# EGY LEGKISEBB VÉGES REGULÁRIS HIPERBOLIKUS SÍK

Írta: KÁRTESZI FERENC

A véges reguláris síkra vonatkozó néhány újabb — GRAVES-, OSTROM- és CROWEtól eredő — publikációtól indíttatva REIMAN ISTVÁN egy olyan axiómarendszert adott, mely egységesen definiálja a véges projektív, véges affin és a véges reguláris hiperbolikus síkokat. A második axiómában szereplő bizonyos természetes szám paraméter értékétől függ, hogy e síkok melyik fajtájáról van szó. REIMAN dolgozatának [1] eredményeire támaszkodva könnyen megszerkeszthető egy legkisebb (nem triviális) reguláris hiperbolikus sík.

Ez a sík 13 pontból és 26 egyenesből áll; minden egyenesnek 3 pontja van, minden ponton 6 egyenes megy át. E síkot önmagába átvivő kollineációk csoportot alkotnak, mely a harmadfokú teljes permutáció csoporttal izomorf.

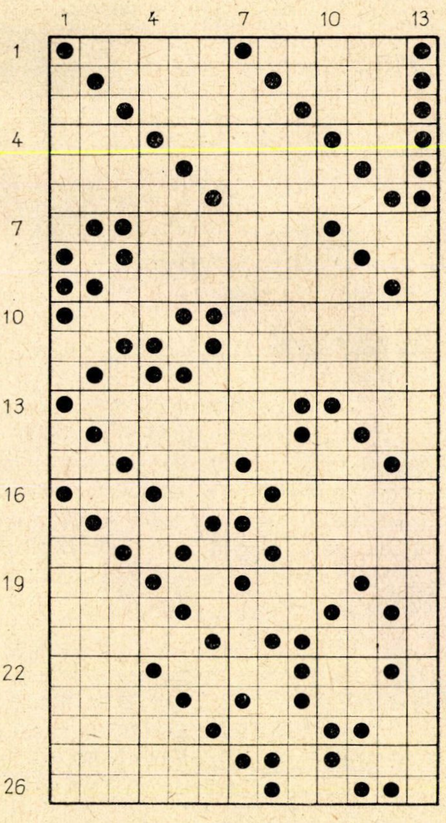
**1.** A szóban forgó síkot a következő axiómarendszerrel definiálhatjuk. (Vö. [1].)

**i)** *Bármely két pontnak egyetlenegy összekötő egyenese van.*

**ii)** *Bármely egyenest egy hozzá nem illeszkedő ponton átmenő egyenesek közül k számú metszi és l számú nem.*

**iii)** *Minden a sík nem egyenes vonalú ponthármasát tartalmazó* **H** *ponthalmaz legyen olyan, hogy bármely két pontját összekötő egyenes minden pontja a síkhoz tartozik. Tartalmazza* **H** *a sík összes pontjait.*

Egy az **i)**, **ii)**, **iii)** kirovásokkal definiált (pont, egyenes, incidencia)-struktúra előállítása bonyolultnak látszó kombinatorikai feladat. A rengeteg kombinációval járó próbálkozást egy heurisztikus észrevétel fölöslegessé tette. A közölt modell, ennek az észrevételnek a segítségével, alig néhány kombináció kipróbálásával röviden adódott. Az észrevétel az a feltevés volt, hogy esetleg *van olyan teljesnégyszög a keresett síkon, melynek egyetlen átlós-*




*1 ábra*

*pontja sincs.* — Modellünkön a $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_{13}$ pontnégyes. — Ha a 13 pontból, 26 egyenesből álló reguláris hiperbolikus sík unicitása nem érdekel, csupán realizálhatóságát kívánjuk a modell előállításával igazolni, akkor azt a következő incidencia-táblázat már el is intézi.

**2.** Tekintsük a táblázatot síknak, a $j$-edik sorát a sík $l_j$ nevű *egyenesének*, a $k$-adik oszlopát a sík $P_k$ nevű *pontjának*, és a • jellel a jelben találkozó sornak és oszlopnak megfelelő egyenes és pont *illeszkedését* fejezzük ki.

Minthogy $j=1, 2, \ldots, 26$ és $k=1, 2, \ldots, 13$, síkunk 26 egyenesből és 13 pontból áll. Számláljuk meg a • jeleket soronként és oszloponként. E számlálás szerint minden egyenesen 3 pont van, s minden ponton 6 egyenes megy át.

Könnyen ellenőrizhető, hogy síkunkon az **i)** axióma érvényes. Ragadjunk ki ugyanis két különböző oszlopot, például a 4 és a 7 indexű oszlopokat. Könnyen ellenőrizhető, hogy egy és csakis egy olyan sor van, a 19 indexű sor, mely mindkét oszlopot jellel kitüntetett mezőben keresztezi. Ez azt jelenti, hogy a $P_4$, $P_7$ pontokat egyetlenegy egyenes köti össze: az $l_{19}$ egyenes. A $\binom{13}{2}=78$ ilyen ellenőrző próba tanúsága szerint az **i)** axióma valóban érvényes.

További ellenőrzésre már nincs szükség, mert az eddigiekből következik, hogy a másik két axióma is érvényes.

Legyen ugyanis $P_r \notin l_s = \{P_j, P_n, P_k\}$. A $P_r$ ponton átmenő 6 egyenes közül a $P_rP_j$, $P_rP_n$, $P_rP_k$ metszi az $l_s$ egyenest, tehát a további három nem metsző, ennélfogva az **ii)** axióma valóban érvényes.

A harmadik axiómában mondott **H** halmaz háromszögének a szerepét most vegye át az előbbiekben szerepelt $\{P_j, P_n, P_r\}$ ponthármassal mint csúcspontokkal létesített háromszög. Ha $P_r$-et az $l_s$ egyenes minden pontjával összekötjük, a kapott három egyenes mindegyikén egy-egy harmadik pontot is kapunk, s így összesen három újabb pontot állítottunk elő. Az előbbi 4 és az utóbbi 3 pontból összetett **G** ponthalmazra $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{H}$ nyilvánvaló. Legyen mármost síkunk tetszőleges pontja $P_x$, és kössük ezt össze **G**-nek mind a 7 pontjával. Minthogy a $P_x$ ponton át sem mehet 6-nál több egyenes, kell, hogy e ponton átmenő egyenesek közt legyen olyan is, mely a **G**-nek, tehát **H**-nak két pontját tartalmazza. Ez az **iii)** axióma érvényességét jelenti.

**3.** A pontsík *kollineációja* a pontok olyan permutációja, mely egyenes vonalú, de csak egyenes vonalú ponthármast egyenes vonalú ponthármasba visz át. *A sík kollineációinak összessége csoportot alkot.* Modellünk így definiált kollineációinak a csoportját jelölje **K**, a kollineációkat $\pi_s$ ($s=1, 2, \ldots$).

A kollineációkat és a **K** csoportot meghatározó következtetéseket mellőzve, befejezésként még a következőket ismertetjük.

Ha a pontokat csupán indexükkel nevezzük meg, akkor a kollineációk a következő 6 permutációt jelentik:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_1$: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| $\pi_2$: | 7 | 2 | 5 | 10 | 3 | 12 | 1 | 8 | 11 | 4 | 9 | 6 | 13 |
| $\pi_3$: | 4 | 9 | 7 | 1 | 10 | 13 | 3 | 8 | 2 | 5 | 11 | 12 | 6 |
| $\pi_4$: | 3 | 9 | 10 | 5 | 7 | 12 | 4 | 8 | 11 | 1 | 2 | 13 | 6 |
| $\pi_5$: | 10 | 11 | 1 | 7 | 4 | 13 | 5 | 8 | 2 | 3 | 9 | 6 | 12 |
| $\pi_6$: | 5 | 11 | 4 | 3 | 1 | 6 | 10 | 8 | 9 | 7 | 2 | 13 | 12 |

A $\pi_1, \ldots, \pi_6$ kollineációk közül az első az azonosság. Az általuk alkotott **K** csoport a $\mathfrak{S}_3$ csoporttal izomorf. A $P_8$ pont mindegyik kollineációra nézve fixpont; az $l_6$ és $l_{14}$ egyenes mindegyik kollineációra nézve fixegyenes. Ezenkívül $\pi_2$ fixpontjai — a $P_2$, $P_8$, $P_{13}$ pontok — egy egyenesen — vagyis az $l_2$ tengelyen — vannak; továbbá hat fixegyenese van. A $\pi_3$ kollineáció fixpontjai, a $P_8$, $P_{11}$ $P_{12}$, pontok az $l_{26}$ tengelyen vannak, ezzel együtt hat fixegyenese van. A $\pi_6$ kollineáció fixpontjai, a $P_6$, $P_8$, $P_9$ pontok az $l_{21}$ tengelyen vannak, ezzel együtt hat fixegyenese van. A további két kollineációnak — a $\pi_4$ és $\pi_5$ kollineációnak — azonban csak egy fixpontja és két fixegyenese van — a már mondott $P_8$ és $l_6$, $l_{14}$ —; vagyis ezeknek nincs tengelyük. A $\pi_2, \ldots, \pi_6$ kollineációk egyikének sincs középpontja.

Ezzel a — mondhatnánk — nevezetes, de szimmetria szempontjából elég szegény

$$\begin{Bmatrix} 13 & 26 \\ 6 & 3 \end{Bmatrix}$$

konfiguráció elemzését be is fejeztük.

## IRODALOM

[1] REIMAN I.: A véges síkok jellemzése, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl.*, **17** (1967)

(Beérkezett: 1968. II. 27.)

## UN MINIMO PIANO GRAFICO FINITO IPERBOLICO REGOLARE

F. KÁRTESZI

È opportuno aver un modello (minimo, ma non banale) dei piani finiti iperbolici di tipo regolare. Un tal piano contiene 26 rette e 13 punti. Ogni retta del piano contiene 3 punti distinti; per ogni punto passano 6 rette distinti.

L'autore ha costruito la tabella d'incidenza di un tal piano. Le righe della tabella: *le rette* del piano; le colonne della tabella: *i punti* del piano; il segno • denota *l'incidenza.* Inoltre viene presentate il gruppo delle collineazioni di questo piano.

Considerando le colonne d'incidi 1, 2, 3, 13, ciè il quadrangolo $P_1P_2P_3P_{13}$, si può stabilire che il quadrangolo non ha punto diagonale. Considerando le righe d'indici 6, 8, 12, 25, cioè i lati del quadrilatero $l_6 l_8 l_{12} l_{25}$, si puo stabilire che due a due non hanno punti in comune. Dunque esiste „quadrilatero senza vertici". Potrebbe dire che questo piano „regolare" ha parti „irregolarissimi".