WALSH–FOURIER-SOROK ERŐS APPROXIMÁCIÓJÁRÓL

Írta: SCHIPP FERENC

Bevezetés

Legyen $x=0, x_0x_1...x_n...$ $(x_n=0, 1)$ az $x\in[0, 1)$ szám diadikus kifejtése, és R a $[0, 1)$ intervallum diadikus racionális számainak halmaza. A továbbiakban az $x\in R$ elemekre lehetséges kétféle felírás közül azt választjuk, amelyben egy bizonyos jegytől kezdve csupa 0 jegy áll.

Az $\{r_n(x)\}$ $(n=0, 1, 2, ...)$ *Rademacher*-féle függvényrendszert a következőképpen értelmezzük:

$$r_n(x) = (-1)^{x_n} \qquad (x\in[0, 1), \quad n = 0, 1, 2, ...). \tag{1}$$

Ismeretes, hogy a *Rademacher*-féle rendszer a $[0, 1)$ intervallumon erősen multiplikatív ortogonális függvényrendszer. Az $\{r_n(x)\}$ rendszer által generált $\{\psi_n(x)\}$ $(n=0, 1, 2, ...)$ szorzatrendszert *Walsh*-féle ortonormált rendszernek nevezzük, azaz $\psi_0(x)\equiv 1$, és ha az n természetes szám diadikus előállítása

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i \qquad (n_i = 0, 1), \tag{2}$$

akkor

$$\psi_n(x) = \prod_{n_i=1} r_i(x). \tag{3}$$

Az (1), (2) és (3) egyenlőségekből következik az alábbi előállítás is:

$$\psi_n(x) = (-1)^{\sum_{i=0}^{\infty} n_i x_i}. \tag{4}$$

A *Walsh*-rendszer szerint haladó sorfejtések vizsgálatánál alapvető szerepet játszik az N. J. FINE [1] által az

$$x = 0, x_0 x_1 \dots x_n \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}, \quad y = 0, y_0 y_1 \dots y_n \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}}$$

$$(x_n, y_n = 0, 1)$$

számokra bevezetett következő „összeg":

$$x \dot{+} y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^{n+1}}. \tag{5}$$

Könnyen látható, hogy a *Walsh*-függvények a fenti összeadásra nézve lényegében multiplikatív függvények, azaz

$$\psi_n(x \dot{+} y) = \psi_n(x)\psi_n(y) \qquad (x \dot{+} y \notin R, \quad n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

továbbá, ha $f(x) \in L[0, 1)$, akkor bármely $[0, 1)$-beli y-ra $f(x \dot{+} y) \in L[0, 1)$ és

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x \dot{+} y)\,dx. \tag{7}$$

Jelöljük $D_n(x)$-szel az n-edik *Walsh—Dirichlet*-féle magfüggvényt, $S_n(f;\, x)$-szel az $f \in L[0, 1]$ függvény $\{\psi_n(x)\}$ rendszer szerint haladó *Fourier*-sorának n-edik részletösszegét, azaz legyen

$$\begin{gathered} D_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \psi_\nu(x), \\ S_n(f; x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu(f)\,\psi_\nu(x) = \int_0^1 f(x \dot{+} u)\,D_n(u)\,du \\ \left(c_\nu(f) = \int_0^1 f(u)\,\psi_\nu(u)\,du\right). \end{gathered} \tag{8}$$

Könnyen igazolható, hogy $n = 2^k + n'$-re $(0 < n' \leqq 2^k)$

$$D_n(x) = D_{2^k}(x) + r_k(x)\,D_{n'}(x), \tag{9}$$

ahonnan $n' = 2^k$-ra a

$$D_{2^{k+1}}(x) = \prod_{\nu=1}^{k} (1 + r_\nu(x)) = \begin{cases} 2^{k+1} & (x \in [0, 2^{-(k+1)})), \\ 0 & (x \in [2^{-(k+1)}, 1)) \end{cases} \tag{10}$$

egyenlőséget kapjuk.

G. W. MORGENTHALER [2] nyomán azt mondjuk, hogy az $f(x)$ $\big(x \in [0, 1)\big)$ függvény eleget tesz az α kitevős *Walsh—Lipschitz*-féle feltételnek (jelben: $f(x) \in \operatorname{Lip} \alpha(W)$), ha létezik olyan A_α állandó, hogy

$$|f(x \dot{+} y) - f(x)| \leqq A_\alpha y^\alpha \qquad \big(x, y \in [0, 1),\ x \dot{+} y \notin R\big). \tag{11}$$

Mivel (5) alapján $|x - y| \leqq x \dot{+} y$, azért minden a $[0, 1)$ intervallumon értelmezett, α-kitevős (közönséges) *Lipschitz*-féle feltételnek eleget tevő függvény egyben kielégíti az α kitevős *Walsh—Lipschitz*-féle feltételt is.

S. YANO [3] megmutatta, hogy minden $\operatorname{Lip} \alpha(W)$ $(0 < \alpha < 1)$ függvényosztályhoz tartozó függvény egyenletesen approximálható $n^{-\alpha}$ nagyságrendben a tekintett függvény *Walsh—Fourier*-sorának n-edik (C, β) $(\beta < \alpha)$ közepeivel, azaz

$$\sigma_n^{(\beta)}(f; x) - f(x) = O(n^{-\alpha}) \qquad (0 < \alpha < 1, \alpha < \beta), \tag{12}$$

ahol

$$\begin{gathered} \sigma_n^{(\beta)}(f; x) = \frac{1}{A_{n-1}^{(\beta)}} \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)} S_\nu(f; x) \\ \left(A_n^{(\beta)} = \frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)}{n!}, \quad A_0^{(\beta)} = 1\right). \end{gathered} \tag{13}$$

Jelöljük $h_n(f, p, \beta; x)$-szel az $f(x)$ függvény *Walsh—Fourier*-sorának ún. erős közepeit, azaz legyen

$$h_n(f, p, \beta; x) = \left\{ \frac{1}{A_{n-1}^{(\beta)}} \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)} |S_\nu(f; x) - f(x)|^p \right\}^{1/p}. \tag{14}$$

Az erős approximáció megfelelő problémáját trigonometrikus és polinomszerű rendszerek szerinti kifejtésekre, azaz a $h_n(f, p, \beta; x)$ közepek konvergenciasebességének vizsgálatát ALEXITS GY. [4] vetette fel. Azóta több szerző (ALEXITS [5], ALEXITS—KRÁLIK [6], [7], LEINDLER [8]) foglalkozott e kifejtések erős közepeinek approximációs kérdéseivel; ezek a vizsgálatok számos érdekes eredményre vezettek.

E dolgozatban tetszőleges Lip $\alpha(W)$-beli függvény *Walsh*-függvények szerinti sorfejtésének erős approximációs tulajdonságaival foglalkozunk, nevezetesen igazoljuk a következő tételt:

Tétel: *Ha* $f(x) \in \mathrm{Lip}\, \alpha(W)$, *ahol* $0 < \alpha < 1$ *és* $1/p > \alpha$, *akkor tetszőleges* $\beta > 0$ *esetén a* $[0, 1)$ *intervallumban egyenletesen fennáll a*

$$h_n(f, p, \beta; x) = O(n^{-\alpha}) \tag{15}$$

reláció.

Ez a tétel S. YANO említett tételének élesítését adja. Analóg tétel igaz trigonometrikus és polinomszerű rendszerekre. (Lásd: [5], [6], [7], [8].)

1. § Segédtételek

Tételünk igazolásához felhasználunk néhány segédtételt.

1. Segédtétel: *A*

$$D_n^*(y; k) = \sum_{i=0}^{k-1} \psi_n\left(y + \frac{1}{2^{i+1}}\right) r_i(y) D_{2^i}(y) \tag{1.1}$$

módosított Walsh—Dirichlet-féle magfüggvénnyel a $D_n(y)$ *magfüggvény az alábbi módon állítható elő:*

$$D_n(y) = \frac{D_{2^k}(y) - \psi_n(y)}{2} - \frac{D_n^*(y; k)}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.2}$$

Bizonyítás: Az (1. 2) azonosság igazolásához felhasználjuk a $D_n(y)$ magfüggvénynek a [9] dolgozatban megadott következő előállítását:

$$D_n(y) = \psi_n(y) \sum_{i=0}^{k-1} n_i r_i(y) D_{2^i}(y), \tag{1.3}$$

ahol az $n_i (=0, 1)$ számok a diadikus alakban felírt $n = \sum_{i=0}^{k-1} n_i 2^i$ természetes szám jegyeit jelentik. Mivel (4) alapján

$$\frac{1 - \psi_n\left(\frac{1}{2^{i+1}}\right)}{2} = \frac{1 - (-1)^{n_i}}{2} = n_i,$$

azért az (1), (6) és (1. 1) egyenlőségek figyelembevételével a

$$(1.4)\quad D_n(y) = 1/2\,\psi_n(y) \sum_{i=0}^{k-1} r_i(y)\, D_{2^i}(y) - 1/2 \sum_{i=0}^{k-1} \psi_n(y \overset{\circ}{+} 1/2^{i+1})\, r_i(y)\, D_{2^i}(y)$$

egyenlőséget kapjuk.

Az (1. 3) azonosságot az $n = 2^k - 1 = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i$ számra alkalmazva (3) és (10) alapján a

$$\sum_{i=0}^{k-1} r_i(y)\, D_{2^i}(y) = \psi_{2^k-1}(y)\, D_{2^k-1}(y) = \psi_{2^k-1}(y)\big(D_{2^k}(y) - \psi_{2^k-1}(y)\big) =$$
$$= D_{2^k}(y) - 1$$

egyenlőség adódik, ahonnan (10), (1. 1) és (1. 4) figyelembevételével a

$$D_n(y) = \frac{D_{2^k}(y) - \psi_n(y)}{2} - \frac{D_n^*(y;k)}{2}$$

bizonyítandó állítást kapjuk.

2. Segédtétel: *Tetszőleges m természetes számra vezessük be a következő jelöléseket:*

$$(1.5)\quad u = (u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad E_m = \{u : u = u_1, u_2, \ldots, u_m),\ u_j \in [0,1),\ j = 1, \ldots, m\},$$

$$\xi(u) = u_1 \overset{\circ}{+} u_2 \overset{\circ}{+} \ldots \overset{\circ}{+} u_m \qquad (u \in E_m).$$

Legyen továbbá

$$(1.6)\qquad I(m;k) = \{i : i = (i_1, i_2, \ldots, i_m),\ i_j \in G,\ 0 \leqq i_j < k,\ j = 1, 2, \ldots, m\},$$

ahol G jelenti a nem negatív egész számok halmazát. Legyen végül

$$(1.7)\qquad \eta(i) = \frac{1}{2^{i_1+1}} \overset{\circ}{+} \frac{1}{2^{i_2+1}} \overset{\circ}{+} \ldots \overset{\circ}{+} \frac{1}{2^{i_m+1}},$$

$$\Delta(i, m; u) = \prod_{j=1}^{m} D_{2^{i_j}}(u_j), \quad R_i(u) = \prod_{j=1}^{m} r_{i_j}(u_j)$$

és

$$(1.8)\qquad K_{2^k}^*(m;u) = 2^{-k} \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \prod_{j=1}^{m} D_\nu^*(u_j;k),$$

ahol $u \in E_m$ és $i \in I(m,k)$.

Ekkor az E_m halmaz megszámlálható sok pontjától eltekintve fennáll a

$$(1.9)\qquad |K_{2^k}^*(m;u)| \leqq 2^{-k} \sum_{i \in I(m,k)} D_{2^k}\big(\xi(u) \overset{\circ}{+} \eta(i)\big)\, \Delta(i, m; u)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás: A (6), (1. 1), (1. 5), (1. 6), (1. 7) és (1. 8) egyenlőségek alapján az E_m halmaz egy megszámlálható részhalmazát kivéve fennáll a

$$2^k K^*_{2^k}(m;u) = \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=0}^{k-1} \psi_\nu (u_j \dot{+} 1/2^{s+1})\, r_s(u_j)\, D_{2^s}(u_j) \right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \sum_{i\in I(m,k)} \psi_\nu(\xi(u) \dot{+} \eta(i))\, R_i(u)\, \Delta(i,m;u) =$$

$$= \sum_{i\in I(m,k)} R_i(u)\, \Delta(i,m;u) \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \psi_\nu(\xi(u) \dot{+} \eta(i)) =$$

$$= \sum_{i\in I(m,k)} R_i(u)\, \Delta(i,m;u)\, D_{2^k}(\xi(u) \dot{+} \eta(i))$$

egyenlőség. Ebből

$$D_{2^k}(\xi(n) \dot{+} \eta(i)) \geqq 0, \quad |R_i(u)| \equiv 1, \quad \Delta(i,m;u) \geqq 0$$

alapján (1. 9) már következik.

3. Segédtétel: *Bármely k természetes számra*

$$\int_{E_m} |K^*_{2^k}(m;u)|\, du \leqq C_1(m), \tag{1.10}$$

ahol $C_1(m)$ csak m-től függő állandó.

Bizonyítás: A 2. segédtétel alapján elegendő a

$$\delta_k = 2^{-k} \sum_{i\in I(m,k)} \int_{E_m} D_{2^k}(\xi(u) \dot{+} \eta(i))\, \Delta(i,m;u)\, du \leqq C_1(m) \tag{1.11}$$

egyenlőtlenséget igazolnunk. Az (1. 11)-ben szereplő integrálokra az $u'_j = u_j \dot{+} \frac{1}{2^{i_j+1}}$ $(j=1, 2, \dots, m)$, $u' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_m)$ helyettesítéssel és a (10)-ből adódó $D_{2^{i_j}}\left(u'_j \dot{+} \frac{1}{2^{i_j+1}}\right) = D_{2^{i_j}}(u'_j)$ egyenlőség, valamint (7) figyelembevételével a következőt kapjuk:

$$\int_{E_m} \Delta(i,m;u)\, D_{2^k}(\xi(u) \dot{+} \eta(i))\, du = \int_{E_m} \Delta(i,m;u')\, D_{2^k}(\xi(u'))\, du' = \tag{1.12}$$

$$= \int_{E_m} \Delta(i,m;u)\, D_{2^k}(\xi(u))\, du.$$

A (8) egyenlőség alapján az

$$\int_0^1 D_{2^{\nu_1}}(u_1)\, D_{2^{\nu_2}}(u_1 \dot{+} v)\, du_1 = S_{2^{\nu_1}}(D_{2^{\nu_2}}; v) = D_{2^{\min(\nu_1,\nu_2)}}(v)$$

azonosságot nyerjük. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\int_{E_m} \Delta(i, m; u)\, D_{2^k}(\xi(u))\, du =$$

$$= \int_0^1 \Big(D_{2^{i_1}}(u_1) \ldots \int_0^1 \Big(D_{2^{i_{m-1}}}(u_{m-1}) \int_0^1 D_{2^{i_m}}(u_m)\, D_{2^k}(u_1 \dotplus u_2 \dotplus \ldots \dotplus u_m)\, du_m\Big) du_{m-1} \ldots\Big) du_1 =$$

$$= \int_0^1 \Big(D_{2^{i_1}}(u_1) \ldots \int_0^1 \Big(D_{2^{i_{m-2}}}(u_{m-2}) \int_0^1 D_{2^{i_{m-1}}}(u_{m-1})\, D_{2^{i_m}}(u_1 \dotplus \ldots \dotplus u_{m-1})\, du_{m-1}\Big) du_{m-2} \ldots\Big) du_1 =$$

$$= \int_0^1 \Big(D_{2^{i_1}}(u_1) \ldots \int_0^1 \Big(D_{2^{i_{m-3}}}(u_{m-3}) \int_0^1 D_{2^{i_{m-2}}}(u_{m-2})\, D_{2^{\min(i_{m-1}, i_m)}}(u_1 \dotplus \ldots \dotplus u_{m-2})\, du_{m-2}\Big) \ldots\Big) du_1 =$$

$$= \ldots = \int_0^1 D_{2^{i_1}}(u_1)\, D_{2^{\min(i_2, i_3, \ldots, i_m)}}(u_1)\, du_1 = D_{2^{\min(i_1, i_2, \ldots, i_m)}}(0) =$$

$$= 2^{\min(i_1, i_2, \ldots, i_m)}.$$

Jelöljük $m(i)$-vel az $i=(i_1, \ldots, i_m) \in I(m, k)$ vektor koordinátáinak minimumát. Az (1. 12)-t és a most kapott egyenlőséget egybevetve az

$$\int_{E_m} \Delta(i, m; u)\, D_{2^k}(\xi(u) \dotplus \eta(i))\, du = 2^{m(i)}$$

előállítás adódik, és ennek alapján (1. 11)-ből a

$$\delta_k = 2^{-k} \sum_{i \in I(m,k)} 2^{m(i)} = 2^{-k} \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^\nu \sum_{\substack{m(i)=\nu \\ i \in I(m,k)}} 1$$

egyenlőséget kapjuk. Mivel

$$\sum_{\substack{m(i)=\nu \\ i \in I(m,k)}} 1 < (k-\nu)^m,$$

azért

$$\delta_k < 2^{-k} \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^\nu (k-\nu)^m = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(k-\nu)^m}{2^{k-\nu}} < \sum_{\nu-1}^{\infty} \frac{\nu^m}{2^\nu} = C_1(m),$$

amivel az (1. 10) egyenlőtlenséget igazoltuk.

4. Segédtétel: *Bármely n természetes számra $p \geqq 1$ választás mellett*

$$\text{(1.13)} \qquad \left\{\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} |S_\nu(f; x)|^p\right\}^{1/p} \leqq C_2(p)\, M(f) \qquad (x \in [0, 1), \quad n = 1, 2, \ldots),$$

ahol $M(f)$ az $f \in L[0, 1]$ függvény abszolút értékének $[0, 1)$ intervallumra vonatkozó lényeges felső határa és $C_2(p)$ csak p-től függő állandó.

Bizonyítás: Mivel (8) és (1. 2) alapján

$$S_\nu(f; x) = \int_0^1 f(x \dotplus y)\, D_\nu(y)\, dy = 1/2 \int_0^1 f(x \dotplus y)\, D_{2^k}(y)\, dy -$$

$$- 1/2 \int_0^1 f(x \dotplus y)\, \psi_\nu(y)\, dy - 1/2 \int_0^1 f(x \dotplus y)\, D_\nu^*(y; k)\, dy,$$

továbbá (3) és (10) alapján

$$\left|\int_0^1 f(x\dotplus y)\, D_{2^k}(y)\, dy\right| \leqq M(f), \quad \left|\int_0^1 f(x\dotplus y)\, \psi_\nu(y)\, dy\right| \leqq M(f),$$

azért

$$|S_\nu(f;x)|^p \leqq \left(M(f)+1/2\left|\int_0^1 f(x\dotplus y)\, D_\nu^*(y;k)\, dy\right|\right)^p \leqq$$

$$\leqq 2^{p-1} M(f)^p + 1/2\left|\int_0^1 f(x\dotplus y)\, D_\nu^*(y;k)\, dy\right|^p =$$

$$= 2^{p-1} M(f)^p + 1/2\,|S_\nu^*(f,k;x)|^p.$$

Ebből következik az

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} |S_\nu(f;x)|^p \leqq 2^{p-1} M(f)^p + 1/2n \sum_{\nu=0}^{n-1} |S_\nu^*(f,k;x)|^p \qquad (n<2^k)$$

egyenlőtlenség, amelynek figyelembevételével (1. 13) igazolásához elég megmutatnunk, hogy

$$\text{(1. 14)} \qquad \sigma_n^*(f,p;x) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} |S_\nu^*(f,k;x)|^p\right\}^{1/p} \leqq C_1^*(p)\, M(f),$$

ahol $C_1^*(p)$ csak p-től függő állandó.

Jelöljük $k=k(n)$-nel azt a természetes számot, amelyre $2^{k-1} \leqq n < 2^k$, és $m=m(p)$-vel azt a legkisebb páros számot, amelyre $m \geqq p$. Ekkor, mint ismeretes, fennállnak a

$$\text{(1. 15)} \qquad \sigma_n^*(f,p;x) \leqq \sigma_n^*(f,m;x) \leqq 2^{1/m}\sigma_{2^k}^*(f,m;x) \leqq 2^{1/p}\sigma_{2^k}^*(f,m;x)$$

egyenlőtlenségek. A $\sigma_{2^n}^*(f, m; x)$ közepek becsléséhez írjuk fel az $|S_\nu^*(f, k; x)|^m$ hatványt az alábbi alakban:

$$|S_\nu^*(f,k;x)|^m = \left\{\int_0^1 f(x\dotplus y)\, D_\nu^*(y;k)\, dy\right\}^m =$$

$$= \left(\int_0^1 f(x\dotplus u_1)\, D_\nu^*(u_1;k)\, du_1\right) \cdots \left(\int_0^1 f(x\dotplus u_m)\, D_\nu^*(u_m;k)\, du_m\right) =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\prod_{j=1}^m f(x\dotplus u_j)\, D_\nu^*(u_j;k)\right) du_1 \ldots du_m,$$

és vezessük be az

$$\text{(1. 16)} \qquad F_m(x;u) = \prod_{j=1}^m f(x\dotplus u_j) \qquad (x\in[0,1),\ u=(u_1,\ldots,u_m)\in E_m)$$

jelölést. Ezek és a 2. segédtétel jelöléseinek felhasználásával $\sigma_{2^k}^*(f, m; x)$-re a következőt kapjuk:

$$\sigma_{2^k}^*(f, m; x) = \left\{2^{-k} \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \int\limits_{E_m} F_m(x; u) \sum_{j=1}^{m} D_\nu^*(u_j; k)\, du\right\}^{1/m} =$$

$$= \left\{ \int\limits_{E_m} \left(F_m(x; u)\, 2^{-k} \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \prod_{j=1}^{m} D_\nu^*(u_j; k)\right) du\right\}^{1/m} =$$

$$= \left\{ \int\limits_{E_m} F_m(x; u)\, K_{2^k}^*(m; u)\, du\right\}^{1/m}.$$

Ebből az (1. 10) és az (1. 16)-ból adódó

$$|F_m(x; u)| \leqq M(f)^m$$

egyenlőtlenség alapján a

$$\sigma_{2^k}^*(f, m; x) \leqq M(f) \left\{ \int\limits_{E_m} |K_{2^k}^*(m; u)|\, du\right\}^{1/m} \leqq$$

$$\leqq M(f) \{C_1(m)\}^{1/m} \leqq \{C_1(p+2)\}^{1/p} M(f)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amivel (1. 14)-et, s ezzel együtt az (1. 13) egyenlőtlenséget is igazoltuk.

2. § A tétel igazolása

Az (1. 13) egyenlőtlenség birtokában tételünk hasonló módszerrel bizonyítandó, amellyel az analóg állítást trigonometrikus vagy polinomszerű rendszerre igazolták.

Legyen $2^{k_0-1} < n \leqq 2^{k_0}$ és vezessük be az $N_0 = 0$, $N_l = 2^{l-1}$ $(l = 1, 2, \ldots, k_0)$, $N_{k_0+1} = n$ jelöléseket. A tétel igazolásához felhasználjuk a $(\beta-1)q' > -1$ esetén fennálló

$$\left\{ \sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} (A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)})^{q'}\right\}^{1/q'} = O(1)\, 2^{-l/p'} \sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)} \qquad (l = 2, 3, \ldots, k_0+1) \tag{2.1}$$

egyenlőtlenséget, ahol $p' = \dfrac{q'}{q'-1}$ ([8]).

Legyen $f(x) \in \mathrm{Lip}\, \alpha(W)$ $(0 < \alpha < 1)$ és

$$T_l(x) = S_{2^l}(f; x) = \int_0^1 f(x \dotplus y)\, D_{2^l}(y)\, dy \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ekkor (10) és (11) alapján magától értetődően érvényes az

$$|f(x) - T_l(x)| \leqq \int_0^1 |f(x \dotplus y) - f(x)|\, D_{2^l}(y)\, dy \leqq A_\alpha 2^{-l\alpha} \tag{2.2}$$

egyenlőtlenség, következésképpen $\nu \geqq 2^l$-re nyerjük, hogy

$$(2.3)\qquad |S_\nu(f;x)-f(x)|^p = |(S_\nu(f;x)-S_\nu(T_l;x))+(T_l(x)-f(x))|^p \leqq$$
$$\leqq 2^{p-1}\{|S_\nu(f-T_l;x)|^p+|T_l(x)-f(x)|^p\} = O(1)\{|S_\nu(f-T_l;x)|^p+2^{-l\alpha p}\}.$$

A (2. 3) egyenlőtlenség felhasználásával

$$(2.4)\qquad \begin{aligned}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}|S_\nu(f;x)-f(x)|^p &= O(2^{-l\alpha p})\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}+\\ &+O(1)\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}|S_\nu(f-T_l;x)|^p \qquad (l=2,3,\dots,k_0+1).\end{aligned}$$

Válasszuk a p' számot olyan nagyra, hogy $(\beta-1)q'>-1$ teljesüljün $\left(q'=\frac{p'}{p'-1}\right)$, amikor is a *Hölder*-egyenlőtlenség és (2. 1) alapján

$$(2.5)\qquad \begin{aligned}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}|S_\nu(T_l-f;x)|^p &\leqq \left\{\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}}(A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)})^{q'}\right\}^{1/q'}\left\{\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}}|S_\nu(T_l-f;x)|^{pp'}\right\}^{1/p'} =\\ &= O(1)\left\{2^{-l/p'}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}\right\}\left\{\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}}|S_\nu(f-T_l;x)|^{pp'}\right\}^{1/p'} \qquad (l=2,3,\dots,k_0+1).\end{aligned}$$

Mivel a 4. segédtétel és (2. 2) alapján

$$\left\{\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}}|S_\nu(f-T_l;x)|^{pp'}\right\}^{1/p'} = O(1)\,N_l^{1/p'}2^{-\alpha l p} = O(1)\,2^{l/p'}2^{-\alpha l p},$$

azért (2. 4) és (2. 5) figyelembevételével a

$$(2.6)\qquad \sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}|S_\nu(f;x)-f(x)|^p = O(1)\,2^{-\alpha l p}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)} \qquad (l=2,3,\dots,k_0+1)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel $\gamma>-1$ mellett

$$(2.7)\qquad 0<K_1<\frac{A_n^{(\gamma)}}{n^\gamma}<K_2,$$

így azt kapjuk, hogy $A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}=O(1)n^{(\beta-1)}(\nu<2^{k_0-2})$. Ennek figyelembevételével

(2. 6) és (2. 7) alapján a (14) értelmezés szerint a

$$h_n^p(f,p,\beta;x)=\frac{1}{A_{n-1}^{(\beta)}}\sum_{\nu=0}^{n-1}A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}|S_\nu(f;x)-f(x)|^p\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{A_{n-1}^{(\beta)}}\sum_{l=2}^{k_0-1}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}}A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}|S_\nu(f;x)-f(x)|^p+$$

$$+\frac{1}{A_{n-1}^{(\beta)}}\sum_{l=k_0}^{k_0+1}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}}A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}|S_\nu(f;x)|-f(x)|^p=$$

$$=O(1)\frac{1}{n^\beta}\sum_{l=2}^{k_0-1}2^{-\alpha lp}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}}A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}+\frac{O(1)}{A_{n-1}^{(\beta)}}\sum_{l=k_0}^{k_0+1}2^{-\alpha lp}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}}A_{n-\nu-1}^{(p-1)}=$$

$$=O(1)\frac{1}{n^\beta}\sum_{l=2}^{k_0-1}2^{-\alpha lp}n^{\beta-1}2^l+\frac{O(1)\,2^{-\alpha k_0 p}}{A_{n-1}^{(\beta)}}\sum_{\nu=0}^{n-1}A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}=$$

$$=O(1)\left\{\frac{1}{n}\sum_{l=2}^{k_0-1}2^{(1-\alpha p)l}+2^{-\alpha k_0 p}\right\}$$

egyenlőségeket nyerjük, ahonnan $1-\alpha p>0$ miatt a

$$h_n^p(f,p,\beta;x)=O(1)\left\{\frac{1}{n}2^{(1-\alpha p)k_0}+2^{-\alpha k_0 p}\right\}=O(1)\,2^{-\alpha p k_0}=O(1)n^{-\alpha p}$$

bizonyítandó állítást kapjuk.

Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] N. J. Fine: On the Walsh functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 372—414.
[2] G. W. Morgenthaler: On Walsh-Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84** (1957), 472—507.
[3] S. Yano: On approximation by Walsh functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951), 962—967.
[4] G. Alexits: Une contribution à la théorie constructive des fonctions, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 149—157.
[5] G. Alexits: Sur les bormes de la théorie de l' approximation des fonctions continues par polynômes, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **8** (1963), 329—340.
[6] G. Alexits—D. Králik: Über den Annäherungsgrad der Approximation im Starken Sinne von stetigen Funktionen, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **8** (1963), 317—327.
[7] G. Alexits—D. Králik: Über die Approximation im Starken Sinne, *Acta Sci. Math.*, **25** (1965).
[8] L. Leindler: Über die Approximation im Starken Sinne, *Acta. Math. Sci. Hung.*, **16** (1965). 255—262.
[9] F. Schipp: Über die Größenordnung der Partialsummen der Entwicklung integrierbarer Funktionen nach *W*-Systemen, *Acta Sci. Math.* **28** (1967), 123—134.

(Beérkezett: 1968. VI. 30.)

ON THE STRONG APPROXIMATION BY THE PARTIAL SUMS OF THE WALSH—FOURIER SERIES

by

F. SCHIPP

Summary

This paper gives a generalisation of the theorem of S. YANO [3]:

Let $S_n(f;x)$ be the n-th partial sum of the *Walsh—Fourier* expansion of $f(x) \in L[1,0]$ and let $h_n(f, p, \beta; x)$ be the following mean:

$$h_n(f, p, \beta; x) = \frac{1}{A_{n-1}^{(\beta)}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)} |S_\nu(f;x) - f(x)|^p \right\}^{1/p}$$

$$\left(A_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{n}, p \geqq 1, \beta > 0 \right).$$

The main result is the following theorem: If $f(x)$ satisfies the condition $f(x) \in \text{Lip}\, \alpha(W) (0 < \alpha < 1)$ [2] and if $p^{-1} > \alpha$, then the estimate

$$h_n(f, p, \beta; x) = O(n^{-\alpha}) \quad (\beta > 0)$$

is true uniformly in the interval [0,1].