősen konvergens; ezenfelül tetszés szerinti $f \in \mathfrak{H}$ elemre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S} \left[f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_{v_k}) \varphi_{v_k}, f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_{v_k}) \varphi_{v_k} \right] = 0,$$

ahol $\{\varphi_k\}_1^\infty$ azoknak a $v \in N$ értékeknek a sorozata, amelyekre $(f, \varphi_v) \neq 0$.

2. A tekintett ($m(S) > 0$) esetben az S_M operátort igen egyszerűen lehet jellemezni.

13. TÉTEL. Ha $m(S) > 0$, akkor $\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{D}(S_M)$ és

$$S_M \varphi = 0 \quad (\varphi \in \mathfrak{N}_0).$$

Az S operátor semmilyen más $\tilde{S}$ önadjungált folytatása nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Bizonyítás. Legyen $\tilde{S}$ valamilyen $\mathfrak{P}(S)$ -beli operátor, amelyre $m(\tilde{S}) = m(S) > 0$. Az $\tilde{S}$ operátor ilyen megválasztása esetén az

$$\tilde{A} = (I - \tilde{S})(I + \tilde{S})^{-1} \in \mathfrak{B}(A) \quad (A = (I - S)(I + S)^{-1})$$

operátor spektruma az 1 pontot nem tartalmazza, tehát az $(I - \tilde{S})^{-1}$ önadjungált operátor korlátos. De ekkor az 1. §-ban szereplő γ) állítás értelmében

$$(5.9) \quad (I - \tilde{A})\varphi = (I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}_{-1}}\varphi \quad (\varphi \in (I - \tilde{A})^{-1}\mathfrak{N}_{-1}),$$

ahol $\mathfrak{N}_{-1}$ mindazoknak a ψ vektoroknak az összessége, amelyek ortogonálisak a

$$(5.10) \quad \mathfrak{D}(A) = (I + S)\mathfrak{D}(S)$$

halmazra. Másrészt, mint tudjuk (lásd a (2.13) képletet),

$$A_M = \tilde{A} + (I - \tilde{A})_{\mathfrak{N}_{-1}},$$

és így az (5.9) egyenlőség alapján

$$(5.11) \quad A_M \varphi = \varphi \quad (\varphi \in (I - \tilde{A})^{-1}\mathfrak{N}_{-1}).$$

Minthogy pedig

$$\mathfrak{D}(S_M) = (I + A_M)\mathfrak{H},$$

azért (5.11) értelmében

$$(5.12) \quad \varphi = \frac{1}{2}(\varphi + A_M \varphi) \in \mathfrak{D}(S_M) \quad (\varphi \in (I - \tilde{A})^{-1}\mathfrak{N}_{-1}),$$

továbbá

$$(5.13) \quad S_M \varphi = \frac{1}{2} S_M (\varphi + A_M \varphi) = \frac{1}{2} (\varphi - A_M \varphi) = 0 \quad (\varphi \in (I - \tilde{A})^{-1} \mathfrak{N}_{-1}).$$

Most vegyük tekintetbe, hogy $\mathfrak{N}_{-1}$ a $\mathfrak{D}(A)$ halmaz ortogonális komplementuma, és ennél fogva $(I - \tilde{A})^{-1} \mathfrak{N}_{-1}$ az $(I - \tilde{A}) \mathfrak{D}(A)$ halmaz ortogonális komplementuma. Másrészt az (5. 10) összefüggés folytán

$$\begin{aligned} (I - \tilde{A}) \mathfrak{D}(A) &= (I - \tilde{A})(I + S) \mathfrak{D}(S) = (I - \tilde{A})(I + \tilde{S}) \mathfrak{D}(S) = \\ &= (I + \tilde{S} - \tilde{A}(I + \tilde{S})) \mathfrak{D}(S) = 2\tilde{S} \mathfrak{D}(S) = S \mathfrak{D}(S), \end{aligned}$$

úgyhogy $(I - \tilde{A})^{-1} \mathfrak{N}_{-1}$ az $S \mathfrak{D}(S)$ halmaz ortogonális komplementuma, azaz

$$(I - \tilde{A})^{-1} \mathfrak{N}_{-1} = \mathfrak{N}_0.$$

Ha ezt az egyenlőséget összekapcsoljuk az (5. 12), (5. 13) képletekkel, megkapjuk a 13. tétel első részét.

Most legyen S_1 az S operátor tetszés szerinti önadjungált folytatása, amelyre

$$(5.14) \quad \mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{D}(S_1), \quad S_1 \varphi = 0 \quad (\varphi \in \mathfrak{N}_0).$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy $S_1 = S_M$.

E célból megjegyezzük, hogy bármelyik $f \in \mathfrak{H}$ vektor előállítható ortogonális összegként:

$$f = \varphi + g, \quad \text{ahol} \quad \varphi \in \mathfrak{N}_0, \quad g \in \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}_0,$$

továbbá $f \in \mathfrak{D}(S_1)$ esetén (5. 14) értelmében $g \in \mathfrak{D}(S_1)$ és

$$S_1 f = S_1 g.$$

Az (5. 14) képletből az is következik, hogy

$$(5.15) \quad \mathfrak{R}(S_1) \perp \mathfrak{N}_0, \quad \text{vagyis} \quad \mathfrak{R}(S_1) \subset \mathfrak{M}.$$

Tehát $\mathfrak{M}$ redukálja az S_1 operátort, és az $\mathfrak{M}$ -en tekintett S_1 operátor $\mathfrak{D}_0(S_1)$ értelmezési tartományára¹³

$$\mathfrak{D}_0(S_1) = P_{\mathfrak{M}} \mathfrak{D}(S_1) = \mathfrak{D}(S_1) \cap \mathfrak{M}.$$

Másrészt tekintettel arra, hogy S_1 az S operátor folytatása, $\mathfrak{R}(S_1) \supset \mathfrak{R}(S) = \mathfrak{M}$ ¹⁴, és ezt egybevetve az (5. 15) összefüggéssel nyerjük:

$$S_1 \mathfrak{D}_0(S_1) = \mathfrak{R}(S_1) = \mathfrak{M}.$$

A kapott egyenlőség azt mutatja, hogy az S_1 operátornak $\mathfrak{M}$ -ben létezik S_1^{-1} inverze, amely ráadásul korlátos is.

Most legyen $\tilde{S}$ az S operátor tetszés szerinti önadjungált folytatása, amelyre $m(\tilde{S}) > 0$.

¹³ $P_{\mathfrak{M}}$ az $\mathfrak{M}$ -re való merőleges vetítés operátora.

¹⁴ Minthogy $\mathfrak{N}_0$ az $\mathfrak{R}(S)$ halmaz ortogonális komplementuma, $\mathfrak{R}(S)$ sűrű $\mathfrak{M}$ -ben. Másrészt mivel feltevésszerűen $m(S) > 0$, könnyű belátni, hogy $\mathfrak{R}(S)$ zárt. Ennél fogva $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{M}$.

Minden egyes $g \in \mathfrak{M}$ vektornak megfelel egy

$$(5.16) \quad f = S_1^{(-1)} g \in \mathfrak{M}$$

vektor, amelyre $S_1 f = g$. Másrészt $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{M}$ miatt g -nek megfelel egy $f_1 \in \mathfrak{D}(S)$ vektor is, amelyre

$$\tilde{S} f_1 = S f_1 = S_1 f_1 = g \quad (= S_1 f);$$

innen

$$f_1 = \tilde{S}^{-1} g, \quad S^*(f_1 - f) = S_1(f_1 - f) = 0,$$

tehát

$$f_1 = f + \varphi \quad (\varphi \in \mathfrak{N}_0);$$

minthogy pedig $f \in \mathfrak{M}$, azért

$$f = P_{\mathfrak{M}} f_1 = P_{\mathfrak{M}} \tilde{S}^{-1} g.$$

Ezt egybevetve az (5.16) egyenlőséggel látjuk, hogy

$$S_1^{(-1)} g = P_{\mathfrak{M}} \tilde{S}^{-1} g \quad (g \in \mathfrak{M}).$$

Ezek szerint $S_1^{(-1)}$ nem függ az (5.14) tulajdonságú S_1 önadjungált folytatás megválasztásától, következésképpen az (5.14) tulajdonság az S_1 operátort egyértelműen meghatározza, vagyis $S_1 = S_M$.

A tételt bebizonyítottuk.

Egyúttal azt is bebizonyítottuk, hogy az S_M operátornak $\mathfrak{M}$ -ben létezik $S_M^{(-1)}$ korlátos inverz operátora és

$$(5.17) \quad S_M^{(-1)} g = P_{\mathfrak{M}} \tilde{S}^{-1} g \quad (g \in \mathfrak{M}),$$

ahol $\tilde{S}$ az S operátornak, az egyetlen $m(\tilde{S}) > 0$ feltételtől eltekintve, tetszés szerinti önadjungált folytatása.

3. Most már azt sem nehéz kideríteni, melyik a $\mathfrak{D}[S_M]$ halmaz.

Ehhez megjegyezzük, hogy ha $f \in \mathfrak{D}(S_M)$, akkor

$$h = S_M f \in \mathfrak{M}.$$

Másrészt az $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{M}$ egyenlőség miatt található olyan $g \in \mathfrak{D}(S)$ elem, hogy

$$S_M g = S g = h,$$

következésképpen

$$S_M(f - g) = 0, \quad \varphi = f - g \in \mathfrak{N}_0.$$

Ilyen módon az $f \in \mathfrak{D}(S_M)$ elem mindig előállítható

$$(5.18) \quad f = g + \varphi \quad (g \in \mathfrak{D}(S), \varphi \in \mathfrak{N}_0)$$

alakban.

Az szintén nyilvánvaló, hogy megfordítva is, ha egy $f \in \mathfrak{H}$ elem előállítható (5.18) alakban, akkor $f \in \mathfrak{D}(S_M)$.

Az $\mathfrak{N}_0 \perp \mathfrak{R}(S)$ reláció következtében az (5.18) előállításban

$$\varphi \perp S g = S_M g = S_M f,$$

és így

$$(5.19) \quad (S_M f, f) = (S g, g).$$

Most legyen

$$f \in \mathfrak{D}[S], \quad \{f_n\} \subset \mathfrak{D}(S) \quad \text{és} \quad f_n \xrightarrow{S} f.$$

Az utóbbi, mint ismeretes (lásd a 4. 1. pontot), azt jelenti, hogy

- 1) $f_n \rightarrow f, \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty,$
- 2) $(S_M(f_m - f_n), f_m - f_n) \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad m, n \rightarrow \infty.$

Az (5. 18) képlet szerint elvégezve az

$$f_n = g_n + \varphi_n \quad (g_n \in \mathfrak{D}(S), \varphi_n \in \mathfrak{N}_0, n = 1, 2, \dots)$$

felbontásokat, az (5. 19) egyenlőség alapján azt kapjuk, hogy

$$(S_M(f_m - f_n), f_m - f_n) = (S(g_m - g_n), g_m - g_n) \cong m(S)|g_m - g_n|^2 \quad (m, n = 1, 2, \dots),$$

tehát ha az $\{f_n\}$ sorozatra teljesül a 2) feltétel, akkor van olyan $g \in \mathfrak{H}$ elem, hogy

$$1') \quad g_n \rightarrow g \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty,$$

és ezenkívül

$$2') \quad (S(g_m - g_n), g_m - g_n) \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Az 1'), 2') feltételek azt jelentik, hogy $g_n \xrightarrow{S} g$ és így $g \in \mathfrak{D}[S]$.

Másrészt az 1) és az 1') feltételből adódik, hogy

$$\varphi_n \rightarrow \varphi = f - g.$$

Mint hogy $\mathfrak{N}_0$ zárt halmaz, innen $\varphi \in \mathfrak{N}_0$.

Ennélfogva

$$(5. 20) \quad f = g + \varphi \quad (g \in \mathfrak{D}[S], \varphi \in \mathfrak{N}_0).$$

Mivel

$$\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{D}(S_M) \subset \mathfrak{D}[S_M], \quad \mathfrak{D}[S] \subset \mathfrak{D}[S_M],$$

azért fordítva is, ha egy $f \in \mathfrak{H}$ elem előállítható (5. 20) alakban, akkor $f \in \mathfrak{D}[S]$.

Ezzel bebizonyítottuk a következőt.

14. TÉTEL. Ha $m(S) > 0$, akkor

$$\mathfrak{D}(S_M) = \mathfrak{D}(S) + \mathfrak{N}_0, \quad \mathfrak{D}[S_M] = \mathfrak{D}[S] + \mathfrak{N}_0.$$

Ennek a tételnek a megfogalmazásánál azt a jelölési módot alkalmazzuk, amely szerint $E_1 + E_2 + \dots + E_p$ összegben, ahol $E_k \subset \mathfrak{H}$ ($k = 1, 2, \dots, p$), a $g = g_1 + g_2 + \dots + g_p$ alakú elemek összessége értendő, ahol $g_k \in E_k$ ($k = 1, 2, \dots, p$).

7. LEMMA. Ha $m(S) > 0$, akkor

$$(5. 21) \quad \mathfrak{D}(S^*) = \mathfrak{D}(S_\mu) + \mathfrak{N}_0.$$

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathfrak{D}(S^*)$ és

$$S^* f = h, \quad g = S_\mu^{-1} h.$$

Ekkor

$$g \in \mathfrak{D}(S_\mu) \quad \text{és} \quad S_\mu g = h.$$

Másrészt S^* az S_μ operátor folytatása, tehát

$$S^*g = h, \quad S^*(f-g) = 0,$$

és így $\varphi = f-g \in \mathfrak{N}_0$. Ennélfogva

$$f = g + \varphi \quad (\varphi \in \mathfrak{N}_0, \quad g \in \mathfrak{D}(S_\mu)),$$

azaz

$$\mathfrak{D}(S^*) \subset \mathfrak{D}(S_\mu) + \mathfrak{N}_0.$$

Másrészt fennáll

$$\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{D}(S^*), \quad \mathfrak{D}(S_\mu) \subset \mathfrak{D}(S^*), \quad \mathfrak{N}_0 + \mathfrak{D}(S_\mu) \subset \mathfrak{D}(S^*),$$

és ebből következik (5. 21).

15. TÉTEL. Ha $m(S) > 0$, akkor az S operátor bármelyik $\tilde{S}$ félig korlátos folytatására

$$(5. 22) \quad \mathfrak{D}[\tilde{S}] = \mathfrak{D}[S] + \mathfrak{N}'_0, \quad \text{ahol} \quad \mathfrak{N}'_0 = \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[\tilde{S}].$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $m(S) \geq 0$. Ekkor a 11. és a 14. tétel értelmében

$$(5. 23) \quad \mathfrak{D}[\tilde{S}] \subset \mathfrak{D}[S_M] = \mathfrak{D}[S] + \mathfrak{N}_0,$$

és innen a

$$(5. 24) \quad \mathfrak{D}[S] \subset \mathfrak{D}[\tilde{S}]$$

inklúzió felhasználásával nyerjük az (5. 22) összefüggést.

Most legyen $m(S) < 0$. Ekkor választva egy $a > -m(S)$ számot, az $S + aI$, $\tilde{S} + aI$ operátorokra alkalmazhatjuk az (5. 23) relációt és így a következőt kapjuk:

$$(5. 25) \quad \mathfrak{D}[\tilde{S}] = \mathfrak{D}[\tilde{S} + aI] \subset \mathfrak{D}[S + aI] + \mathfrak{N}_a = \mathfrak{D}[S] + \mathfrak{N}_a,$$

ahol $\mathfrak{N}_a$ az

$$S^*\psi + a\psi = 0$$

egyenlet ψ megoldásainak az összessége. Minthogy $\mathfrak{N}_a \subset \mathfrak{D}(S^*)$, azért a 7. lemma és a 10. tétel alapján

$$\mathfrak{N}_a \subset \mathfrak{D}(S_\mu) + \mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{D}[S] + \mathfrak{N}_0,$$

ami az (5. 25) összefüggéssel egybevetve azt adja, hogy

$$\mathfrak{D}[\tilde{S}] \subset \mathfrak{D}[S] + \mathfrak{N}_0.$$

Ebből és (5. 24)-ből viszont adódik az (5. 22) egyenlőség.

A tételt bebizonyítottuk.

8. LEMMA. Ha $\tilde{S}$ az S ($m(S) > 0$) operátor alulról félig korlátos folytatása és

$$g \in \mathfrak{D}[S], \quad \varphi \in \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[\tilde{S}],$$

akkor

$$\tilde{S}[g, \varphi] = 0.$$

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$m(\tilde{S}) > -1.$$

Ekkor a 3. lemma értelmében $\mathfrak{D}[S]$ Hilbert-tér a

$$(g, f)_S = (g, f) + S[g, f] \quad (g, f \in \mathfrak{D}[S])$$

skaláris szorzattal, továbbá $\mathfrak{D}(S)$ sűrűn helyezkedik el ebben a térben.

Következésképpen a $g \in \mathfrak{D}[S] \subset \mathfrak{D}[\tilde{S}]$ elemhez található olyan $\{g_n\} \subset \mathfrak{D}(S)$ sorozat, hogy

$$(5.26) \quad (g - g_n, g - g_n)_S \rightarrow 0, \quad g_n \rightarrow g.$$

Mivel pedig a 4. lemma szerint $\tilde{T} = \tilde{S} + I$ esetén

$$(g, f)_{\tilde{S}} = \tilde{T}[g, f] = (\tilde{T}^{\frac{1}{2}}g, \tilde{T}^{\frac{1}{2}}f),$$

azért (5.26) azt jelenti, hogy

$$\tilde{T}^{\frac{1}{2}}g_n \rightarrow \tilde{T}^{\frac{1}{2}}g,$$

és így

$$(5.27) \quad \tilde{S}[g, \varphi] + (g, \varphi) = \tilde{T}[g, \varphi] = (\tilde{T}^{\frac{1}{2}}g, \tilde{T}^{\frac{1}{2}}\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{T}^{\frac{1}{2}}g_n, \tilde{T}^{\frac{1}{2}}\varphi).$$

Másrészt

$$\{g_n\} \subset \mathfrak{D}(S) = \mathfrak{D}(T) \subset \mathfrak{D}(\tilde{T})$$

miatt az (5.27) egyenlőségből tovább adódik, hogy

$$\tilde{S}[g, \varphi] + (g, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{T}g_n, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Tg_n, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(Sg_n, \varphi) + (g_n, \varphi)] = (g, \varphi),$$

mert $\varphi \perp \mathfrak{R}(S)$.

A lemmát bebizonyítottuk.

16. TÉTEL¹⁵. Ha $\tilde{S}$ az S ($m(S) > 0$) operátor alulról félig korlátos folytatása, akkor ahhoz, hogy $\tilde{S}$ pozitív legyen, szükséges és elégséges az

$$(5.28) \quad \tilde{S}[\varphi, \varphi] \geq 0 \quad (\varphi \in \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[S])$$

feltétel.

Bizonyítás. Valóban, $\tilde{S} > 0$ akkor és csak akkor, ha

$$(5.29) \quad \tilde{S}[f, f] \geq 0 \quad (f \in \mathfrak{D}[S]).$$

Ily módon az (5.28) feltétel szükséges; de elégséges is, ugyanis ha $f \in \mathfrak{D}[S]$, akkor a 15. tétel értelmében

$$f = g + \varphi \quad (g \in \mathfrak{D}[S], \quad \varphi \in \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[\tilde{S}]),$$

és így a 8. lemma alapján

$$\tilde{S}[f, f] = \tilde{S}[g, g] + \tilde{S}[\varphi, \varphi] \geq \tilde{S}[\varphi, \varphi],$$

következésképpen az (5.28) egyenlőtlenségből adódik (5.29).

A tételt bebizonyítottuk.

17. TÉTEL. Ha S_k ($k=1, 2$) az S ($m(S) > 0$) operátor két alulról félig korlátos folytatása, akkor ahhoz, hogy legalább egy $a > m(S_k)$ ($k=1, 2$) számra (és így minden

¹⁵ Az $n < \infty$ esetre $((n, n)$ az S operátor defektusindexe) később általánosabb állítást fogunk bebizonyítani (lásd 6. §, 19. tétel).

ilyen a -ra) fennálljon az

$$(S_1 + aI)^{-1} \equiv (S_2 + aI)^{-1}$$

egyenlőtlenség, szükséges és elégséges a következő feltételek teljesülése:

$$(5.30) \quad \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[S_1] \subset \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[S_2]$$

és

$$(5.31) \quad S_2[\varphi, \varphi] \equiv S_1[\varphi, \varphi] \quad (\varphi \in \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[S_1]).$$

Bizonyítás. A 4. §-ban szereplő 6. lemma szerint a tétel bebizonyítása céljából elég megmutatni, hogy az (5.30) feltétel ekvivalens a

$$(5.32) \quad \mathfrak{D}[S_1] \subset \mathfrak{D}[S_2]$$

összefüggéssel, és hogy (5.32) fennállása esetén az (5.31) feltétel ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel:

$$(5.33) \quad S_2[f, f] \equiv S_1[f, f] \quad (f \in \mathfrak{D}[S_1]).$$

Hogy (5.30) és (5.32) ekvivalens egymással, az a 15. tétel alapján nyilvánvaló. Másrészt ha $f \in \mathfrak{D}[S_1] \subset \mathfrak{D}[S_2]$, akkor, ismét a 15. tétel felhasználásával,

$$f = g + \varphi \quad (g \in \mathfrak{D}[S], \quad \varphi \in \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[S_1]),$$

tehát a 8. lemma értelmében

$$S_1[f, f] - S_2[f, f] = S_1[\varphi, \varphi] - S_2[\varphi, \varphi].$$

A tételt bebizonyítottuk.

Fordította: Bognár János

IRODALOM

- [1] J. VON NEUMANN, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Mathematische Annalen* **102** (1929) 49—131.
- [2] K. FRIEDRICHS, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, *Mathematische Annalen* **109** (1934) 465—487.
- [3] M. KREIN, Sur les opérateurs différentiels autoadjoints et leurs fonctions de Green symétriques, *Recueil Mathématique* **2** (1937) 1023—1072.
- [4] M. KREIN, Sur les développements des fonctions arbitraires en séries de fonctions fondamentales d'un problème aux limites quelconque, *Recueil Mathématique* **2** (1937) 923—933.
- [5] М. Крейн, О самосопряженных расширениях ограниченных и полугораниченных эрмитовых операторов, *Доклады Академии наук СССР* **48** (1945) 303—306.
- [6] М. Крейн, О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (m, m) , *Доклады Академии наук СССР* **52** (1946) 651—654.
- [7] M. H. STONE, Linear transformations in Hilbert space, *American Mathematical Society Colloquium Publications*, **15** (1932).
- [8] H. BATEMAN, *Messengers of mathematics*, **37** (1908).
- [9] J. W. CALKIN, Symmetric transformations in Hilbert space, *Duke Mathematical Journal* **7** (1940) 504—508.
- [10] H. L. HAMBURGER, Contributions to the theory of closed hermitian transformations of deficiency index (m, m) , *Annals of Mathematics* **45** (1944) 59—99.
- [11] М. Крейн, Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице, II, *Доклады Академии наук СССР* **44** (1944) 131—134.
- [12] H. FREUDENTHAL, Über die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschränkter Operatoren, *Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings, ser. A.*, **39** (1936) 832—833.