REKURRENS FOLYAMATOK RITKÍTÁSÁRÓL

Írta: MOGYORÓDI JÓZSEF

Tekintsük a $t_0 \equiv 0 < t_1 < t_2 < \ldots$ pontfolyamatot, amelyről feltesszük, hogy rekurrens, azaz, hogy a $t_i - t_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ különbségek nemnegatív, egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Legyen a $\xi_i = t_i - t_{i-1}$ változók eloszlásfüggvénye $F(x)$ és tegyük fel, hogy ennek várható értéke véges pozitív szám:

$$0 < M(\xi_i) = \mu < +\infty.$$

Az $F(x)$ függvényt a rekurrens folyamat eloszlásfüggvényének nevezzük.

RÉNYI ALFRÉD [1] dolgozatában a rekurrens folyamat következő ritkítási modelljével foglalkozik: legyen adva a q szám, amelyről feltesszük, hogy $0 < q < 1$. Sorra haladva a $t_1, t_2, \ldots$ véletlen pontokon, minden egyes pontot a többitől függetlenül q valószínűséggel megtartjuk és $p = 1 - q$ valószínűséggel elhagyjuk. Ily módon az eredeti rekurrens pontfolyamatnak egy ritkítását nyerjük, azaz olyan $t_0^{(1)} \equiv 0 < t_1^{(1)} < t_2^{(1)} < \ldots$ véletlen pontsorozatot, amely az előbbinek részsorozata. Könnyű látni, hogy az új sorozat is rekurrens folyamat és a $t_i^{(1)} - t_{i-1}^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ különbségek eloszlásfüggvénye az x helyen

$$\sum_{k=1}^{\infty} q p^{k-1} F_k(x),$$

ahol $F_k(x)$ az $F(x)$ eloszlásfüggvény önmagával vett k-szoros konvolúciója.

Az [1] dolgozat eredménye többek között a következő: a fent leírt ritkítási eljárást n-szer egymás után a $q_1, q_2, \ldots, q_n$ számokkal elvégezve, nyerjük, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{i=1}^{n} q_i = 0$ esetén

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\prod_{j=1}^{n} q_j \left(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right) < x\right) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}} \qquad (x > 0),$$

ahol $t_0^{(n)} \equiv 0$ és $t_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ az n-ik ritkítás után nyert rekurrens folyamat Markov-pontja. Más szóval, megfelelő normálás után határértékben *Poisson*-folyamatot nyerünk.

Az [1] dolgozatban alkalmazott ritkítási eljárást megfogalmazhatjuk a következő módon is: legyenek a $v_i^{(n)}$ $(i, n = 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók egymástól és az eredeti pontfolyamattól független, nemnegatív egész értékeket felvevő *Pascal*-eloszlású változók,

$$P\left(v_i^{(n)} = k\right) = q_n (1 - q_n)^{k-1} \qquad (i, n, k = 1, 2, \ldots).$$

Legyen $t_0^{(1)} \equiv 0$ és

$$t_i^{(1)} = t_{\sum\limits_{k=1}^{i} \nu_k^{(1)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Nyilvánvaló, hogy az ily módon konstruált $t_i^{(1)}$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók azonosak a fentebbi eljárás első lépése során nyert valószínűségi változókkal. Definiáljuk rekurzíve a $t_i^{(n)}$ változókat a következő módon: $t_0^{(n)} \equiv 0$ és $i=1, 2, \ldots$ esetén

$$t_i^{(n)} = t^{(n-1)}_{\sum\limits_{k=1}^{i} \nu_k^{(n)}} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Ekkor $t_i^{(n)}$ megegyezik a ritkítási eljárás n-szer történő alkalmazása után nyert megfelelő valószínűségi változóval.

Ez a megfogalmazás sugalmazza a ritkítási eljárás következő általánosítását. Legyenek a $\nu_i^{(n)}$ $(i, n=1, 2, \ldots)$ független valószínűségi változók pozitívak és egész értékűek, legyenek továbbá azonos eloszlásúak és függetlenek az eredeti $\{t_i\}$ rekurrens folyamattól. A ritkítást a következő módon végezzük el: legyen $t_i^{(0)} = t_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ és definiáljuk a $t_i^{(n)}$ véletlen pontokat a

$$t_i^{(n)} = t^{(n-1)}_{\sum\limits_{k=1}^{i} \nu_k^{(n)}} \qquad (n, i = 1, 2, \ldots)$$

rekurziós formulával. Legyen továbbá $t_0^{(n)} = t_0 \equiv 0$.

Ez a ritkítási eljárás annyiban általánosabb, mint a RÉNYI-féle, hogy a $\nu_i^{(n)}$ változók tetszőleges eloszlásúak lehetnek, viszont annyiban speciálisabb, hogy minden n esetén ugyanazon eloszlás szerint ritkítjuk a folyamatot. Az általunk bevezetett ritkítási eljárás alkalmazást nyerhet a részecskeszámlálók elméletében, ahol hasonló modellt szoktak vizsgálni, amikor több leosztó fokozaton keresztül regisztrálják a beérekezett részecskéket [2].

Vezessük be a $P(\nu_i^{(n)} = k) = p_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ jelölést. Érdektelen annak az esetnek a vizsgálata, amikor valamilyen k indexre teljesül, hogy $p_k = 1$. Ekkor ugyanis a ritkítás szisztematikus. A továbbiakban tehát feltesszük, hogy $p_k < 1$ $(k=1, 2, \ldots)$. Legyen

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k, \quad z = \sigma + i\tau, \; |z| \leqq 1 \tag{1}$$

a $\nu_i^{(n)}$ valószínűségi változók generátorfüggvénye.

A $t_i^{(n)}$ véletlen pontokat az általunk vizsgált ritkítási modellben a következő módon fejezhetjük ki. Legyen $Z_i^{(1)} = \nu_i^{(1)}$ $(i=1, 2, \ldots)$ és definiáljuk rekurzíve a $Z_i^{(n)}$ valószínűségi változókat a következő kifejezésekkel:

$$Z_1^{(n)} = \sum_{i=1}^{\nu_1^{(n)}} Z_i^{(n-1)}, \; Z_2^{(n)} = \sum_{i=\nu_1^{(n)}+1}^{\nu_1^{(n)}+\nu_2^{(n)}} Z_i^{(n-1)}, \ldots \qquad (n \geqq 2)$$

Mármost a $t_i^{(n)}$ véletlen pontok a $\{t_i\}$ alapul vett rekurrens folyamattal a következő módon fejezhetők ki:

$$t_0^{(n)} \equiv 0, \quad t_1^{(n)} = t_{Z_1^{(n)}}, \quad t_2^{(n)} = t_{Z_1^{(n)}+Z_2^{(n)}}, \ldots$$

Könnyű látni, hogy a $Z_i^{(n)}$ $(i, n=1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók generátorfüggvénye az (1) generátorfüggvény önmagával vett n-szeres iteráltja:

(2)
$$f_n(z) = \overbrace{f(f(f \ldots (f}^{n\text{-szer}}(z)) \ldots)),$$

továbbá, hogy rögzített n esetén a $Z_i^{(n)}$ valószínűségi változók egymástól függetlenek és azonos eloszlásúak.

1. Lemma. *Tegyük fel, hogy $D^2(v_i^{(n)}) < +\infty$ és legyen $M(v_i^{(n)}) = M$. Ekkor a*

$$P(Z_i^{(n)} < M^n x) \qquad (n \to +\infty)$$

eloszlásfüggvénynek létezik $G(x)$ határértéke. A $G(x)$ függvény eloszlásfüggvény, amelynek várható értéke 1 és szórásnégyzete

$$D^2(v_i^{(n)})/(M^2 - M).$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $M > 1$. Tekintsük azt a *Galton—Watson*-folyamatot, (vö. [3], I. fej. 8.1. Tétel), amelyben az első nemzedék tagjai számának eloszlását az (1) által adott generátorfüggvény határozza meg. Ekkor e folyamatban az n-edik nemzedék tagszáma eloszlásának generátorfüggvényét a (2) kifejezés adja. Ismeretes, hogy a fenti feltételek fennállása esetén az n-edik nemzedék tagjainak száma M^n-nel osztva 1 valószínűséggel konvergál valamely W valószínűségi változóhoz, amelynek eloszlásfüggvénye esetleg az $x=0$ hely kivételével abszolút folytonos, várható értéke 1 és szórásnégyzete

$$\frac{f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2}{(f'(1))^2 - f'(1)}.$$

Minthogy $P(v_i^{(n)} = 0) = 0$, azért $f_n(0) = 0$. Így a W eloszlásfüggvénye az $x = 0$ helyen folytonos. Esetünkben $f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2 = D^2(v_i^{(n)})$ és $f'(1) = M$. A $Z_i^{(n)}$ eloszlása a *Galton—Watson*-folyamat n-edik nemzedékének eloszlásával egyezik meg. Ezért állításunk bizonyítást nyert.

Megjegyzés. A $Z_i^{(n)}$ valószínűségi változók konstrukciója eltér a *Galton—Watson*-folyamat konstrukciójától. A lemma bizonyításának módszerével nem mutatható meg, hogy $Z_i^{(n)}/M^n$ majdnem mindenütt konvergál valamilyen W valószínűségi változóhoz. Ez valószínűleg nem is igaz.

A $t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, mint könnyű belátni, a következő:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(Z_i^{(n)} = k)\, F_k(x),$$

ahol $F_k(x)$ jelentése ugyanaz, mint előbb. Megmutatjuk most, hogy megfelelő normálás után, ha $n \to +\infty$, a $t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}$ valószínűségi változóknak létezik határeloszlása.

1. Tétel. *Ha $D^2(v_i^{(n)}) < +\infty$, akkor*

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}}{\mu M^n} < x\right) = G(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

ahol $G(x)$ a $Z_i^{(n)}/M^n$ sorozat határeloszlása.

Bizonyítás. A $t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}$ valószínűségi változó a következő alakban állítható elő:

$$t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)} = \sum_{j=\sum_{l=1}^{i-1} Z_l^{(n)}+1}^{\sum_{l=1}^{i} Z_l^{(n)}} \xi_j .$$

Tekintsük a

$$\sum_{j=\sum_{l=1}^{i-1} Z_l^{(n)}+1}^{\sum_{l=1}^{i} Z_l^{(n)}} \xi_j/\mu Z_i^{(n)} \tag{3}$$

valószínűségi változót. Minthogy a ξ_j valószínűségi változók várható értéke véges és a $Z_i^{(n)}/M^n$ sorozat határeloszlása, $G(x)$, folytonos, azért (3) sztochasztikusan 1-hez konvergál. (Vö.: P. RÉVÉSZ [4], J. MOGYORÓDI [5].) A

$$\frac{t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}}{\mu M^n} = \frac{t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}}{\mu Z_i^{(n)}}\cdot\frac{Z_i^{(n)}}{M^n}$$

összefüggés alapján CRAMÉR egy lemmáját használva adódik állításunk.

A véletlen ritkítási eljárás szemléletesebbé tétele céljából tekintsük az alapul vett $t_0 \equiv 0 < t_1 < \ldots$ rekurrens folyamatot. Nevezzük R_1 transzformációnak azt az eljárást, amikor a $t_0 \equiv 0$, $t_{\nu_1^{(1)}}$, $t_{\nu_1^{(1)}+\nu_2^{(1)}}$, ..., $t_{\nu_1^{(1)}+\nu_2^{(1)}+\ldots+\nu_n^{(1)}}$, ... véletlen pontok kivételével az eredeti rekurrens folyamat többi véletlen pontját elhagyjuk. Nevezzük továbbá C transzformációnak a felújítási folyamat $1/M$-szeresére való összenyomását. A $T_1 = CR_1$ transzformáció (amelynél a rekurrens folyamaton először az R_1, majd a C transzformációt hajtjuk végre; egyébként a sorrend tetszőleges) eredményeképpen újabb rekurrens folyamatot nyerünk, amelynél két egymásra következő *Markov*-pont távolságának átlagértéke továbbra is μ. Hasonlóan definiáljuk a T_2, T_3, ... transzformációkat is. A $T^{(n)}$ transzformáció jelentse a $T_1, T_2, \ldots, T_n$ transzformációk egymás utáni végrehajtását. A $T^{(n)}$ transzformáció segítségével nyerjük a

$$\frac{t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}}{M^n} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

valószínűségi változót.

Az 1. Tétel bizonyításánál felhasznált, véletlen tagszámú összegekre vonatkozó nagy számok törvénye lehetőséget ad arra, hogy RÉNYI ALFRÉD eredményét az övétől eltérő módon bizonyítsuk. Legyen $\nu_i^{(n)}$ független, *Pascal*-eloszlású valószínűségi változók sorozata:

$$P(\nu_i^{(n)} = k) = q_n(1-q_n)^{k-1}, \qquad (i, n, k = 1, 2, \ldots),$$

ahol $0 < q_n < 1$. Nyilvánvaló, hogy $M(\nu_i^{(n)}) = \dfrac{1}{q_n}$. Készítsük el, mint fentebb is tettük, a $Z_i^{(n)}$ valószínűségi változókat. Jelölje $f_q(z)$ a q paraméterű *Pascal*-eloszlás generátorfüggvényét:

$$f_q(z) = \frac{qz}{1-(1-q)z}.$$

Ekkor a $Z_i^{(n)}$ valószínűségi változók generátorfüggvénye, mint könnyen látható,

$$f_{q_n}(f_{q_{n-1}}(\dots(f_{q_1}(z))\dots)) = f_{q_1 q_2 \dots q_n}(z).$$

A $Z_i^{(n)}$ valószínűségi változók szintén *Pascal*-eloszlásúak és

$$P(Z_i^{(n)} = k) = Q_n(1-Q_n)^{k-1},$$

ahol $Q_n = \prod_{i=1}^{n} q_i$.

Bebizonyítjuk most a következő állítást:

2. LEMMA. *Ha* $0<q_j<1$ $(j=1,2,\dots,n)$ *és* $\lim_{n\to+\infty} Q_n = 0$, *akkor*

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_i^{(n)} Q_n < x) = 1-e^{-x}. \qquad (x>0, \quad i=1,2,\dots)$$

Bizonyítás. A

$$P(Z_i^{(n)} Q_n < x) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{Q_n}\right]} Q_n(1-Q_n)^{k-1} = 1-(1-Q_n)^{\left[\frac{x}{Q_n}\right]}$$

összefüggés alapján azonnal adódik állításunk.

2. TÉTEL. *Legyen* $\{v_i^{(n)}\}$ *független valószínűségi változók sorozata, amely független az alapul vett* $t_0 \equiv 0 < t_1 < t_2 < \dots$ *rekurrens folyamattól, továbbá*

$$P(v_i^{(n)} = k) = q_n(1-q_n)^{k-1}, \qquad (i,n,k = 1,2,\dots, \quad 0<q_n<1).$$

Ha $\lim_{n\to+\infty} Q_n = 0$, *akkor*

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}}{\mu} Q_n < x\right) = 1-e^{-x} \qquad (x>0).$$

Bizonyítás. A 2. Lemmára támaszkodva, állításunkat az 1. Tételhez hasonló módon bizonyíthatjuk.

Vizsgáljuk meg most a ritkítási eljárás során invariáns alapul vett rekurrens folyamatokat. Azt mondjuk, hogy az alapul vett rekurrens folyamat a T_1 (vagy akármelyik T_i) transzformációra nézve invariáns, ha a T_1 transzformáció végrehajtása után nyert rekurrens folyamat eloszlásfüggvénye megegyezik a transzformáció elvégzése előtti eloszlásfüggvénnyel.

3. TÉTEL. *Tekintsük azokat a rekurrens folyamatokat, amelyeknek* $F(x)$ *eloszlásfüggvénye véges várható értékkel rendelkezik. Az* (1) *formula által adott* $f(z)$ *generátorfüggvényhez tartozó* T_1 *transzformációra nézve egyedül a* $G\left(\frac{x}{\mu}\right)$ *eloszlásfüggvénnyel rendelkező rekurrens folyamatok invariánsak, ahol* $G(x)$ *az* 1. *Lemmában definiált eloszlásfüggvény és* μ *tetszőleges rögzített pozitív szám.*

Bizonyítás. Legyen az alapul vett rekurrens folyamat eloszlásfüggvénye $G\left(\frac{x}{\mu}\right)$. Először belátjuk, hogy ez a folyamat a T_1 transzformációra nézve invariáns. Ugyanis a T_1 végrehajtása utáni rekurrens folyamat *Laplace*-transzformáltja

$$f\left(g\left(\frac{\mu s}{M}\right)\right), \quad \operatorname{Re} s \geqq 0,$$

ahol $g(s)$ a $G(x)$ eloszlásfüggvény *Laplace*-transzformáltja. Ismeretes, hogy $g(s)$ eleget tesz a

$$g(s) = f\left(g\left(\frac{s}{M}\right)\right)$$

függvényegyenletnek (vö. [3], 1. fej. 8.2. Tétel). Ezért a T_1 transzformáció elvégzése utáni rekurrens folyamat eloszlásfüggvényének *Laplace*-transzformáltja $g(\mu s)$. Vagyis a transzformáció elvégzése utáni rekurrens folyamat eloszlásfüggvénye is $G\left(\frac{x}{\mu}\right)$.

Fordítva, legyen az alapul vett rekurrens folyamat invariáns és a hozzá tartozó $F(x)$ eloszlásfüggvény $\mu > 0$ várható értékű. Beláthatjuk, hogy $F(x) = G\left(\frac{x}{\mu}\right)$. Ha $\varphi(s)$ jelöli az $F(x)$ függvény *Laplace*-transzformáltját, akkor az alapul vett rekurrens folyamat invarianciája miatt

$$\varphi(s) = f\left(\varphi\left(\frac{s}{M}\right)\right). \tag{4}$$

A $g(\mu s)$ *Laplace*-transzformált ugyancsak kielégíti ezt a függvényegyenletet, továbbá mindkettő várható értéke μ. Ismeretes (vö. [3], 1. fej. 8.2 Tétel), hogy ekkor

$$F(x) = G\left(\frac{x}{\mu}\right).$$

Tételünket ezzel bebizonyítottuk.

Egy következő dolgozatban a pontfolyamatok ritkításának további problémáira vissza fogunk térni.

IRODALOM

[1] RÉNYI A.: A POISSON-folyamat egy jellemzése, *MTA. Mat. Kut. Int. Közl.*, **1** (1956) 4. sz. 519—527.

[2] TAKÁCS L.: Részecskeszámlálók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatokról, *MTA. III. Oszt. Közl.* **6** (1956) 369—421.

[3] TH. HARRIS: *The theory of branching processes,* Springer. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1963.

[4] P. RÉVÉSZ: *The laws of large numbers,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967.

[5] J. MOGYORÓDI: On the law of large numbers for the sum of a random number of independent random variables, *Annales Univ. Sci. Budapestinensis. Sect. Math.,* **8** (1965) 33—38.

[6] E. PICARD: *Leçons sur quelques équations fonctionnelles,* Dunod, Paris. 1928.

(Beérkezett: 1968. III. 8.)

О РЕДЕЮЩИХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПРОЦЕССАХ

J. MOGYORÓDI

Рассмотрим исходный рекуррентный процесс: $t_0 \equiv 0 < t_1 < t_2 < \ldots$ т. е. случайный поток такой, что разницы $t_i - t_{i-1} = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ неотрицательные, независимые и одинаково распределенные случайные величины. Введем следующую операцию: пусть $\nu_i^{(n)}$ $(i, n = 1, 2, \ldots)$ независимые и одинаково распределенные случайные величины, принимающие целые положительные значения и не зависящие от исходного случайного потока. Пусть $t_i^{(0)} = t_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots$ и определим рекуррентно случайные потоки следующим образом:

$$t_0^{(n)} \equiv 0, \quad t_1^{(n)} = t^{(n-1)}_{\nu_1^{(n)}}, \quad t_2^{(n)} = t^{(n-1)}_{\nu_1^{(n)} + \nu_2^{(n)}}, \ldots \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Доказывается, что, если $P(\nu_i^{(n)} = k) < 1$, $(k = 1, 2 \ldots)$, и $D^2(\nu_i^{(n)}) < +\infty$, существует предел

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}}{\mu M^n} < x \right) = G(x),$$

для всех фиксированных $i = 1, 2, \ldots$, где $G(x)$ непрерывная функция распределения, $M = M(\nu_i^{(n)})$ и $\mu = M(t_i - t_{i-1}) < +\infty$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Исследуется также функция распределения исходного рекуррентного потока, останущаяся инвариантной при вышеупомянутых операциях.