AZ INFORMÁCIÓ SHANNON-FÉLE MÉRTÉKÉRŐL

Írta: DARÓCZY ZOLTÁN (Debrecen)

Az információelmélet alapvető mennyisége a SHANNON [14] által bevezetett

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

entrópia, amely minden $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ véges valószínűségeloszlásra értelmezett valós értékű függvény. A H_n SHANNON-féle entrópiát a $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ eloszlás által nyújtott *információ* mértékének is szokás nevezni.

A SHANNON-féle entrópia jellemzésével számos szerző foglalkozott. Ennek a dolgozatnak az a célja, hogy az eddig ismert jellemzések közös magvára rámutasson. A dolgozat 1. §-ában egyszerű meggondolásokra támaszkodva definiáljuk a $[0, 1]$ zárt intervallumban értelmezett $f(x)$ *információfüggvény* fogalmát az

$$f(x)+(1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y)+(1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right)$$

függvényegyenlet segítségével, ahol $x, y \in [0, 1)$ és $x+y \leqq 1$ tetszőleges változók, továbbá $f(\frac{1}{2})=1$ és $f(0)=f(1)$. A fenti igen egyszerűnek látszó függvényegyenletet az *információ alapegyenletének* nevezzük. A 2. §-ban kimutatjuk, hogy ha $f(x)$ információfüggvény és $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ egy tetszőleges véges valószínűségeloszlás, akkor a

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{i=2}^{n} s_i f\left(\frac{p_i}{s_i}\right) \qquad (s_i = p_1 + \ldots + p_i; \quad i = 2, 3, \ldots, n)$$

egyenlettel értelmezett, az $f(x)$ által meghatározott *entrópia* rendelkezik a Shannon-féle entrópiára ismert fontosabb *algebrai* jellegű tulajdonságokkal. Innen kapjuk a 3. §-ban — hivatkozva FADDEJEW [9], TVERBERG [15], KENDALL [10] és LEE [11] eredményeire —, hogy $[0, 1]$*-ben folytonos*, vagy $[0, 1]$*-ben Lebesgue-integrálható*, vagy $(0, \frac{1}{2}]$*-ben monoton növekvő*, vagy $(0, 1)$*-ben Lebesgue-mérhető* információfüggvények azonosak az

$$S(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$$

SHANNON-féle információfüggvénnyel. A 4. §-ban megadjuk az információ alapegyenletének legáltalánosabb megoldását a $(0, 1)$ intervallum racionális pontjaiban. Erre az eredményre támaszkodva az 5. §-ban megmutatjuk, hogy ha az $f(x)$ információfüggvény a 0 *pontban folytonos*, akkor $f(x) \equiv S(x)$. Ezzel egy új jellemzést nyerünk a SHANNON-féle entrópiára. A 6. §-ban BORGES [3] gondolataira támaszkodva elemi bizonyítást adunk KENDALL [10] tételére, a monoton növekedés helyett csak monotonitást (csökkenést vagy növekedést) megkövetelve a $(0, \frac{1}{2}]$ intervallumban. A 7. §-ban megmutatjuk, hogy más ismert jellemzések is (CHAUNDY—MCLEOD [4], ACZÉL—DARÓCZY [1], DARÓCZY [6]) lényegében az információ alapegyenletének bizonyos feltételek melletti megoldására vezethetők vissza.

1. § Az információ alapegyenlete

Legyen A egy véletlen esemény, és jelölje $x = P(A)$ az A esemény valószínűségét. Ha az A eseményre vonatkozóan elvégzünk egy kísérletet, akkor a kísérlet eredménye által nyújtott *információ* mértékét jelölje $I(A)$. Az $I(A)$ ismeretlen mennyiségről tegyük fel, hogy az csak az A esemény x valószínűségétől függ, azaz

$$I(A) = f(x),$$

ahol $f(x)$ a $[0, 1]$ zárt intervallumban értelmezett ismeretlen valós függvény. Ha B egy további véletlen eseményt jelöl, melyre $AB = 0$, és $y = P(B)$ a B esemény valószínűsége, akkor az A eseményre vonatkozó kísérlet után elvégezve egy további kísérletet a B eseményre vonatkozóan, a második kísérlet által nyert $I(B|\bar{A})$ *relatív információ* $\bar{A}$-ra nézve ($B \subset \bar{A}$ miatt) legyen az

$$\frac{y}{1-x} = \frac{P(B)}{P(\bar{A})}$$

valószínűséghez tartozó információ $1-x = P(\bar{A})$ súllyal vett értéke, azaz

$$I(B|\bar{A}) = (1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right).$$

A két kísérlet egymás utáni elvégzése után kapjuk az

$$I(A, B) = I(A) + I(B|\bar{A}) \qquad (AB = 0)$$

információnyereséget, amelyről tegyük fel, hogy független az A és B események sorrendjétől. Ez a feltétel az ismeretlen $f(x)$ függvényre az

$$f(x) + (1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right) \tag{1}$$

függvényegyenlet teljesülését jelenti minden

$$(x, y) \in D = \{(x, y): 0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq y < 1,\ x + y \leqq 1\}$$

számpárra. Az információ mértékének egységéül — szokásos módon — válasszuk az $x = \frac{1}{2}$ valószínűséghez tartozó $f(\frac{1}{2})$ információt, azaz legyen $f(\frac{1}{2}) = 1$. Továbbá tegyük fel, hogy a lehetetlen, illetve biztos eseményre vonatkozó kísérlet ugyanakkora információt nyújt, azaz legyen $f(0) = f(1)$. Az előző meggondolások alapján fogadjuk el a következő értelmezést.

1. DEFINICIÓ. A $[0, 1]$ zárt intervallumban értelmezett $f(x)$ valós függvényt *információfüggvénynek* nevezzük, ha minden $(x, y) \in D$ számpárra teljesül rá az (1) függvényegyenlet, továbbá $f(\frac{1}{2}) = 1$ és $f(0) = f(1)$. Az (1) függvényegyenletet az *információ alapegyenletének* nevezzük.

1. LEMMA. *Ha $f(x)$ információfüggvény, akkor $f(0) = f(1) = 0$ és*

$$f(x) = f(1-x) \tag{2}$$

minden $x \in [0, 1]$-re.

Bizonyítás. Legyen $f(x)$ tetszőleges információfüggvény. Az információ alapegyenletébe $y = 0$-t helyettesítve $f(x) + (1-x) f(0) = f(0) + f(x)$ minden $x \in [0, 1)$-re, ahonnan $f(0) = 0$. Tegyünk most (1)-ben $y = 1 - x$-et $\big((x, 1-x) \in D$, ha $x \in [0,1)\big)$, akkor

$$f(x) + (1-x) f(1) = f(1-x) + x f(1),$$

ahonnan $f(1) = f(0) = 0$ miatt

$$f(x) = f(1-x),$$

ha $x \in [0, 1)$. Ez viszont $f(1) = f(0)$ miatt $x = 1$-re is teljesül. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Legyen

$$l(x) = \begin{cases} -x \log_2 x & \text{ha} \quad x \in (0, 1] \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0, \end{cases} \tag{3}$$

ahol $y = \log_2 t$ $(t > 0)$ a 2-es alapú logaritmusfüggvényt jelöli. Legyen továbbá

$$S(x) = l(x) + l(1-x), \tag{4}$$

akkor könnyen belátható, hogy $S(x)$ információfüggvény. A (4) információfüggvényt SHANNON-*féle információfüggvénynek* nevezzük. A jövőben $l(x)$ helyett a $-x \log_2 x$ jelölést használjuk azzal a megkötéssel, hogy $0 \log_2 0$ definíció szerint 0-val egyenlő. Így

$$S(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$$

minden $x \in [0, 1]$-re. Alapvető kérdés, hogy egy $f(x)$ információfüggvény milyen további feltételek mellett lesz $S(x)$-szel azonos. A SHANNON-féle információfüggvénytől *különböző* információfüggvényre példa a következő. Legyen $a(t)$ tetszőleges megoldása az

$$a(t+s) = a(t) + a(s) \tag{5}$$

Cauchy-féle függvényegyenletnek, amelyre $a(1) = 1$. Ekkor

$$f_a(x) = \begin{cases} x\, a(-\log_2 x) + (1-x)\, a\big(-\log_2 (1-x)\big) & \text{ha} \quad x \in (0, 1) \\ 0 \quad \text{ha} \quad x = 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \end{cases}$$

információfüggvény. Ugyanakkor létezik olyan megoldása (5)-nek $\big($az $a(1) = 1$ feltételt is beleértve$\big)$, amely egyetlen pontban sem folytonos, tehát $f_a(x)$ nem lehet a folytonos $S(x)$ függvénnyel azonos.

2. § Információfüggvények entrópiája

Vizsgálataink alapja a következő

2. DEFINICIÓ. Legyen $f(x)$ tetszőleges információfüggvény és $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ egy véges valószínűségeloszlás, azaz amelyre $p_i \geqq 0$ $(i=1, 2, ..., n)$ és $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ teljesül. Ekkor a

$$(6) \quad H_n(p_1, p_2, ..., p_n) = \sum_{i=2}^{n} s_i f\left(\frac{p_i}{s_i}\right) \quad (s_i = p_1 + p_2 + ... + p_i; \quad i = 2, 3, ..., n)$$

mennyiséget a $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ eloszlás f-hez tartozó *entrópiájának* nevezzük. Itt $\frac{p_i}{s_i}$ definíció szerint 0-val egyenlő, ha $p_i=0$ $(i=1, 2, ..., n)$.

Ha $f(x)=S(x)$, ahol $S(x)$ a SHANNON-féle információfüggvényt jelöli, akkor könnyen belátható, hogy az $S(x)$-hez tartozó entrópia éppen a

$$H_n(p_1, p_2, ..., p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

SHANNON-féle entrópiával azonos. A következőkben megmutatjuk, hogy egy tetszőleges $f(x)$ információfüggvényhez tartozó $H_n(p_1, p_2, ..., p_n\}$ entrópia rendelkezik a SHANNON-féle entrópiára ismert algebrai jellegű tulajdonságokkal.

1. TÉTEL. *Ha $f(x)$ információfüggvény és $H_n(p_1, p_2, ..., p_n\}$ az f-hez tartozó entrópia, akkor H_n rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1° $H_n(p_1, p_2, ..., p_n)$ *szimmetrikus* $p_1, p_2, ..., p_n$-*ben;*

2° $H_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1;$

3° $$H_n(p_1, p_2, p_3, ..., p_n) = H_{n-1}(p_1+p_2, p_3, ..., p_n) +$$
$$+(p_1+p_2) H_2\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right) \quad (n \geqq 3).$$

Bizonyítás. Legyen $\{p_1, p_2\}$ tetszőleges valószínűségeloszlás. A 2. definíció és az 1. lemma miatt

$$H_2(p_1, p_2) = (p_1+p_2) f\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\right) = f(p_2) = f(1-p_2) =$$
$$= f(p_1) = (p_2+p_1) f\left(\frac{p_1}{p_2+p_1}\right) = H_2(p_2, p_1),$$

továbbá $H_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = 1$. Ezzel az 1° állítást $n=2$-re és a 2° állítást bebizonyítottuk. Ezek után könnyű belátni a 3° tulajdonság teljesülését, ugyanis az előzőket felhasználva $n \geqq 3$ esetén

$$H_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) - H_{n-1}(p_1+p_2, p_3, \ldots, p_n) =$$

$$= \sum_{i=2}^{n} s_i f\left(\frac{p_i}{s_i}\right) - \sum_{i=3}^{n} s_i f\left(\frac{p_i}{s_i}\right) = s_2 f\left(\frac{p_2}{s_2}\right) =$$

$$= (p_1+p_2) f\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\right) = (p_1+p_2) H_2\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right).$$

Hátra van még az 1° tulajdonság bizonyítása $n>2$ esetére. Teljes indukciós bizonyításunkhoz tegyük fel, hogy 1° $(n-1)$-re $(n \geqq 3)$ már igaz. Ekkor a most bizonyított 3° tulajdonság miatt

$$H_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) = H_{n-1}(p_1+p_2, p_3, \ldots, p_n) +$$

$$+ (p_1+p_2) H_2\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right).$$

A feltétel miatt $H_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$, a $\{p_3, \ldots, p_n\}$, illetve a $\{p_1, p_2\}$ változócsoportokban végrehajtható permutációkkal szemben invariáns, ezért elegendő csak azt megmutatni, hogy p_2 és p_3 felcserélhető H_n változása nélkül. Ekkor ugyanis H_n változatlan, ha változóinak bármely két elemét felcseréljük egymással. Az elmondottak szerint a

$$H_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) = H_n(p_1, p_3, p_2, \ldots, p_n) \tag{7}$$

azonosságot kell bizonyítani, amely a

$$H_{n-1}(p_1+p_2, p_3, \ldots, p_n) + (p_1+p_2) H_2\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right) =$$

$$= H_{n-1}(p_1+p_3, p_2, \ldots, p_n) + (p_1+p_3) H_2\left(\frac{p_1}{p_1+p_3}, \frac{p_3}{p_1+p_3}\right)$$

azonossággal ekvivalens. Felhasználva a 2. definíciót, innen

$$(p_1+p_2+p_3) f\left(\frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}\right) + (p_1+p_2) f\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\right) =$$

$$= (p_1+p_3+p_2) f\left(\frac{p_2}{p_1+p_3+p_2}\right) + (p_1+p_3) f\left(\frac{p_3}{p_1+p_3}\right)$$

következik, ahol $p_i \in [0, 1]$ $(i=1, 2, 3)$ és $p_1+p_2+p_3 \leqq 1$. Legyen most

$$x = \frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}, \quad y = \frac{p_2}{p_1+p_2+p_3},$$

akkor $(x, y) \in D$ és a fenti egyenlet átmegy az

$$f(x) + (1-x) f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y) f\left(\frac{x}{1-y}\right)$$

egyenletbe, amely nyilván teljesül, mert $f(x)$ információfüggvény volt. Mivel az átalakítások ekvivalensek voltak, ezért az utóbbiból következik (7), s ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

KOROLLÁRIUM. *Ha $f(x)$ információfüggvény és $H_n(p_1, p_2, ..., p_n)$ az f-hez tartozó entrópia, akkor H_n rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

$$4^\circ \quad H_{n+1}(p_1, p_2, ..., p_n, 0) = H_n(p_1, p_2, ..., p_n);$$

5° *Ha* $p_i = \sum_{k=1}^{m} q_{ik} > 0 \quad (q_{ik} \geqq 0, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad k = 1, 2, ..., m)$,

akkor

$$H_{nm}(q_{11}, q_{12}, ..., q_{1m}, q_{21}, q_{22}, ..., q_{2m}, ..., q_{n1}, q_{n2}, ..., q_{nm}) =$$
$$= H_n(p_1, p_2, ..., p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i H_m\left(\frac{q_{i1}}{p_i}, \frac{q_{i2}}{p_i}, ..., \frac{q_{im}}{p_i}\right).$$

Bizonyítás. Ennek az állításnak a bizonyítása megtalálható FADDEJEW [9] dolgozatában, ahol ki van mutatva, hogy az 1° és 3° tulajdonságokból következik 4° és 5°. A 4° és 5° tulajdonságokra épült CHINTSCHIN [5] axiómarendszere.

A következő eredmény az 1. tétel megfordításának tekinthető.

2. TÉTEL. *Legyen $H_n(p_1, p_2, ..., p_n)$ minden $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ $(p_i \geqq 0, i = 1, 2, ..., n;$ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1)$ véges valószínűségeloszlásra értelmezve, ahol $n=2$ és $n=3$. Tegyük fel, hogy $H_n(p_1, p_2, ..., p_n)$-re $(n=2, 3)$ teljesül az 1. tételben szereplő 1° és 3° tulajdonság $n=3$-ra, továbbá a 2° tulajdonság. Ekkor*

$$f(x) = H_2(x, 1-x) \qquad (x \in [0, 1])$$

információfüggvény.

Bizonyítás. Legyen $f(x) = H_2(x, 1-x)$. Legyen a 3° egyenletben (amely most $n=3$-ra teljesül) $p_1 = uv$, $p_2 = v(1-u)$, $p_3 = 1-v$, ahol $u, v \in [0, 1]$ tetszőlegesek. Felhasználva az 1° tulajdonságot, kapjuk, hogy

$$f(v) + vf(u) = H_2(v, 1-v) + vH_2(u, 1-u) = H_3(uv, v(1-u), 1-v) =$$
$$= H_3(p_1, p_2, p_3) = H_3(p_2, p_1, p_3) = H_3(v(1-u), uv, 1-v) =$$
$$= H_2(v, 1-v) + vH_2(1-u, u) = f(v) + vf(1-u),$$

ahonnan $f(u) = f(1-u)$ következik. Speciálisan $f(0) = f(1)$. Legyen most a 3° egyenletben $p_1 = x, p_2 = y$ és $p_3 = 1-x-y$, ahol $(x, y) \in D$ tetszőleges. Ekkor megint csak 1° miatt

$$f(x+y) + (x+y) f\left(\frac{x}{x+y}\right) = H_2(x+y, 1-x-y) +$$
$$+ (x+y) H_2\left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}\right) = H_3(p_1, p_2, p_3) =$$
$$= H_3(p_3, p_2, p_1) = H_2(1-x, x) + (1-x) H_2\left(\frac{1-x-y}{1-x}, \frac{y}{1-x}\right) =$$
$$= f(1-x) + (1-x) f\left(\frac{1-x-y}{1-x}\right),$$

ahonnan a már bebizonyított $f(x) = f(1-x)$ miatt

$$f(x)+(1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(x+y)+(x+y)f\left(\frac{x}{x+y}\right) =$$
$$= f(y)+(1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right)$$

következik, azaz $f(x)$-re teljesül az információ alapegyenlete. A 2° tulajdonságból következik, hogy $f(\frac{1}{2}) = H_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$; s ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Meg kívánjuk jegyezni, hogy az itt közölt bizonyítás gondolatai BORGES [3] dolgozatában implicit módon megtalálhatók.

3. § Folytonos információfüggvények

Az előző vizsgálatok lényegét a következő módon foglalhatjuk össze. Egy tetszőleges $f(x)$ információfüggvényhez tartozó entrópia rendelkezik a SHANNON-féle entrópiára ismert fontosabb algebrai jellegű tulajdonságokkal és fordítva, ezek implikálják, hogy $f(x) = H_2(x, 1-x)$ információfüggvény. Ezért a SHANNON-féle entrópia azon jellemzési tételei, amelyek a fent említett algebrai jellegű tulajdonságokra támaszkodnak, nem mások, mint az információ alapegyenletének megoldásai különböző regularitási feltételek mellett. Az ilyen megoldások természetesen mindig a SHANNON-féle $S(x)$ információfüggvényre vezetnek. Ezeket foglalja össze a következő

3. TÉTEL. *Ha az $f(x)$ információfüggvény*
a) $[0, 1]$-*ben folytonos; vagy*
b) $[0, 1]$-*ben Lebesgue-integrálható; vagy*
c) $(0, \frac{1}{2}]$-*ben monoton növekvő; vagy*
d) $(0, 1)$-*ben Lebesgue-mérhető,*
akkor $f(x)$ a SHANNON-*féle információfüggvény, azaz*

$$f(x) = -x\log_2 x-(1-x)\log_2(1-x)$$

minden $x\in[0, 1]$-*re.*

Bizonyítás. FADDEJEW [9] dolgozatában (amely CHINTSCHIN [5] munkájához kapcsolódik) a következő állítás van bebizonyítva: Ha a $H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ $(n=2, 3, \ldots)$ függvény minden $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ valószínűségeloszlásra értelmezve van, és rendelkezik az 1. tételben szereplő 1°, 2° és 3° tulajdonságokkal, továbbá $H_2(x, 1-x)$ *folytonos függvény* a $[0, 1]$ zárt intervallumban, akkor

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

minden $n \geqq 2$-re. Legyen most $f(x)$ $[0, 1]$-ben folytonos információfüggvény. Ekkor az 1. tételben szereplő 1°, 2° és 3° tulajdonságok teljesülnek az f-hez tartozó entrópiára, továbbá $f(x) = H_2(x, 1-x)$ folytonos $[0, 1]$-ben, ezért FADDEJEW tételéből következik, hogy $f(x) \equiv S(x)$. Ezzel az a) állítást bebizonyítottuk. A b) és d) állítás teljesen hasonló módon következik TVERBERG [15], illetve LEE [11] tételeiből, ahol $H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$-re 1°, 2° és 3° mellett az van feltéve, hogy $H_2(x, 1-x)$ $[0, 1]$-ben

Lebesgue-integrálható, ill. (0, 1)-ben Lebesgue-mérhető. A c) állítás KENDALL [10] dolgozatából következik, ahol 1° és 3° csak $n=2$, 3-ra van feltéve, továbbá $H_2(x, 1-x)$ a $(0, \frac{1}{2}]$ intervallumban monoton növekvő. Ezen utóbbi tételre elemi bizonyítás BORGES [3] dolgozatában található.

Megjegyezzük, hogy a d) állításból (amely LEE [11] tétele) természetesen következik a), b) és c).

4. § Az információfüggvények további tulajdonságai

Az alábbiakban az információ alapegyenletének megoldásairól további általános (azaz regularitások nélküli) eredményeket bizonyítunk be. Igen hasznosnak bizonyul a következő

3. DEFINICIÓ. Legyen $\varphi(n)$ minden $n=1, 2, 3, \ldots$ természetes számra értelmezett *additív* számelméleti függvény, azaz, amely eleget tesz a

$$\varphi(nm) = \varphi(n)+\varphi(m) \tag{8}$$

egyenletnek minden $n, m=1, 2, 3, \ldots$ értékre. Legyen továbbá $r = \dfrac{n}{m}\in(0,1)$ tetszőleges *racionális* szám, ahol tehát $1 \leqq n < m$.

Ekkor a

$$\varphi(r) = \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \varphi(n)-\varphi(m) \tag{9}$$

egyenlettel definiált — a (0, 1) intervallum racionális pontjaiban értelmezett — valós értékű függvényt az *additív* φ *kiterjesztésének* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a $\varphi(r)$ $\big(r\in(0, 1)$ racionális szám$\big)$ függvényérték nem függ az r racionális szám $\dfrac{n}{m}$ alakban történő előállításától; ugyanis, ha $r=\dfrac{n}{m}=\dfrac{n'}{m'}$, akkor $\varphi(nm') = \varphi(n'm) = \varphi(n)+\varphi(m') = \varphi(n')+\varphi(m)$ miatt $\varphi(r) = \varphi(n)-\varphi(m)= = \varphi(n')-\varphi(m')$. Továbbá könnyű belátni, hogy minden $r_1, r_2\in(0, 1)$ racionális számpárra teljesül a

$$\varphi(r_1r_2) = \varphi(r_1)+\varphi(r_2)$$

azonosság.

4. TÉTEL. *Ha $f(x)$ tetszőleges információfüggvény, akkor egyértelmű módon létezik egy $\varphi(n)$ additív számelméleti függvény a $\varphi(2)=1$ tulajdonsággal, hogy minden $r\in(0, 1)$ racionális számra*

$$f(r) = -r\varphi(r)-(1-r)\varphi(1-r), \tag{10}$$

ahol $\varphi(r)$ az additív φ kiterjesztését jelöli. Fordítva, ha $\varphi(n)$ tetszőleges additív számelméleti függvény, amelyre $\varphi(2)=1$, akkor (10) *eleget tesz az információ alapegyenletének minden $x, y\in(0, 1)$ racionális számra.*

Bizonyítás. Legyen $f(x)$ tetszőleges információfüggvény. Jelölje $H_n(p_1, p_2,\ldots,p_n)$ az f-hez tartozó entrópiát, és legyen

$$\varphi(n) = H_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

és $\varphi(1)=0$. A H_n entrópiára ismert 5° tulajdonság egyenletében legyen $q_{ik}=\frac{1}{nm}$ $i=1,2,\dots,n$; $k=1,2,\dots,m$), ekkor minden $n, m\geqq 2$ természetes számra

$$\varphi(nm) = H_{nm}\left(\frac{1}{nm},\frac{1}{nm},\dots,\frac{1}{nm}\right) = H_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right)+$$

$$+H_m\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\dots,\frac{1}{m}\right) = \varphi(n)+\varphi(m),$$

továbbá $\varphi(2) = H_2(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 1$. Így $\varphi(n)$ ($\varphi(1)=0$ miatt, amely minden additív számelméleti függvényre teljesül) eleget tesz a (8) egyenletnek és $\varphi(2)=1$. Az 5° tulajdonság egyenletében legyen most $n=2$; $p_1=\frac{m_1}{m}$, $p_2 = 1-\frac{m_1}{m}$ $(1\leqq m_1<m)$;

$$q_{1k} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{ha} \quad k = 1,2,\dots,m_1 \\ 0 & \text{ha} \quad k = m_1+1, m_1+2,\dots,m \end{cases}$$

és

$$q_{2k} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{ha} \quad k = 1,2,\dots,m-m_1 \\ 0 & \text{ha} \quad k = m-m_1+1, m-m_1+2,\dots m. \end{cases}$$

Ekkor

$$H_{2m}\Bigl(\overbrace{\frac{1}{m},\dots,\frac{1}{m}}^{m_1},\overbrace{0,\dots,0}^{m-m_1},\overbrace{\frac{1}{m},\dots,\frac{1}{m}}^{m-m_1},\overbrace{0,\dots,0}^{m_1}\Bigr) =$$

$$= H_2\left(\frac{m_1}{m},1-\frac{m_1}{m}\right)+\frac{m_1}{m}H_m\Bigl(\overbrace{\frac{1}{m_1},\dots,\frac{1}{m_1}}^{m_1},\overbrace{0,\dots,0}^{m-m_1}\Bigr)+$$

$$+\left(1-\frac{m_1}{m}\right)H_m\Bigl(\overbrace{\frac{1}{m-m_1},\dots,\frac{1}{m-m_1}}^{m-m_1},\overbrace{0,\dots,0}^{m_1}\Bigr).$$

Innen felhasználva a H_n entrópiára érvényes 1° és 4° tulajdonságokat

$$\varphi(m) = H_2\left(\frac{m_1}{m},1-\frac{m_1}{m}\right)+\frac{m_1}{m}\varphi(m_1)+\left(1-\frac{m_1}{m}\right)\varphi(m-m_1),$$

ahonnan $H_2(x, 1-x) = f(x)$ miatt

$$f\left(\frac{m_1}{m}\right) = \varphi(m)-\frac{m_1}{m}\varphi(m_1)-\left(1-\frac{m_1}{m}\right)\varphi(m-m_1) =$$

$$= \frac{m_1}{m}\varphi(m)-\frac{m_1}{m}\varphi(m_1)+\left(1-\frac{m_1}{m}\right)\varphi(m)-\left(1-\frac{m_1}{m}\right)\varphi(m-m_1) =$$

$$= -\frac{m_1}{m}\varphi\left(\frac{m_1}{m}\right)-\left(1-\frac{m_1}{m}\right)\varphi\left(1-\frac{m_1}{m}\right).$$

Mivel $\frac{m_1}{m}=r\in(0,1)$ tetszőleges racionális szám lehet, ezért (10)-et bebizonyítottuk. A fordított állítás egyszerű számolással ellenőrizhető.

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy a tételben szereplő $\varphi(n)$ függvény $f(x)$ segítségével közvetlenül kifejezhető a

(11) $$\varphi(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} if\left(\frac{1}{i}\right) \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

formula szerint.

5. § Egy újabb feltétel

Ebben a paragrafusban egy igen egyszerű feltétel mellett oldjuk meg az információ alapegyenletét. Megmutatjuk, hogy $f(x)$-re a $[0,1]$ intervallumbeli folytonosság helyett elegendő a

(12) $$\lim_{x\downarrow 0} f(x)=f(0)$$

feltételt kiszabni ahhoz, hogy $f(x)=S(x)$ legyen. Megjegyezzük, hogy közvetlen módon (12)-ből nem következik az eddig nyert legenyhébb feltétel, azaz $f(x)$ mérhetősége (l. a 3. tételt!).

A bizonyítás alapja ERDŐS [8] következő ismert eredménye, melynek igen elegáns bizonyításai RÉNYI [12] és [13] dolgozataiban találhatók:

2. LEMMA. *Ha a $\varphi(n)$ additív számelméleti függvényre*

(13) $$\lim_{n\to\infty}[\varphi(n+1)-\varphi(n)]=0$$

teljesül, akkor létezik olyan c konstans, hogy

(14) $$\varphi(n)=c\log_2 n$$

minden $n=1,2,3,\dots$ természetes számra.

Meg kívánjuk jegyezni, hogy a folytonos (FADDEJEW [9]), illetve $(0,\frac{1}{2}]$-ben monoton növekvő (BORGES [3]) megoldások is erre a lemmára támaszkodnak.

5. TÉTEL. *Ha az $f(x)$ információfüggvényre* (12) *teljesül, akkor* $f(x)\equiv S(x)$, *ahol* $S(x)=-x\log_2 x-(1-x)\log_2(1-x)$ *a* SHANNON-*féle információfüggvény.*

Bizonyítás. Az ismert $f(0)=0$ (l. lemma) összefüggés és (12) miatt

$$a_n=f\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n=1,2,\dots)$$

nullsorozat. Ekkor (11)-et felhasználva a 4. tételben szereplő $\varphi(n)$ additív függvényre

$$\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} if\left(\frac{1}{i}\right)=\frac{n+1}{2n}\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} ia_i=\frac{n+1}{2n}\sum_{i=1}^{n} q_i a_i,$$

ahol

$$q_i=\frac{2i}{n(n+1)}>0 \qquad (i=1,2,\dots,n) \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n} q_i=1.$$

Ezért $a_n \to 0$ miatt $\sum_{i=1}^{n} q_i a_i \to 0$ $(n \to \infty)$, mert az utóbbi egy nullsorozat súlyozott számtani közepe. Ebből viszont

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(n)}{n} = 0 \tag{15}$$

következik. Másrészt a 4. tételből.

$$a_{n+1} = f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \varphi(n+1) - \frac{n}{n+1}\varphi(n),$$

ahonnan

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = a_{n+1} - \frac{\varphi(n)}{n+1} = a_{n+1} - \frac{n}{n+1}\frac{\varphi(n)}{n}$$

következik. Innen viszont $a_n \to 0$ és (15) miatt fennáll (13). Alkalmazva a 2. lemmát

$$\varphi(n) = \log_2 n,$$

mivel $\varphi(2) = 1$ miatt $c = 1$. Ekkor a 4. tételben szereplő $\varphi(r)$ függvény a $\log_2 r$ függvényt jelenti, azaz

$$f(r) = -r\log_2 r - (1-r)\log_2(1-r) \tag{16}$$

minden $r \in (0, 1)$ racionális számra. Legyen most $y \in (0, \frac{1}{2})$ tetszőleges *valós* szám, és $y < r_n < 2y$ $(n = 1, 2, \ldots)$ olyan *racionális* számokból álló sorozat, amelyre

$$\lim_{n \to \infty} r_n = y$$

teljesül. Ekkor a feltételek miatt

$$x_n = 1 - \frac{y}{r_n} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

nullsorozat. Legyen $x = x_n$ az információ alapegyenletében $((x_n, y) \in D,\ n = 1, 2, \ldots)$, akkor

$$f(y) = f(x_n) - (1-y)f\left(\frac{x_n}{1-y}\right) + (1-x_n)f\left(\frac{y}{1-x_n}\right).$$

Elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet (12), $\frac{y}{1-x_n} = r_n$ és (16) miatt

$$f(y) = \lim_{n \to \infty}(1-x_n)f\left(\frac{y}{1-x_n}\right) = \lim_{n \to \infty} f(r_n) =$$

$$= \lim_{n \to \infty}[-r_n\log_2 r_n - (1-r_n)\log_2(1-r_n)] = -y\log_2 y - (1-y)\log_2(1-y).$$

Ezzel állításunkat minden $y \in (0, \frac{1}{2})$ valós számra bebizonyítottuk. Ebből viszont az 1. lemmát felhasználva következik tételünk.

KOROLLÁRIUM. *Legyen a* $H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *függvény minden* $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *valószínűségeloszlásra definiálva és teljesüljön rá az* 1. *tételben szereplő* 1° *tulajdonság* $n=3$*-ra, továbbá* 2° *és* 3° $n=3, 4, \ldots$*-re. Ha*

$$\lim_{x \downarrow 0} H_2(x, 1-x) = 0, \tag{17}$$

akkor

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

a SHANNON*-féle entrópia.*

Bizonyítás. A 2. tételből következik, hogy $f(x) = H_2(x, 1-x)$ információfüggvény. A (17) feltétel miatt $f(x)$-re teljesül (12), így az 5. tételből $f(x) = S(x)$. Innen 3° (amely most $n=3, 4, \ldots$-re teljesül) miatt teljes indukcióval következik állításunk.

Ezzel a SHANNON-féle entrópiára újabb jellemzést nyertünk.

6. § Monoton információfüggvények

Ebben a pontban KENDALL [10] eredményét általánosítjuk oly módon, hogy a $(0, \frac{1}{2}]$-ben feltételezett monoton növekedés helyett csak monotonitást (csökkenést vagy növekedést) követelünk meg. A bizonyításban támaszkodunk BORGES [3] munkájában található gondolatokra.

3. LEMMA. *Ha az* $f(x)$ *információfüggvény a* $(0, \frac{1}{2}]$ *intervallumban monoton, akkor* $f(x)$ *növekvő és nemnegatív* $(0, \frac{1}{2}]$*-ben.*

Bizonyítás. Az információ alapegyenletében legyen $x = \frac{1}{2}$ és $y = \dfrac{1-2t}{2(1-t)}$, ahol $t \in (0, \frac{1}{2}]$ tetszőleges. Ekkor $(x, y) \in D$ és így

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1-2t}{1-t}\right) = f\left(\frac{1-2t}{2(1-t)}\right) + \frac{1}{2(1-t)} f(1-t).$$

Ebből az 1. lemmát alkalmazva $t \in (0, \frac{1}{2}]$-re

$$\frac{t}{2(1-t)} f(t) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1-2t}{2(1-t)}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{t}{1-t}\right) - f(t)\right]. \tag{18}$$

Először megmutatjuk, hogy $f(x)$ nem lehet monoton csökkenő. Ugyanis ha $f(x)$ csökkenő lenne, akkor $f(\frac{1}{2}) = 1$ miatt $f(x) \geqq 1$ minden $x \in (0, \frac{1}{2}]$-re. Legyen most $t \in (0, \frac{1}{3}]$ tetszőleges, ekkor

$$\frac{1}{2} > \frac{1-2t}{2(1-t)} > 0 \quad \text{és} \quad \frac{1}{2} \geqq \frac{t}{1-t} > t$$

miatt (18)-ból $f(t) \leqq 0$ következne, ami ellentmondás.

Ha viszont $f(x)$ *növekvő*, akkor (18)-ból $f(t) \geqq 0$ $t \in (0, \frac{1}{3}]$-ban, így a növekedés miatt ez $t \in (0, \frac{1}{2}]$-ben is érvényes.

6. TÉTEL. *Ha az $f(x)$ információfüggvény $(0, \frac{1}{2}]$-ben monoton, akkor $f(x)=S(x)$ minden $x\in[0, 1]$-re.*

Bizonyítás. A 3. lemma miatt ekkor $f(x)$ monoton növekvő és nemnegatív $(0, \frac{1}{2}]$-ben, ezért

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = f(0+) \geqq 0$$

létezik. Megmutatjuk, hogy $f(0+) = 0 = f(0)$, amiből az 5. tétel miatt következik állításunk. Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy $f(0+)>0$. Az információ alapegyenletében legyen $y\in(0, \frac{1}{2})$ rögzített és végezzük el az $x\to 0$ $\left(x\in(0, \frac{1}{2})\right)$ határátmenetet. Ekkor a monotonitás miatt

$$f(0+)+f(y+) = f(y)+(1-y)f(0+),$$

ahonnan

$$f(y+)-f(y) = -yf(0+)<0$$

következik. Ez viszont ellentmond a nyilvánvaló $f(y+)-f(y)\geqq 0$ egyenlőtlenségnek.

7. § A SHANNON-féle entrópia további jellemzéseiről

A SHANNON-féle entrópiára vonatkozólag ismertek olyan közvetlen jellemzések is, amelyek az alapvetőnek bizonyuló FADDEJEW-féle jellemzésben feltételezett algebrai tulajdonságok helyett más algebrai tulajdonságokat helyeznek előtérbe. Ilyen az 5° tulajdonságból következő $(q_{ik}=p_iq_k,\ i=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, m)$

$$(19)\quad \begin{aligned} &H_{nm}(p_1q_1, p_1q_2, \ldots, p_1q_m, p_2q_1, p_2q_2, \ldots, p_2q_m, \ldots, p_nq_1, p_nq_2, \ldots, p_nq_m) \\ &= H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)+H_m(q_1, q_2, \ldots, q_m) \end{aligned}$$

úgynevezett *additivitási* tulajdonság, ahol $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ és $\{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ tetszőleges valószínűségeloszlások. Ismeretes, hogy (19)-nek eleget tesznek a

$$H_{n,\alpha}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \frac{1}{1-\alpha}\log_2\sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha} \qquad (\alpha>0, \quad \alpha\neq 1)$$

α-adrendű entrópiák is, amelyekre

$$\lim_{\alpha\to 1} H_{n,\alpha}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

teljesül, ahol H_n a SHANNON-féle entrópiát jelöli. Az ACZÉL—DARÓCZY [1] dolgozatban ezekről további eredmények találhatók.

A (19) additivitási tulajdonságra alapuló *közvetlen* jellemzések közül első CHAUNDY—MCLEOD [4] dolgozatában található (a bizonyítás egyszerűsítésére és az eredmény általánosítására lásd ACZÉL—DARÓCZY [1] munkáját): *Legyen $H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ minden $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ valószínűségeloszlásra értelmezett valós függvény, amelyre teljesülnek a következő tulajdonságok:*

$\mathscr{A}$. *Létezik a* [0, 1] *intervallumban definiált folytonos* $g(x)$ *függvény, hogy*

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} g(p_i);$$

$\mathscr{B}$.
$$H_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1;$$

$\mathscr{C}$. *Fennáll a* (19) *additivitási egyenlet. Ekkor*

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

minden $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *valószínűségeloszlásra.*

Egy további jellemzés DARÓCZY [6] dolgozatban található. Ezzel részletesebben foglalkozunk az alábbiakban.

Tegyük fel, hogy a $H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ függvény minden $\{p_1, p_2, \ldots p_n\}$ véges valószínűségeloszlásra értelmezve van és teljesülnek rá a következő tulajdonságok:

I. $H_n(p_1, p_2, \ldots p_n)$ szimmetrikus $p_1, p_2, \ldots, p_n$-ben;

II. $H_2(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}) = 1$;

III. $H_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) = H_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, \ldots, p_n) + \Delta_{n-1}(p_1, p_2)$ $(n \geqq 3)$, ahol $\Delta_2(p_1, p_2)$ a $\bar{D} = \{(p_1, p_2): p_1 \geqq 0, p_2 \geqq 0, p_1 + p_2 \leqq 1\}$ tartományban folytonos;

IV. $H_{n+1}(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0) = H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$;

V. Teljesül a (19) additivitási egyenlet minden n-re és $m = 2$-re, azaz

$$H_{2n}(p_1 q, p_1(1-q), p_2 q, p_2(1-q), \ldots, p_n q, p_n(1-q)) =$$
$$= H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) + H_2(q, 1-q)$$

minden $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ eloszlásra és $q \in [0, 1]$-re.

7. TÉTEL. *Ha a* $H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *függvényre teljesülnek az* I., II., III., IV. *és* V. *tulajdonságok, akkor* H_n*-re teljesülnek az* 1. *tételben szereplő* 1°, 2° *és* 3° *tulajdonságok, továbbá* $H_2(x, 1-x)$ *folytonos* [0, 1]*-ben; így a* 3. *tétel miatt*

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

minden $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *eloszlásra.*

Bizonyítás. Lásd DARÓCZY [6].

Egy további dolgozatomban (DARÓCZY [7]) megjegyeztem, hogy az $\mathscr{A}$., $\mathscr{B}$. és $\mathscr{C}$. (elegendő $\mathscr{C}$-t csak $m = 2$-re feltenni) tulajdonságokból következik I., II., III., IV. és V., ezért az előbb ismertetett jellemzések közös gyökerének a FADDEJEW-féle jellemzés bizonyult. További probléma tárgyát képezi a I., II. és III. részaxiómarendszer önmagában történő vizsgálata, amely igen érdekes algebrai és topológiai kérdésekre vezet. Ezekre itt nem kívánok kitérni.

A SHANNON-féle entrópiára jellemző — a FADDEJEW-féle jellemzéstől független — tulajdonságokra példa az ACZÉL—PFANZAGL [2] tétel: *Legyen* $I_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

minden $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ $\left(p_i > 0,\ i=1, 2, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$ *valószínűségeloszlásra értelmezve, ahol* $n > 2$ *rögzített természetes szám. Tegyük fel, hogy* I_n*-re teljesülnek a következő tulajdonságok:*

α) *Létezik egy* $(0, 1)$*-ben értelmezett differenciálható* $h(x)$ *függvény, hogy*

$$I_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i h(p_i);$$

β) $$I_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i h(q_i) : q_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} q_i = 1\right\}.$$

Ekkor $I_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = AH_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) + B$, *ahol* H_n *a* SHANNON*-féle entrópiát jelöli és* $A \leqq 0$, B *konstans értékek.*

IRODALOM

[1] ACZÉL, J.—DARÓCZY, Z.: Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der Shannonschen Entropie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14**, 95—121, (1963).

[2] ACZÉL, J.—PFANZAGL, J.: Remarks on the Measurement of Subjective Probability and Information, *Metrika*, **11**, 91—105, (1966).

[3] BORGES, R.: Zur Herleitung der Shannonschen Information, *Math. Zeitschr.*, **96**, 282—287, (1967).

[4] CHAUNDY, T. W.—MCLEOD, J. B.: On a Functional Equation, *Proc. Edinburgh Mat. Soc.*, **12**, 7—8, (1960—61).

[5] CHINTSCHIN, A. J.: *Der Begriff der Entropie in der Wahrscheinlichkeitstrechnung*, Arbeiten zur Informationstheorie I., Berlin 1957.

[6] DARÓCZY, Z.: Über eine Charakterisierung der Shannonschen Entropie, *Statistica* (Bologna), **27**, 199—205, (1967).

[7] DARÓCZY, Z.: *Über die Charakterisierungen der Shannonschen Entropie*, Colloquium on Information Theory, Debrecen, 1967.

[8] ERDŐS, P.: On the distribution function of additive functions, *Ann. Math.*, **47**, 1—20, (1946).

[9] FADDEJEW, D. K.: *Zum Begriff der Entropie eines endlichen Wahrscheinlichkeitsschemas*, Arbeiten zur Informationstheorie I. Berlin 1957.

[10] KENDALL, D. G.: Functional equations in information theory, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **2**, 225—229, (1964).

[11] LEE, P. M.: On the axioms of information theory, *Ann. Math. Statist.*, **35**, 415—418, (1964).

[12] RÉNYI, A.: On a theorem of P. Erdős and its application in information theory., *Math. Cluj*, **1**, 341—344, (1959).

[13] RÉNYI., A.: *On measures of entropy and information.* Proc. IV. Berkeley Symp-Math. Statist. and Prob., I. 547—561, (1961).

[14] SHANNON, C. E.: A mathematical theory of communication, *Bell System Techn. J.*, **27**, 379—423 and 623—656, (1948).

[15] TVERBERG, H.: A new derivation of the information function, *Math. Scand.*, **6**, 297—298, (1958).

(Beérkezett: 1968. III. 5.)

ÜBER DAS SHANNONSCHEN MASS DER INFORMATION

von Z. DARÓCZY

Zusammenfassung

Der Ausgangspunkt der Untersuchungen ist die folgende

DEFINITION. Die im Intervall [0,1] definierte Funktion $f(x)$ mit der Beschränkung $f(\frac{1}{2}) = 1$ und $f(0) = f(1)$ wird eine *Informationsfunktion* gennant, wenn sie der *Grundgleichung der Information*

$$f(x)+(1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y)+(1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right) \tag{1}$$

für alle $(x, y) \in D = \{(x, y): 0 \leqq x<1,\ 0 \leqq y<1,\ x+y \leqq 1\}$ genügt.

Auf Grund dieser Definition kann man die *Entropie* einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ $\left(p_i \geqq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$ in der Form

$$H_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{i=2}^{n}{}' s_i f\left(\frac{p_i}{s_i}\right) \qquad (s_i = p_1+\dots+p_i;\quad i = 2, \dots, n) \tag{2}$$

erklären, wobei $f(x)$ eine beliebige Informationsfunktion ist. In der Arbeit wird gezeigt, dass die bekannten Charakterisierungen der Shannonschen Entropie auf die Lösung von (1) zurückgeführt werden können. Aus dieser Behauptung erhalten wir die stetigen, integrierbaren, monotonen und messbaren Lösungen von (1). Die allgemeine Lösung von (1) in den *rationalen* Punkten des Intervalls (0,1) wird mit Hilfe einer additiven zahlentheoretischen Funktion $\varphi(n)$ dargestellt. Auf Grund dieser Darstellung erhalten wir die im Punkt 0 stetige Lösung von (1). In der Arbeit werden noch weitere Ergebnisse und Probleme bezüglich der Grundgleichung der Information diskutiert.