

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A FÉLIG KORLÁTOS HERMITIKUS OPERÁTOROK ÖNADJUNGÁLT FOLYTATÁSAINAK ELMÉLETE ÉS ALKALMAZÁSAI (II)*

Írta: M. G. KREJN

6. §. Véges defektus-számú¹ félig korlátos operátorok

1. Mindenekelőtt kimondjuk a következő tételt.

18. TÉTEL. Ha a T alulról félig korlátos operátornak véges $n(T)$ defektus-száma van, akkor T bármelyik $\tilde{T}$ önadjungált folytatása szintén alulról félig korlátos és, ezen túlmenően, minden ilyen folytatás spektrumának a $(-\infty, m(T))$ számközbe eső része véges számú sajátértékből áll, amelyek multiplicitásának az összege legfeljebb $n(T)$.

Ennek a tételnek a bebizonyítása nem jár semmiféle nehézséggel. Minthogy azonban a következő paragrafusban általánosabb állítást fogunk bebizonyítani (21. tétel), a 18. tétel bizonyítását elhagyjuk.

A 15. tétel lehetővé teszi az alábbi élesebb tétel igazolását.²

19. TÉTEL. Legyen $\tilde{S}$ az S operátornak — amelyre $m(S) > 0$ és amelynek n defektus-száma véges — egy önadjungált folytatása; legyen továbbá $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r\}$ az $\mathfrak{N}_0, \mathfrak{D}[\tilde{S}]$ halmazok közös részének egy bázisa.

Ekkor $v(\tilde{S})$ — az $\tilde{S}$ operátor negatív sajátértékeihez tartozó multiplicitások összege — pontosan egyenlő a

$$(6.1) \quad \sum_{j,k=1}^r \tilde{S}[\varphi_j, \varphi_k] \xi_j \bar{\xi}_k$$

alakban fellépő negatív négyzetek számával.

Bizonyítás. A 4. §-ban található 4. lemma értelmében tetszés szerinti $f \in \mathfrak{D}[\tilde{S}]$ elemre³

$$\tilde{S}[f, f] = \int_m^\infty \lambda d|E(\lambda)f|^2 \cong \int_m^0 \lambda d|E(\lambda)f|^2 = \sum_{j=1}^v \mu_j |(f, \psi_j)|^2,$$

* Математический сборник 20 (1947) 431—495. és 21 (1947) 365—404. A fordítás első része ugyanezen folyóirat 18 (1968) 273—314. oldalain jelent meg, s a cikk I. fejezetének 1.—5. §-át és az I. fejezet irodalomjegyzékét tartalmazza.

¹ (n, n) defektus-indexű hermitikus operátor defektus-számának az n kardinális számot nevezzük.

² Könnyű belátni, hogy a 18. tétel a 19. tétel következménye; erre a körülményre azonban nem hivatkozhatunk, ugyanis a 19. tétel bizonyítása során támaszkodni fogunk a 18. tételre, amelyben bebizonyítottuk, hogy az $\tilde{S}$ operátor negatív spektruma véges számú sajátértékből áll.

³ Feltesszük, hogy $m = m(\tilde{S}) < 0$, mert $m(\tilde{S}) \geq 0$ esetén a tétel helyessége nyilvánvaló.

ahol $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_v$ az $\tilde{S}$ operátor

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_v \quad (< 0)$$

negatív sajátértékeihez tartozó sajátvektorokból alkotott teljes ortonormális rendszer.
Speciálisan az

$$f = \sum_{k=1}^r \xi_k \varphi_k$$

helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j,k=1}^r \tilde{S}[\varphi_j, \varphi_k] \xi_j \bar{\xi}_k \cong \sum_{j=1}^v \mu_j \left| \sum_{k=1}^r (\varphi_k, \psi_j) \xi_k \right|^2,$$

és ebből következik, hogy a (6.1) alakban fellépő negatív négyzetek p száma nem nagyobb, mint v .

Másképpen a 15. tétel szerint fennáll

$$\psi_j = \sum_{k=1}^r a_{jk} \varphi_k + \chi_j \quad (\chi_j \in \mathfrak{D}[S]; \quad j = 1, 2, \dots, v)$$

és így

$$\psi = \sum_{j=1}^v \eta_j \psi_j = \sum_{k=1}^r \xi_k \varphi_k + \chi = \varphi + \chi,$$

ahol

$$\xi_k = \sum_{j=1}^v a_{jk} \eta_j \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

$$\chi = \sum_{j=1}^v \eta_j \chi_j \in \mathfrak{D}[S].$$

De ekkor a 8. lemma értelmében

$$\tilde{S}[\psi, \psi] = \tilde{S}[\varphi, \varphi] + \tilde{S}[\chi, \chi] = \tilde{S}[\varphi, \varphi] + S[\chi, \chi] \cong \tilde{S}[\varphi, \varphi].$$

Ily módon

$$\tilde{S}[\psi, \psi] = \sum_{j=1}^v \mu_j |\eta_j|^2 \cong \sum_{j,k} \tilde{S}[\varphi_j, \varphi_k] \xi_j \bar{\xi}_k = \tilde{S}[\varphi, \varphi],$$

tehát $v \leq p$.

A tételt bebizonyítottuk.

2. A továbbiakban szükségünk lesz néhány általános tételre, amely (n, n) defektus-indexű tetszés szerinti hermitikus operátorokra vonatkozik, ahol $n < \infty$.

Legyen H ($\mathfrak{D}(H) = \mathfrak{H}$) ilyen operátor, $\tilde{H}$ ennek egy önadjungált folytatása és

$$R_\lambda = (\tilde{H} - \lambda I)^{-1}$$

a $\tilde{H}$ operátor rezolvense, amely λ minden reguláris (vagyis $\tilde{H}$ spektrumához nem tartozó) értékére létezik.

Kiválasztva tetszés szerinti λ_0 ($\text{Im } \lambda_0 \neq 0$) számot, vegyünk fel a $H^* \varphi - \lambda_0 \varphi = 0$ egyenlet összes φ megoldásaiból álló $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ halmazban egy $\{\varphi_1(\lambda_0), \dots, \varphi_n(\lambda_0)\}$ ortonormális bázist, és vezessük be tetszés szerinti reguláris λ -ra a

$$(6.2) \quad \varphi_j(\lambda) = \varphi_j(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda \varphi_j(\lambda_0) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

jelölést.

Felhasználva a rezolvens

$$R_\mu = R_\lambda + (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda$$

függvényegyenletét nem nehéz megmutatni, hogy ekkor bármely két reguláris λ, μ értékre

$$(6.3) \quad \varphi_j(\mu) = \varphi_j(\lambda) + (\mu - \lambda) R_\mu \varphi_j(\lambda) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Innen a $\mu = \lambda_0$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy tetszés szerinti reguláris λ érték mellett a $\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)$ vektorok lineárisan függetlenek. Be fogjuk látni, hogy ezek a vektorok a

$$H^* \varphi = \lambda \varphi$$

egyenlet összes megoldásaiból álló $\mathfrak{H}_\lambda$ halmazban bázist alkotnak.

Csakugyan, minthogy

$$H^* R_\lambda f = \tilde{H} R_\lambda f = f + \lambda R_\lambda f \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

azért a (6.2) definíció értelmében

$$\begin{aligned} H^* \varphi_j(\lambda) &= H^* \varphi_j(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) H^* R_\lambda \varphi_j(\lambda_0) = \\ &= \lambda_0 \varphi_j(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) (\varphi_j(\lambda_0) + \lambda R_\lambda \varphi_j(\lambda_0)) = \lambda \varphi_j(\lambda) \\ &(j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Tekintsük az

$$(6.4) \quad U_\lambda = (\tilde{H} - \lambda I)(\tilde{H} - \lambda_0 I)^{-1} = I + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda$$

unitér operátort.

A (6.3) egyenlőségben μ helyébe λ -t, λ helyébe λ_0 -t írva kapjuk:

$$(6.5) \quad U_\lambda \varphi_j(\lambda_0) = \varphi_j(\lambda) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

A konstrukció szerint a $\{\varphi_1(\lambda_0), \dots, \varphi_n(\lambda_0)\}$ rendszer ortonormális bázis, továbbá U_λ és $U_\lambda^{-1} = U_{\lambda_0}^{-1}$ unitér operátor, tehát a $H^* \varphi - \lambda_0 \varphi = 0$ egyenlet φ megoldásaiból álló $\mathfrak{H}_{\lambda_0}$ halmaz

$$\{\varphi_1(\lambda_0), \dots, \varphi_n(\lambda_0)\}$$

bázisa szintén ortonormális.

Tekintetbe véve, hogy $\mathfrak{H}_{\lambda_0}$ az $\mathfrak{H}(H - \lambda_0 I)$ halmaz ortogonális komplementuma, arra az eredményre jutunk, hogy tetszés szerinti $f \in \mathfrak{H}$ elemre

$$f_{\lambda_0} = f - \sum_1^n (f, \varphi_k(\lambda_0)) \varphi_k(\lambda_0) \in \mathfrak{H}(H - \lambda_0 I),$$

és így bármilyen $f \in \mathfrak{H}$ mellett az

$$(6.6) \quad U_{\lambda_0} \left(f - \sum_1^n (f, \varphi_k(\lambda_0)) \varphi_k(\lambda_0) \right) = f_{\lambda_0} + (\lambda_0 - \lambda_0) (H - \lambda_0 I)^{-1} f_{\lambda_0}$$

kifejezés nem függ a H operátor $\tilde{H}$ folytatásának a megválasztásától.

Most legyen $\tilde{H}'$ a H operátornak $\tilde{H}$ -től különböző önadjungált folytatása, és legyen a korábbi jelölésekkel összhangban

$$R'_\lambda = (\tilde{H}' - \lambda I)^{-1}, \quad U'_\lambda = I + (\lambda - \lambda_0) R'_\lambda.$$

Az U'_λ operátorra alkalmazhatók ugyanazok a megfontolások, mint U_λ -ra, tehát a (6. 6) vektorról mondottak alapján

$$(6. 7) \quad U'_{\lambda_0} \left(f - \sum_1^n (f, \varphi_k(\bar{\lambda}_0)) \varphi_k(\bar{\lambda}_0) \right) = U_{\lambda_0} \left(f - \sum_1^n (f, \varphi_k(\bar{\lambda}_0)) \varphi_k(\bar{\lambda}_0) \right) \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Az U'_{λ_0} operátor, ugyanúgy mint U_{λ_0} , az $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ halmazt izometrikusan $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ -ra képezi le; ezért

$$(6. 8) \quad U'_{\lambda_0} \varphi_k(\bar{\lambda}_0) = \sum_{j=1}^n u_{jk} \varphi_j(\lambda_0) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

ahol $\|u_{jk}\|_1^r$ numerikus unitér matrix.

A (6. 4), (6. 5), (6. 7), (6. 8) egyenlőségeket egybevetve a következőket kapjuk:

$$(6. 9) \quad R'_{\lambda_0} f = R_{\lambda_0} f + \frac{1}{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0} \sum_{j,k=1}^n (u_{jk} - \delta_{jk}) (f, \varphi_k(\bar{\lambda}_0)) \varphi_j(\lambda_0) \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Jelöljük az $\|u_{jk} - \delta_{jk}\|_1^r$ matrix rangját r -rel. A $\{\varphi_1(\lambda_0), \dots, \varphi_n(\lambda_0)\}$ ortonormális bázis alkalmas megválasztása útján a (6. 9) összefüggés az

$$(6. 10) \quad R'_{\lambda_0} f = R_{\lambda_0} f - \sum_{j,k=1}^r \alpha_{jk} (f, \varphi_k(\bar{\lambda}_0)) \varphi_j(\lambda_0) \quad (f \in \mathfrak{H})$$

alakra hozható, ahol $\|\alpha_{jk}\|_1^r$ nem szinguláris matrix.

Tekintsük a

$$(6. 11) \quad Q(\lambda_0) = \|Q_{jk}(\lambda_0)\|_1^r = \|\alpha_{jk}\|_1^{-1}$$

matrixot, továbbá bármely a $\tilde{H}$ operátorra vonatkozóan reguláris λ pontban a

$$(6. 12) \quad Q(\lambda) = Q(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) \|(\varphi_j(\lambda), \varphi_k(\bar{\lambda}_0))\|_1^r$$

matrixot. A (6. 3) egyenletek segítségével nem nehéz megmutatni, hogy a $\tilde{H}$ operátor tetszés szerinti reguláris λ, μ pontjaira

$$(6. 13) \quad Q(\lambda) = Q(\mu) + (\lambda - \mu) \|(\varphi_j(\lambda), \varphi_k(\bar{\mu}))\|_1^r.$$

Ezenfelül ha egy reguláris λ -ra

$$(6. 14) \quad \det Q(\lambda) \neq 0,$$

akkor⁴

$$(6. 15) \quad R'_\lambda f = R_\lambda f - \sum_{j,k=1}^r Q_{jk}^{(-1)}(\lambda) (f, \varphi_j(\bar{\lambda})) \varphi_k(\lambda) \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

A $\lambda = \lambda_0$ esetben ez az egyenlőség a (6. 10), (6. 11) összefüggésekből következik. Minden más, a (6. 14) feltételt teljesítő reguláris λ -ra az egyenlőség annak a közvet-

⁴ $Q_{jk}^{(-1)}$ a Q^{-1} inverz matrix elemeit jelöli. Mellesleg megjegyezzük, hogy a (6.3), (6.13), (6.15) képletek analógok azokkal az ismert képletekkel, amelyeket H. BATEMAN [8] az integrálegyenletek elméletében nyert (lásd még KANTOROVICS—KRILOV: A felsőbb analízis közelítő módszerei, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.)

len igazolása útján látható be, hogy a belőle nyert $R'_\lambda f$ kifejezésre érvényes az

$$R'_\lambda f = R'_{\lambda_0} f + (\lambda - \lambda_0) R'_\lambda R'_{\lambda_0} f \quad (f \in \mathfrak{H})$$

egyenlet.

Mínthogy $\det Q(\lambda_0) \neq 0$, azért a λ_0 pont valamilyen környezetében a (6. 14) feltétel teljesül.

Mutassuk meg, hogy a (6. 14) feltétel minden olyan λ értékre teljesül, amely $\tilde{H}$ -ra nézve is, $\tilde{H}'$ -re nézve is reguláris.

Ebből a célból először megjegyezzük, hogy $\det Q(\lambda)$ bármely a $\tilde{H}$ operátorra vonatkozóan reguláris λ pont környezetében holomorf függvény, tehát ilyen pont nem lehet a determináns zérushelyeinek torlódási pontja, úgyhogy ilyen pont bármely környezetében találhatók λ értékek, amelyekre fennállnak a (6. 14), (6. 15) összefüggések.

Másrészt ha λ_1 a $\tilde{H}'$ operátornak is reguláris értéke, akkor λ_1 -től elindulva be lehet bizonyítani, hogy a λ_1 pont valamilyen környezetében

$$(6. 16) \quad R'_\lambda f = R_\lambda f - \sum_{j,k=1}^{r_1} P_{jk}^{(-1)}(f, \varphi_j^*(\lambda)) \varphi_k^*(\lambda) \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

ahol $\varphi_1^*(\lambda), \dots, \varphi_{r_1}^*(\lambda)$ a $H^* \varphi - \lambda \varphi = 0$ egyenlet olyan lineárisan független megoldásai, amelyek (6. 3) típusú függvényegyenleteknek tesznek eleget. Összehasonlítva a (6. 15), (6. 16) egyenlőségeket azokra a λ értékekre, amelyekre mindketten érvényesek, azt találjuk, hogy $r_1 = r$ és hogy létezik egy $\|c_{jk}\|_1^r$ nem szinguláris numerikus matrix, amelyre tetszés szerinti, a $\tilde{H}$ operátorra nézve reguláris λ mellett

$$\varphi_j^*(\lambda) = \sum_{k=1}^r c_{kj} \varphi_k(\lambda) \quad (j = 1, 2, \dots, r),$$

következőképpen⁵

$$(6. 17) \quad P(\lambda) = C^* Q(\lambda) C$$

minden olyan λ -ra, amelyre fennáll (6. 15) és (6. 16), és így a $\tilde{H}$ operátor minden λ reguláris értékére is. Speciálisan $\lambda = \lambda_1$ esetén a (6. 17) összefüggésből a következőket kapjuk:

$$\det Q(\lambda_1) = \det P(\lambda_1) |\det C|^2 \neq 0.$$

Állításunkat bebizonyítottuk.

3. Ezen előkészítő megfontolások után be fogjuk bizonyítani az alábbi tételt:

20. TÉTEL. Legyen S , $\tilde{S}$ és $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r\}$ ugyanolyan, mint a 19. tételben. Ha a 0 pont az $\tilde{S}$ operátorra vonatkozóan reguláris, akkor

$$S_\mu^{-1} f = \tilde{S}^{-1} f - \sum_{j,k=1}^r \alpha_{jk}(f, \varphi_j) \varphi_k \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

ahol $\|\alpha_{jk}\|_1^r$ olyan nem szinguláris hermitikus matrix, hogy a

$$\sum_{j,k=1}^r \alpha_{jk} \xi_j \bar{\xi}_k$$

⁵ A C^* matrix a $C = \|c_{jk}\|_1^r$ matrix komplex konjugáltjának a transzponáltja.

alakban fellépő negatív négyzetek száma pontosan egyenlő az $\tilde{S}$ operátor negatív sajátértékeihez tartozó multiplicitások összegével.

Bizonyítás. A 2. pont eredményeit fogjuk alkalmazni a

$$H = S, \quad \tilde{H} = \tilde{S}, \quad \tilde{H}' = S_\mu$$

esetre.

Ha

$$a > -m(\tilde{S}), \quad 0,$$

akkor $-a$ a $\tilde{H}$ operátornak és a $\tilde{H}'$ operátornak is reguláris értéke, tehát a (6. 15) képlet értelmében

$$(6. 18) \quad (S_\mu + aI)^{-1}f = (\tilde{S} + aI)^{-1}f - \sum_{j,k=1}^{r_1} Q_{jk}^{(-1)}(-a)(f, \varphi_j(-a))\varphi_k(-a).$$

Másrészt a tekintett a értékek mellett az $S + aI$, $S_\mu + aI$ operátorokra alkalmazható a 12. tétel, úgyhogy

$$(S_\mu + aI)^{-1} = (\tilde{S} + aI)^{-1} - (\tilde{S} + aI)_{\mathfrak{N}_{-a}}^{-1},$$

ahol $\mathfrak{N}_{-a}$ az $S^*\varphi + a\varphi = 0$ egyenlet összes megoldásainak a halmaza.

Ezek szerint

$$(\tilde{S} + aI)_{\mathfrak{N}_{-a}}^{-1}f = \sum_{j,k=1}^{r_1} Q_{jk}^{(-1)}(-a)(f, \varphi_j(-a))\varphi_k(-a) \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Visszaemlékezve az 1. §-ban szereplő ε állításra, azt nyerjük, hogy a $\{\varphi_1(-a), \dots, \varphi_{r_1}(-a)\}$ rendszer az

$$(6. 19) \quad \mathfrak{N}_{-a} \cap \mathfrak{D}((\tilde{S} + aI)^\pm) = \mathfrak{N}_{-a} \cap \mathfrak{D}[\tilde{S}]$$

közös részben bázist alkot, és

$$(6. 20) \quad \begin{aligned} Q_{jk}(-a) &= \int_{m(S)}^{\infty} (\lambda + a) d(E(\lambda) \varphi_j(-a), \varphi_k(-a)) = \\ &= \tilde{S}[\varphi_j(-a), \varphi_k(-a)] + a(\varphi_j(-a), \varphi_k(-a)) \quad (j, k = 1, 2, \dots, r_1). \end{aligned}$$

Most megjegyezzük, hogy ha egy $\varphi(\lambda)$ vektor-függvény (λ befutja $\tilde{S}$ reguláris pontjainak a halmazát) kielégíti a

$$(6. 21) \quad \varphi(\lambda) = \varphi(\mu) + (\lambda - \mu) R_\lambda \varphi(\mu) \quad (R_\lambda = (\tilde{S} - \lambda I)^{-1})$$

függvényegyenletet, és legalább egy λ reguláris értékre $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{D}[\tilde{S}]$, akkor ez fennáll minden reguláris λ -ra.

Valóban, ha $\varphi(\mu) \in \mathfrak{D}[\tilde{S}]$, akkor az $R_\lambda \varphi(\mu) \in \mathfrak{D}(\tilde{S}) \subset \mathfrak{D}[\tilde{S}]$ összefüggés és a (6. 21) egyenlet alapján $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{D}[\tilde{S}]$. Ennélfogva ha a $\{\varphi_1(-a), \dots, \varphi_{r_1}(-a)\}$ rendszer bázist alkot a (6. 19) halmazban, akkor $\{\varphi_1(0), \dots, \varphi_{r_1}(0)\}$ bázis lesz az

$$\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[\tilde{S}]$$

halmazban és így választható a 20. tétel szövegében szereplő $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ bázis gyanánt (speciálisan $r_1 = r$).

A (6. 18) egyenlőségben a $-a$ értéket helyettesíthetjük az $\tilde{S}$ operátor tetszés szerinti λ reguláris értékével. Speciálisan lehet $a=0$ és ekkor a következőt kapjuk:

$$(6. 22) \quad S_{\mu}^{-1} f = \tilde{S}^{-1} f - \sum_{j,k=1}^r Q_{jk}^{(-1)}(0) (f, \varphi_j(0)) \varphi_k(0).$$

Másrészt ha a (6. 20) egyenlőség mindkét oldalán a helyébe λ -t írunk, akkor λ -nak analitikus függvényeit nyerjük, és minthogy ezek a változó minden eléggé nagy pozitív értékére megegyeznek, azért azonosan egyenlők minden olyan λ -ra, amely az $\tilde{S}$ operátorra nézve reguláris. Következésképpen a (6. 20) összefüggés az $a=0$ esetben is érvényes.

Ilyen módon

$$(6. 23) \quad Q_{jk}(0) = \tilde{S}[\varphi_j(0), \varphi_k(0)] \quad (j, k = 1, 2, \dots, r),$$

ez pedig a (6. 22) egyenlőséggel és a 19. tétellel együtt a 20. tételt eredményezi.

6. 1. megjegyzés. A (6. 23) összefüggésből adódik, hogy ha 0 az $\tilde{S}$ operátor reguláris értéke, akkor a (6. 1) alak nem szinguláris. Nem nehéz meggyőződni arról, hogy a (6. 1) alak rangja mindig $r-d$, ahol $d (\geq 0)$ a 0 számnak mint az $\tilde{S}$ operátor sajátértékének a multiplicitása.

7. §. Hézagos spektrumú hermitikus operátorok

Bár a jelen munka alapvető feladata a félig korlátos operátorok önadjungált folytatásainak a tanulmányozása, mégis célszerű lesz, ha ismertetjük vizsgálataink azon következményeit, amelyek tetszés szerinti hermitikus operátorok önadjungált folytatásainak az elméletére vonatkoznak.

1. Legyen H hermitikus operátor, amelynek $\mathfrak{D}(H)$ értelmezési tartománya sűrű $\mathfrak{H}$ -ban.

Állapodjunk meg abban, hogy a véges (a, b) számközt a H operátor *hézagának* nevezzük, ha

$$\left| Hf - \frac{a+b}{2} f \right| \cong \frac{b-a}{2} |f| \quad (f \in \mathfrak{D}(H)).$$

Ha H önadjungált operátor, akkor az az állítás, hogy (a, b) az operátor hézaga, könnyen belátható módon azzal ekvivalens, hogy (a, b) a H operátor regularitási intervalluma (vagyis (a, b) minden pontja reguláris a H operátorra vonatkozóan).

Érvényes a következő tétel.

21. TÉTEL. Ha az (a, b) számköz a H ($\mathfrak{D}(\bar{H}) = \mathfrak{H}$) hermitikus operátor hézaga, akkor H -nak vannak önadjungált folytatásai⁶, és ezek között található legalább egy, amelyre nézve az (a, b) számköz regularitási intervallum.

Bizonyítás. Ha a H operátor helyett a

$$H_1 = \frac{2}{b-a} \left(H - \frac{a+b}{2} I \right)$$

⁶ A tételnek ezt az állítását még J. W. CALKIN bizonyította be (lásd [9], 2. tétel).

operátort tekintjük, akkor arra az esetre jutunk, amikor $a = -1$, $b = 1$. Ennélfogva az általánosság megszorítása nélkül eleve feltehetjük, hogy $a = -1$, $b = 1$, vagyis hogy a H operátorra teljesül a

$$(7.1) \quad |Hf| \cong |f| \quad (f \in \mathfrak{D}(H))$$

feltétel.

Értelmezzünk az $\mathfrak{R}(H)$ halmazon egy A hermitikus operátort az

$$AHf = f \quad (f \in \mathfrak{D}(H))$$

képlet útján. Ekkor $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{R}(H)$, és a (7.1) feltétel értelmében

$$|Ag| \cong |g| \quad (g \in \mathfrak{D}(A)),$$

azaz $\|A\| \cong 1$. A 2. tétel szerint az A operátornak van legalább egy $\tilde{A}$ önadjungált folytatása, amelyre $\|\tilde{A}\| \cong 1$. Meg fogjuk mutatni, hogy a 0 szám az $\tilde{A}$ operátornak nem sajátértéke.

Csakugyan, ha feltesszük, hogy létezik olyan $\varphi \neq 0$ vektor, amelyre $\tilde{A}\varphi = 0$, akkor azt állíthatjuk, hogy $\varphi \perp \mathfrak{R}(\tilde{A})$; de ez nem lehetséges, mert

$$\mathfrak{R}(\tilde{A}) \supset \mathfrak{R}(A) = \mathfrak{D}(H), \quad \overline{\mathfrak{D}(H)} = \mathfrak{H}.$$

Ha azonban 0 az $\tilde{A}$ operátornak nem sajátértéke, akkor létezik a $\tilde{H} = \tilde{A}^{-1}$ operátor és ez az $\tilde{A}$ operátorral együtt önadjungált. Minthogy $\|\tilde{A}\| \cong 1$, azért

$$|\tilde{H}f| \cong |f| \quad (f \in \mathfrak{D}(\tilde{H})),$$

vagyis a $(-1, 1)$ számköz a $\tilde{H}$ operátor hézaga, vagy ami az adott esetben ugyanaz, regularitási intervalluma. Minthogy a $\tilde{H}$ önadjungált operátor nyilvánvalóan a H operátor folytatása, a tételt bebizonyítottuk.

Az olvasóra bízunk, hogy a 2. § többi tételei segítségével megfelelő kritériumokat nyerjen arra, hogy az (a, b) hézaggal rendelkező H operátornak mikor lesz egyetlen olyan $\tilde{H}$ önadjungált folytatása, amelynek az (a, b) számköz regularitási intervalluma.

2. Amint korábban említettük, az alábbi tételből következik a 18. tétel.

22. TÉTEL. *Ha egy (a, b) hézaggal rendelkező H hermitikus operátor $n(>0)$ defektus-száma véges, akkor a H operátor tetszés szerinti $\tilde{H}$ önadjungált folytatása spektrumának az (a, b) számközbe eső része véges számú sajátértékből áll, amelyek multiplicitásának az összege legfeljebb n^7 .*

Bizonyítás. Legyen $\tilde{H}$ a H operátor olyan önadjungált folytatása, amelynek az (a, b) számköz regularitási intervalluma, $\tilde{H}'$ pedig H -nak egy másik önadjungált folytatása. A $\tilde{H}$, $\tilde{H}'$ operátorok minden λ reguláris pontjában az ezen operátorokhoz tartozó R_λ , R'_λ rezolvensek között fennáll az

$$(7.2) \quad R'_\lambda f = R_\lambda f - \sum_{j,k=1}^r Q_{jk}^{(-1)}(\lambda) (f, \varphi_j(\bar{\lambda})) \varphi_k(\lambda), \quad (f \in \mathfrak{H})$$

⁷ Könnyű belátni, hogy hermitikus S operátor esetén $m(S) = b(> -\infty)$ akkor és csak akkor, ha tetszés szerinti $a < b$ mellett az (a, b) számköz az S operátor hézaga; tehát a 18. tétel a 22. tételből következik.

összefüggés, ahol $r \leq n$, továbbá a $\varphi_k(\lambda)$ ($k=1, 2, \dots, r$) vektor-függvények és a $Q(\lambda) = \|Q_{jk}(\lambda)\|_1$ matrix a $\tilde{H}$ operátor reguláris pontjainak a halmazán holomorfok (lásd 6. §, 2. pont). Ebből adódik, hogy $\tilde{H}'$ spektrumának az (a, b) intervallum belsejébe eső része izolált sajátértékekből áll (és ezek a $\det Q(\lambda)$ függvény zérushelyei).

Először tegyük fel, hogy a $c = \frac{a+b}{2}$ érték a $\tilde{H}'$, $\tilde{H}$ operátorokra nézve reguláris.

Ekkor a (7. 2) egyenlőségben jogos a $\lambda = c$ helyettesítés és így a következőt kapjuk:

$$(7. 3) \quad R'_c f = R_c f - \sum_{j,k=1}^r Q_{jk}^{(-1)}(c)(f, \varphi_j(c)) \varphi_k(c).$$

Egyidejűleg megjegyezzük, hogy (a, b) a $\tilde{H}$ operátor hézaga, tehát

$$(7. 4) \quad |R_c f| \leq \frac{2}{b-a} |f| \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Most tegyük fel, hogy található a $\tilde{H}'$ operátor sajátvektoraiból álló olyan $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ ($n > r$) ortonormális rendszer, amelyre

$$\tilde{H}' \psi_j = \mu_j \psi_j, \quad a < \mu_j < b \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Ekkor tetszés szerinti $f \neq 0$ vektorra, amely

$$f = \xi_1 \psi_1 + \dots + \xi_n \psi_n$$

alakú, fennáll az

$$|R_c f| = \left| \sum_{j=1}^r \frac{\xi_j}{c - \mu_j} \psi_j \right| > \frac{2}{b-a} \left| \sum_{j=1}^r \xi_j \psi_j \right| = \frac{2}{b-a} |f|$$

egyenlőtlenség.

Másrészt $n > r$ esetén mindig található olyan $\xi_1, \dots, \xi_n$ számok, amelyek közül nem mindegyik nulla és amelyekre

$$(f, \varphi_k(c)) = \sum_{j=1}^n \xi_j (\psi_j, \varphi_k(c)) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

és a ξ_j számok ilyen megválasztása mellett (7. 3) és (7. 4) alapján

$$|R'_c f| = |R_c f| \leq \frac{2}{b-a} |f|.$$

Ellentmondásra jutottunk.

Ezek szerint ha a $c = \frac{a+b}{2}$ szám a $\tilde{H}'$ operátornak nem sajátértéke, akkor

$\tilde{H}'$ spektruma az (a, b) intervallum belsejében olyan sajátértékekből áll, amelyek multiplicitásának az összege $\leq r$, tehát még inkább $\leq n$.

Most tegyük fel, hogy c a $\tilde{H}'$ operátor sajátértéke. Ebben az esetben bármelyik c -től különböző és hozzá elég közel fekvő c_1 pont reguláris a $\tilde{H}'$ operátorra vonatkozóan, és így a már elmondottak értelmében minden c_1 középpontú és (a, b) -ben foglalt számközben $\tilde{H}'$ spektruma olyan sajátértékekből áll, amelyekhez tartozó

multiplicitások összege $\leq n$, következésképpen ugyanez lesz a helyzet az egész (a, b) nyílt intervallumban.

A tételt bebizonyítottuk.

7.1. megjegyzés. Ugyanezzel a módszerrel nehézség nélkül bebizonyítható, hogy ha a H operátor ($1 \leq n(H) < \infty$) valamelyik $\tilde{H}$ önadjungált folytatása spektrumának az (a, b) számköz belsejébe eső része véges számú sajátértékből áll és a megfelelő multiplicitások összege $\leq n$, akkor H bármely másik $\tilde{H}'$ önadjungált folytatásának a spektruma (a, b) belsejében véges számú sajátértékből áll és az ezekhez tartozó multiplicitások összege $\leq n + n$.

3. Állapodjunk meg abban, hogy a λ valós számot a H hermitikus operátor reguláris értékének fogjuk nevezni, ha λ a H operátor legalább egy $\tilde{H}$ önadjungált folytatására vonatkozóan reguláris.

A 21. tétel alapján ez a definíció a következővel ekvivalens: a λ számot ($-\infty < \lambda < \infty$) akkor nevezzük a H hermitikus operátor reguláris értékének, ha valamilyen környezetben a H operátor hézaga.

Az $n(H) < \infty$ esetben érvényes az alábbi tétel.

23. TÉTEL. Legyenek $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_s$ a H hermitikus operátor reguláris értékei, $p_1, p_2, \dots, p_s$ pedig olyan természetes számok, hogy $p_1 + p_2 + \dots + p_s = n(H)$. Ekkor a H operátornak van legalább egy $\tilde{H}$ önadjungált folytatása, amelynek a λ_j ($j = 1, 2, \dots, s$) szám legalább p_j -szeres ($j = 1, 2, \dots, s$) sajátértéke.⁸

Bizonyítás. Ha $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_s$ a H operátor reguláris értékei, akkor található olyan $\delta_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$) számok, hogy

$$(7.5) \quad |Hf - \lambda_j f| \geq \delta_j |f| \quad (f \in \mathfrak{D}(H)); \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Legyen $\tilde{H}_1$ a H operátor olyan önadjungált folytatása, amelynek a λ_1 szám reguláris értéke. Jelöljük a $\tilde{H}_1$ operátor rezolvensét R_{λ_1} -vel és képezzünk segítségével olyan $\varphi_j(\lambda)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) vektor-függvényeket, amelyek $\tilde{H}_1$ reguláris pontjainak a halmazán holomorfok és a $H^*\varphi = \lambda\varphi$ egyenlet összes megoldásaiból álló halmazban bázist alkotnak.

Jelölje $\mathfrak{D}(H_1)$ a $\mathfrak{H}$ -beli

$$(7.6) \quad f = \sum_{j=1}^{p_1} \zeta_j \varphi_j(\lambda_1) + g \quad (g \in \mathfrak{D}(H))$$

alakú vektorok összességét, és legyen

$$H_1 f = \lambda_1 \sum_{j=1}^{p_1} \zeta_j \varphi_j(\lambda_1) + Hg.$$

Ekkor speciálisan fennállnak a

$$H_1 \varphi_j(\lambda_1) = \lambda_1 \varphi_j(\lambda_1) \quad (j = 1, 2, \dots, p_1)$$

egyenlőségek.

⁸ A 23. tételt lényegében véve először H. HAMBURGER bizonyította be (lásd [10], 12. tétel), habár ő sohasem fogalmazta meg az általunk adott formában. A mi bizonyításunk lényegesen eltér HAMBURGER bizonyításától.

Nem nehéz igazolni, hogy H_1 a H operátor valamilyen hermitikus folytatása. Ennélfogva a

$$(7.7) \quad H_1^* \varphi = \lambda \varphi \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0)$$

egyenlet mindegyik φ megoldása egyúttal a $H^* \varphi = \lambda \varphi$ egyenletnek is megoldása, tehát

$$(7.8) \quad \varphi = c_1 \varphi_1(\lambda) + c_2 \varphi_2(\lambda) + \dots + c_n \varphi_n(\lambda)$$

alakú, ahol a c_j ($j=1, 2, \dots, n$) mennyiségek komplex állandók.

Ahhoz, hogy egy (7.8) alakú φ vektor tényleg kielégítse a (7.7) egyenletet, szükséges és elégséges, hogy

$$(7.9) \quad (\varphi, H_1 f - \lambda f) = 0 \quad (f \in \mathfrak{D}(H_1))$$

legyen.

Helyettesítsük itt f -et a (7.6) egyenlőségben szereplő kifejezésével. Minthogy az $f=g \in \mathfrak{D}(H)$ esetben a (7.9) feltétel minden (7.8) alakú φ mellett teljesül, azt kapjuk, hogy ez a feltétel a következő egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$(7.10) \quad (\varphi, \varphi_k(\lambda)) = \sum_{j=1}^n c_j (\varphi_j(\lambda), \varphi_k(\lambda)) = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, p_1).$$

Mivel a

$$(7.11) \quad \|(\varphi_j(\lambda), \varphi_k(\lambda))\|_1^n$$

matrix $\lambda = \lambda_1$ esetén nem szinguláris *Gram*-matrix, azért λ_1 -hez elég közeli komplex λ értékekre ($\operatorname{Im} \lambda \neq 0$) a (7.11) matrix szintén nem szinguláris. Következésképpen ezen λ értékek mellett a $c_1, c_2, \dots, c_n$ ismeretlenekre vonatkozó (7.10) egyenletrendszer matrixának a rangja pontosan p_1 -gyel egyenlő, tehát az egyenletrendszernek pontosan $n - p_1$ számú lineárisan független megoldása van.

Ezek szerint ha λ elég közel van λ_1 -hez, akkor a (7.7) egyenletnek pontosan $n - p_1$ számú lineárisan független megoldása van, azaz

$$n(H_1) = n(H) - p_1.$$

Most meg fogjuk mutatni, hogy a $\lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_s$ értékek H_1 -re nézve is regulárisak. Ebből a célból állítsuk elő az $f \in \mathfrak{D}(H_1)$ elemet a (7.6) képletnek megfelelően

$$f = \varphi + g \quad (g \in \mathfrak{D}(H); H_1 \varphi = H^* \varphi = \lambda_1 \varphi)$$

alakban. Tekintetbe véve a (7.5) egyenlőtlenségeket és azt, hogy $\varphi \perp Hg - \lambda_1 g$, a következőt kapjuk:

$$|H_1 f - \lambda_j f|^2 = |Hg - \lambda_j g - (\lambda_j - \lambda_1) \varphi|^2 =$$

$$= |Hg - \lambda_1 g|^2 + (\lambda_j - \lambda_1)^2 |\varphi|^2 \geq \delta_j^2 |g|^2 + |\lambda_j - \lambda_1|^2 |\varphi|^2 \quad (j = 2, 3, \dots, s).$$

Legyen

$$\delta'_j = \min(\delta_j, |\lambda_j - \lambda_1|) \quad (j = 2, 3, \dots, s);$$

ekkor

$$\delta_j^2 |g|^2 + (\lambda_j - \lambda_1)^2 |\varphi|^2 \cong \delta_j'^2 (|g|^2 + |\varphi|^2) \cong \frac{1}{2} \delta_j'^2 |g + \varphi|^2.$$

Ily módon

$$|H_1 f - \lambda_j f| \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_j' |f| \quad (j = 2, 3, \dots, s),$$

vagyis a λ_j ($j = 2, 3, \dots, s$) számok a H_1 operátor reguláris értékei.

Analóg módon ahhoz, ahogyan a H operátorhoz megszerkesztettük H_1 -et, a H_1 operátorból kiindulva képezhetjük ennek egy H_2 hermitikus folytatását, amelynek a λ_2 szám p_2 -szörös sajátértéke, továbbá

$$n(H_2) = n(H) - p_1 - p_2,$$

és amelyre nézve a $\lambda_3, \dots, \lambda_s$ értékek regulárisak. Tovább folytatva ezt az eljárást egy H_s önadjungált operátort kapunk, amely a 23. tételben szereplő összes feltételnek megfelel, és amelynek egyebek között a λ_s szám pontosan p_s -szeres sajátértéke.

A tételt bebizonyítottuk.

7.2. megjegyzés. A tétel bizonyítása során nem volt lényeges, hogy a λ_j ($j = 1, 2, \dots, s$) számokat növekedésük sorrendjében számoztuk. Ennélfogva a tételre adott bizonyításunkból következik, hogy a H operátornak mindig van olyan $\tilde{H}$ önadjungált folytatása, amelyre a tétel valamennyi feltétele teljesül, és amelynek a tetszés szerint rögzített λ_k pontosan p_k -szoros sajátértéke.

Ha pedig mindegyik λ_j ($j = 1, 2, \dots, s$) pont a H operátornak ugyanabban a hézagában helyezkedik el, akkor még az is igaz lesz, hogy létezik olyan $\tilde{H}$ önadjungált folytatás, amelynek mindegyik λ_j ($j = 1, 2, \dots, s$) szám pontosan p_j -szeres ($j = 1, 2, \dots, s$) sajátértéke. Ez az állítás közvetlenül adódik a 22. és 23. tétel egybevetéséből.

Végül megjegyezzük, hogy abból az eljárásból, amellyel a H operátort a kívánt $\tilde{H}$ operátorra folytattuk, következik, hogy $s > 1$ esetén az utóbbi soha sincs egyértelműen meghatározva, és megfordítva, $s = 1$ esetén egyértelműen meg van határozva.

4. A hermitikus operátorra vonatkozóan reguláris pontok második definíciója értelmében (lásd 7. §, 2. pont) ha egy (a, b) nyílt intervallum a H hermitikus operátor hézaga, akkor ennek az intervallumnak mindegyik pontja reguláris H -ra nézve.

A fordított állítás nem igaz, vagyis ha az (a, b) nyílt intervallum minden pontja reguláris H -ra nézve, akkor egyáltalán nem biztos, hogy az (a, b) intervallum a H operátor hézaga. A 23. tétel szerint ebben az esetben (feltéve, hogy $n(H) < \infty$) csak annyit lehet állítani, hogy a H operátor tetszés szerinti $\tilde{H}$ önadjungált folytatása spektrumának az (a, b) intervallumba eső része véges multiplicitású izolált sajátértékekből áll.⁹ Az utóbbi állítás, amint az alább sorra kerülő 24. tételből következni fog, egyszerű H operátor esetén megfordítható.

⁹ Ugyanis a Heine—Borel-tétel szerint (a, b) minden (a_1, b_1) belső rész-intervalluma befedhető a H operátor véges számú hézagával.

Emlékeztetünk arra, hogy egy H ($H \neq H^*$) hermitikus operátort akkor neveznek *egyszerűnek*, ha a $\mathfrak{H}$ térnek nincs olyan valódi altere, amely a H operátort redukálja és amelyben H önadjungált.

Mielőtt kimondanánk a 24. tételt, a következő megjegyzést tesszük az (n, n) defektus-indexű H egyszerű hermitikus operátorokra vonatkozóan, az egyszerűség kedvéért arra az esetre szorítkozva, amikor $n < \infty$.

Legyen $\tilde{H}$ az egyszerű H operátor valamelyik önadjungált folytatása, és legyen $\tilde{H}$ rezolvense R_λ . Képezzük úgy mint a 6. § 2. pontjában, a lineárisan független és holomorf $\varphi_j(\lambda)$ ($j=1, 2, \dots, m$; $\text{Im } \lambda \neq 0$) vektor-függvényeket, és mutassuk meg, hogy ha az $f \in \mathfrak{H}$ vektorra

$$(7.12) \quad (f, \varphi_j(\lambda)) \equiv 0 \quad (j=1, 2, \dots, m; \text{Im } \lambda \neq 0),$$

akkor $f=0$.

Bizonyítás céljából tegyük fel az ellenkezőt és tekintsük azt a $\mathfrak{H}_0$ halmazt, amely a (7.12) azonosságnak eleget tevő összes $f \in \mathfrak{H}$ vektorokból áll. Először is tetszés szerinti λ -ra ($\text{Im } \lambda \neq 0$) fennáll

$$R_\lambda \mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}_0,$$

mert ha $f \in \mathfrak{H}_0$, akkor a (6.3) összefüggések értelmében

$$(R_\lambda, \varphi_j(\mu)) = (f, R_\lambda \varphi_j(\mu)) = \frac{(f, \varphi_j(\bar{\lambda})) - (f, \varphi_j(\mu))}{\bar{\lambda} - \mu} = 0$$

$$(j=1, 2, \dots, n; \mu \neq \bar{\lambda}),$$

azaz

$$R_\lambda f \in \mathfrak{H}_0.$$

Másrészt a $\{\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)\}$ rendszer az $\Re(H - \bar{\lambda}I)$ ($\text{Im } \lambda \neq 0$) halmaz ortogonális komplementumában bázist alkot, tehát minden $f \in \mathfrak{H}_0$ elemnek megfelel egy $g = g(\lambda)$ ($\text{Im } \lambda \neq 0$) vektor, amelyre

$$Hg - \bar{\lambda}g = f, \quad \text{vagyis} \quad g = R_\lambda f \in \mathfrak{D}(H).$$

Ilyen módon a H operátor értelmezve van a

$$\mathfrak{D}_1 = R_\lambda \mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}_0$$

halmazon, és H mint a $\mathfrak{H}_0$ tér $\mathfrak{D}_1$ részhalmazán értelmezett operátor önadjungált, ugyanis $(H - \bar{\lambda}I)\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{H}_0$ ($\text{Im } \lambda \neq 0$).

Most legyen

$$g \in \mathfrak{D}(H), \quad f = (H - \bar{\lambda}I)g \quad (\text{Im } \lambda \neq 0).$$

Bontsuk fel az f vektort:

$$f = f_0 + f_1 \quad (f_0 \in \mathfrak{H}_0, f_1 \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0).$$

Ekkor a következőt kapjuk:

$$g = R_\lambda f = R_\lambda f_0 + R_\lambda f_1 = g_0 + g_1,$$

ahol $g_0 = R_\lambda f_0 \in \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}(H)$. Továbbá $f_1 \perp \mathfrak{H}_0$ miatt $f_1 \perp R_\lambda \mathfrak{H}_0$, következésképpen $g_1 = R_\lambda f_1 \perp \mathfrak{H}_0$. Ezek szerint bármilyen $g \in \mathfrak{D}(H)$ vektor $\mathfrak{H}_0$ -ra való vetülete egy $g_0 \in \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}(H)$ vektor, vagyis $\mathfrak{H}_0$ redukálja a H operátort.

Ellentmondásra jutottunk, mert a feltevés szerint H egyszerű operátor. Az állítást bebizonyítottuk.

24. TÉTEL¹⁰. Legyen H ($\mathfrak{D}(H) = \mathfrak{H}$) valamilyen egyszerű hermitikus operátor, amelynek a defektus-indexe (n, n) , ahol $1 \leq n < \infty$. Ahhoz, hogy az (a, b) nyílt számköz mindegyik pontja a H operátor reguláris pontja legyen, szükséges (elégséges), hogy a H operátor tetszés szerinti (legalább egy) $\tilde{H}$ önadjungált folytatásának a spektruma az (a, b) intervallumban izolált sajátértékekből álljon.

Bizonyítás. A feltétel szükségessége, amint már megjegyeztük, a 23. tételből következik függetlenül attól, egyszerű-e a H operátor vagy sem.

Bebizonyítjuk, hogy az ismertett feltétel elégséges.

Tehát létezzék H -nak olyan $\tilde{H}$ önadjungált folytatása, amelynek (a, b) -beli spektruma izolált λ_j sajátértékekből áll. Ekkor a λ_j ($j=1, 2, \dots$) pontoktól különböző bármelyik λ pont a $\tilde{H}$ operátorra nézve, és így H -ra nézve is, reguláris. Meg kell még mutatni, hogy a λ_j ($j=1, 2, \dots$) pontok is regulárisak.

Megjegyezzük, hogy ha $\lambda' < \lambda''$ az (a, b) intervallum két pontja, amelyek a $\{\lambda_j\}_1^\infty$ sorozat egyetlen pontját sem fogják közre, akkor a (λ', λ'') számköz a $\tilde{H}$ operátornak, és így H -nak is, hézaga. Ezért a 22. tétel szerint a H operátor bármely másik $\tilde{H}'$ önadjungált folytatásának (λ', λ'') -beli spektruma véges számú sajátértékből áll, tehát az egész (a, b) számközbe eső spektrum izolált sajátértékek összessége.

Legyen a korábbiaknak megfelelően $\{\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)\}$ bázis a $H^*\varphi - \lambda\varphi = 0$ egyenlet megoldásainak a halmazában, amelyet az ismert módon a $\tilde{H}$ operátor R_λ rezolvensének a segítségével szerkesztettünk meg.

Most megmutatjuk, hogy tetszés szerinti $\lambda_0 \in \{\lambda_j\}_1^\infty$ sajátérték multiplicitása legfeljebb n -nel egyenlő. Ha ez nem lenne igaz, akkor találhatnánk olyan ψ sajátvektort ($\tilde{H}\psi = \lambda_0\psi$, $\psi \neq 0$), hogy

$$(\psi, \varphi_j(\lambda)) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

ahol λ a $\tilde{H}$ operátor bármelyik reguláris pontja. De ekkor $\psi \in \mathfrak{R}(H - \bar{\lambda}I)$, tehát

$$\psi = (\lambda_0 - \bar{\lambda}) R_{\bar{\lambda}} \psi \in \mathfrak{D}(H), \quad H\psi = \lambda_0 \psi.$$

Ellentmondásra jutottunk, ugyanis az egyszerű operátor definíciója értelmében H -nak nem lehet egy sajátvektora sem.

Legyen $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p\}$ ($p \leq n$) a ψ ($\tilde{H}\psi = \lambda_0\psi$) sajátvektorok halmazának egy bázisa.

Megjegyezzük, hogy tetszés szerinti

$$(7.13) \quad \psi = \sum_{k=1}^p \xi_k \psi_k \quad \left(\sum_{k=1}^p |\xi_k|^2 > 0 \right)$$

sajátvektorra és a $\tilde{H}$ operátorra nézve reguláris λ pontra a

¹⁰ A 24. tétel szintén benne foglaltatik H. HAMBURGER már említett [10] cikkének eredményeiben. Az $n=1$ esetben a szerző felhasználta korábbi vizsgálataiban (lásd [10]). A jelen bizonyítás különbözik H. HAMBURGER bizonyításától.

$$(7.14) \quad (\varphi_j(\lambda), \psi) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

skaláris szorzatok közül legalább az egyik nem egyenlő nullával. Valóban, ha feltezzük, hogy valamilyen reguláris λ esetén ezek a szorzatok mindnyájan nullával egyenlők, akkor bármely másik reguláris μ érték mellett is

$$\begin{aligned}(\varphi_j(\mu), \psi) &= (\varphi_j(\lambda) + (\mu - \lambda) R_\mu \varphi_j(\lambda), \psi) = (\varphi_j(\lambda), \psi + (\bar{\mu} - \lambda) R_{\bar{\mu}} \psi) = \\ &= \frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}}{\lambda_0 - \bar{\mu}} (\varphi_j(\lambda), \psi) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),\end{aligned}$$

ez pedig ellentétben áll azzal, hogy a H operátor egyszerű.

A (7.14) skaláris szorzatokba behelyettesítve a ψ vektor (7.13) alatti kifejezését azt kapjuk, hogy az említett tény a következőt jelenti: tetszés szerinti reguláris λ esetén a

$$\|(\varphi_j(\lambda), \psi_k)\| \quad (j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, p)$$

matrix rangja p .

Ha ezt a matrixot a valós reguláris $\lambda = \alpha$ pontban vizsgáljuk és tekintetbe vesszük, hogy a $\{\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)\}$, $\{\psi_1, \dots, \psi_p\}$ bázisok csak nem szinguláris lineáris transzformáció erejéig vannak meghatározva, akkor arra a következtetésre jutunk, hogy az általánosság megszorítása nélkül vehető

$$(7.15) \quad (\varphi_j(\alpha), \psi_k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = k \\ 0, & \text{ha } j \neq k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \dots, p).$$

Ezután értelmezzünk egy R'_α operátort az alábbi módon:

$$(7.16) \quad R'_\alpha f = R_\alpha f - \sum_{j=1}^p (f, \varphi_j(\alpha)) \varphi_j(\alpha) \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Mindkét oldalra alkalmazva a $H^* - \alpha I$ operátort és felhasználva, hogy $H^* \varphi_j(\alpha) - \alpha \varphi_j(\alpha) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, p$), nyerjük:

$$(H^* - \alpha I) R'_\alpha f = (H^* - \alpha I) R_\alpha f = (\tilde{H} - \alpha I) R_\alpha f = f \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Ez az egyenlőség azt mutatja, hogy $f \neq 0$ esetén $R'_\alpha f \neq 0$, és így az R'_α önadjungált operátornak van $(R'_\alpha)^{-1}$ inverze, amely szintén önadjungált operátor.

Legyen

$$H' = (R'_\alpha)^{-1} + \alpha I \quad (\mathfrak{D}(H') = \mathfrak{R}(R'_\alpha)).$$

Nem nehéz meggyőződni róla, hogy H' a H operátor folytatása.

Csakugyan, ha $g \in \mathfrak{D}(H)$ és

$$f = Hg - \alpha g = \tilde{H}g - \alpha g,$$

akkor $(f, \varphi_j(\alpha)) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), tehát a (7.16) definíció alapján

$$R'_\alpha f = R_\alpha f = g,$$

innen pedig $g \in \mathfrak{D}(H')$ és

$$H'g - \alpha g = (H' - \alpha I) R'_\alpha f = f = Hg - \alpha g,$$

azaz $H'g = Hg$.

A λ_0 pont a H' folytatásnak vagy reguláris pontja, vagy izolált sajátértéke lehet. Ha megmutatjuk, hogy az első eset áll fenn, vagyis hogy a

$$(7.17) \quad H'\chi - \lambda_0\chi = 0$$

egyenlőség csak $\chi=0$ mellett teljesül, akkor a tétel be lesz bizonyítva (ugyanis λ_0 a $\{\lambda_j\}$ sorozat tetszés szerint választott eleme).

A (7.17) egyenlőségből adódik, hogy

$$(\lambda_0 - \alpha) R'_\alpha \chi = R'_\alpha (H'\chi - \alpha\chi) = \chi,$$

tehát a (7.16) definíció értelmében

$$(7.18) \quad \chi - (\lambda_0 - \alpha) R_\alpha \chi = -(\lambda_0 - \alpha) \sum_1^p (\chi, \varphi_j(\alpha)) \varphi_j(\alpha).$$

Másrészt a $\{\psi_1, \dots, \psi_p\}$ rendszer bázis lévén a $\tilde{H}\psi - \lambda_0\psi = 0$ egyenlet megoldásai-ból álló halmazban, bázist fog alkotni a

$$(7.19) \quad \psi - (\lambda_0 - \alpha) R_\alpha \psi = 0$$

egyenlet megoldásainak a halmazában is.

Ebből speciálisan az is következik, hogy

$$\begin{aligned} (\chi - (\lambda_0 - \alpha) R_\alpha \chi, \psi_j) &= (\chi, \psi_j - (\lambda_0 - \alpha) R_\alpha \psi_j) = 0 \\ (j &= 1, 2, \dots, p). \end{aligned}$$

Ennélfogva ha a (7.18) egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk ψ_k -val ($k=1, 2, \dots, p$) és figyelembe vesszük a (7.15) összefüggést, a következőt nyerjük:

$$(7.20) \quad (\chi, \varphi_k(\alpha)) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, p),$$

tehát a (7.18) egyenlőségben a jobb oldalt nullával lehet helyettesíteni. Ily módon χ a (7.19) egyenlet egyik megoldása, következésképpen

$$\chi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots + c_p\psi_p.$$

Visszahelyettesítve χ -nek ezt a kifejezését a (7.20) egyenlőségbe és újra felhasználva a (7.15) összefüggést, azt kapjuk, hogy $c_k=0$ ($k=1, 2, \dots, p$), vagyis $\chi=0$.

A tételt bebizonyítottuk.

5. Állapodjunk meg abban, hogy a $\tilde{H}$ önadjungált operátor spektrumát akkor fogjuk *diszkrétnek* nevezni, ha véges multiplicitású izolált sajátértékekből áll.

A 24. tételből következik, hogy ha a H ($1 \leq n(H) < \infty$) operátor valamelyik $\tilde{H}$ önadjungált folytatásának diszkrét spektruma van, akkor a H operátor bármely másik $\tilde{H}'$ önadjungált folytatásának a spektruma is diszkrét.

Valóban, ha $\tilde{H}$ spektruma diszkrét és H egyszerű operátor, akkor a 24. tétel szerint a valós tengely csupa reguláris pontból áll, és így a 22. tétel alapján tetszés szerinti másik $\tilde{H}'$ önadjungált folytatás spektruma izolált sajátértékekből áll, amelyek multiplicitása $\leq n$.

Abban az esetben viszont, amikor a H operátor nem egyszerű, ugyanerre a következtetésre jutunk a

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1, \quad H = H_0 \oplus H_1$$

felbontások felhasználásával, ahol $\mathfrak{H}_0$ olyan maximális tér¹¹, amely a H operátort redukálja és amelyben H (tehát a H_0 megszorítás) önadjungált, $\mathfrak{H}_1$ ennek az ortogonális komplementuma, H_0 és H_1 pedig a H által $\mathfrak{H}_0$ -ban, ill. $\mathfrak{H}_1$ -ben indukált hermitikus operátorok.

8. §. Félig korlátos operátorok diszkrét spektrumú folytatással

Legyen T (alulról) félig korlátos operátor és $\tilde{T}$ ennek egy diszkrét spektrumú félig korlátos önadjungált folytatása. Ekkor a $\tilde{T}$ operátor spektrális felbontása

$$\tilde{T}f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\tilde{T})(f, \varphi_j) \varphi_j$$

alakú, ahol $\{\varphi_j\}_1^{\infty}$ a $\tilde{T}$ -hoz tartozó sajátvektorok teljes ortonormális rendszere és

$$\lambda_1(\tilde{T}) \leq \lambda_2(\tilde{T}) \leq \dots \leq \lambda_n(\tilde{T}) \leq \dots$$

a megfelelő sajátértékek sorozata, minden sajátértéket annyiszor feltüntetve, amennyi a multiplicitása.

Ha ezenkívül $1 \leq n(T) < \infty$, akkor a 18. tétel és az előbbi paragrafus végén tett megjegyzés értelmében T mindegyik önadjungált folytatásának a spektruma alulról félig korlátos és diszkrét lesz. Viszont ha $n(T) = \infty$, akkor ennek az állításnak egyik része sem igaz.

Ennélfogva nem érdektelen a következő tétel.

25. TÉTEL. *Ha a T ($1 \leq n(T) \leq \infty$) hermitikus operátor valamelyik $\tilde{T}$ félig korlátos önadjungált folytatása diszkrét spektrummal rendelkezik, akkor a T operátor T_μ durva folytatásának a spektruma diszkrét, továbbá*

$$(8.1) \quad \lambda_j(\tilde{T}) \leq \lambda_j(T_\mu) \quad (j = 1, 2, \dots),$$

ahol $\lambda_j(\tilde{T})$, $\lambda_j(T_\mu)$ ($j = 1, 2, \dots$) a $\tilde{T}$, T_μ operátorok egymás után következő sajátértékei.

Bizonyítás. Ha a tételben az adott T , $\tilde{T}$, T_μ operátorokat rendre az

$$S = T + aI, \quad \tilde{S} = \tilde{T} + aI, \quad S_\mu = T_\mu + aI$$

operátorokkal helyettesítjük, ahol a valós szám, és a tételt bebizonyítjuk az $\tilde{S}$, S_μ operátorokra, akkor ezzel nyilvánvalóan az adott operátorokra is készen lesz a bizonyítás.

Legyen $a > -m(\tilde{T})$; ekkor $m(\tilde{S}) > 0$ és a 12. tétel értelmében

$$(8.2) \quad S_\mu^{-1} = \tilde{S}^{-1} - (\tilde{S}^{-1})_{\mathfrak{N}_0},$$

ahol $\mathfrak{N}_0$ az $S^*\varphi = 0$ egyenlet összes megoldásaiból áll.

Míthogy feltevés szerint $\tilde{S}$ spektruma diszkrét és pozitív, azért $\tilde{S}^{-1}$ és vele

¹¹ A 24. tétel bizonyítása előtt végzett megfontolásokból következik, hogy $\mathfrak{H}_0$ mindazoknak az f vektoroknak az összessége, amelyek a $\varphi_j(\lambda)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) vektorokra tetszés szerinti $\lambda(\text{Im} \lambda \neq 0)$ esetén ortogonálisak.

együtt $(\tilde{S}^{-1})_{\mathfrak{M}_0}$ is teljesen folytonos operátor¹². Következésképpen S_μ^{-1} is teljesen folytonos, tehát az S_μ operátor spektruma diszkrét.

Ha

$$\lambda_1(\tilde{S}) \leq \lambda_2(\tilde{S}) \leq \dots; \quad \lambda_1(S_\mu) \leq \lambda_2(S_\mu) \leq \dots$$

$$(0 < \lambda_1(\tilde{S}), \quad 0 < \lambda_1(S_\mu))$$

az $\tilde{S}$, ill. S_μ operátor sajátértékeinek növekvően rendezett sorozata, akkor

$$\lambda_1^{-1}(\tilde{S}) \geq \lambda_2^{-1}(\tilde{S}) \geq \dots; \quad \lambda_1^{-1}(S_\mu) \geq \lambda_2^{-1}(S_\mu) \geq \dots$$

az $\tilde{S}^{-1}$, ill. S_μ^{-1} operátor sajátértékeinek fogyóan rendezett sorozata. Minthogy pedig (8.2) értelmében

$$S_\mu^{-1} \leq \tilde{S}^{-1},$$

azért a teljesen folytonos operátorok sajátértékeinek ismert minimax tulajdonságai miatt

$$\lambda_j^{-1}(S_\mu^{-1}) \leq \lambda_j^{-1}(\tilde{S}^{-1}), \quad \text{azaz} \quad \lambda_j(\tilde{S}) \leq \lambda_j(S_\mu) \quad (j=1, 2, \dots).$$

A tételt bebizonyítottuk.

8.1. megjegyzés. Az $n(T) < \infty$ esetben a (8.1) összefüggésnél több is mondható, nevezetesen a következő:

$$\lambda_j(\tilde{T}) \leq \lambda_j(T_\mu) \leq \lambda_{j+n}(\tilde{T}) \quad (j=1, 2, \dots).$$

Csakugyan, ha valamilyen j értékre $\lambda_{j+n}(\tilde{T}) < \lambda_j(T_\mu)$ volna, akkor a $(-\infty, \lambda_j(T_\mu))$ számközben a T_μ operátornak (multiplicitással számolva) $j-1$, a $\tilde{T}$ operátornak pedig $j+n$ sajátértéke helyezkednék el, és ez a 7.1. megjegyzés szerint lehetetlen.

26. TÉTEL. Ha az S ($m(S) > 0$) operátor valamelyik $\tilde{S}$ félig korlátos önadjungált folytatásának diszkrét spektruma van, akkor az S operátor $\mathfrak{M}_0$ -ra megszorított S_M folytatásának is diszkrét a spektruma. Itt $\mathfrak{M}_0$ az S_M operátor 0 sajátértékéhez tartozó $\mathfrak{M}_0$ sajátalterének az ortogonális komplementumát jelenti.

Bizonyítás. Az előbbi tétel értelmében S_μ spektruma diszkrét. Másrészt a 13. tétel bizonyítása során mellesleg nyert (5.17) képlet szerint

$$S_M^{(-1)}g = P_{\mathfrak{M}_0} S_\mu^{-1}g \quad (g \in \mathfrak{M}_0),$$

ahol $S_M^{(-1)}$ az $\mathfrak{M}_0$ -on tekintett S_M operátor inverze, $P_{\mathfrak{M}_0}$ pedig az $\mathfrak{M}_0$ -ra való merőleges vetítés operátora.

Az S_μ operátornak diszkrét spektruma van, tehát S_μ^{-1} teljesen folytonos, következésképpen $S_M^{(-1)}$ is teljesen folytonos, vagyis az S_M operátornak $\mathfrak{M}_0$ -ban diszkrét spektruma van.

8.2. megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy $\mathfrak{M}_0$ megegyezik az $S^*\varphi=0$ egyenlet φ megoldásainak az összességével és dimenziója $n(S)$, amely végtelen is

¹² Az 1. tételből adódik (lásd az (1.1) képletet), hogy ha a H önadjungált operátor teljesen folytonos, akkor tetszés szerinti $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{H}$ zárt lineáris halmaz esetén a $H_{\mathfrak{N}}$ operátor szintén teljesen folytonos (mert korlátos operátornak teljesen folytonos operátorral való szorzata mindig teljesen folytonos).

lehet. Ha azonban $n(S) < \infty$, akkor a tételt egyszerűbben is meg lehet fogalmazni, ti. a következőképpen:

Az S_M operátor spektruma diszkrét.

Ebben az esetben még az is igaz, hogy S tetszés szerinti $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatásához tartozó sajátértékekre mindig fennállnak a

$$(8.3) \quad \lambda_j(S_\mu) \leq \lambda_j(\tilde{S}) \leq \lambda_j(S_M) \quad (j=1, 2, \dots)$$

egyenlőtlenségek.

Valóban, a 11. tétel értelmében $a > 0$ esetén

$$(S_\mu + aI)^{-1} \leq (\tilde{S} + aI)^{-1} \leq (S_M + aI)^{-1}.$$

Az összes itt szereplő inverz operátor teljesen folytonos, tehát a közöttük fennálló egyenlőtlenségek maguk után vonják a (fogyó sorrendben) egymás után következő sajátértékeikre vonatkozó megfelelő egyenlőtlenségeket.

Ennélfogva érvényesek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{\lambda_j(S_\mu) + a} \leq \frac{1}{\lambda_j(\tilde{S}) + a} \leq \frac{1}{\lambda_j(S_M) + a} \quad (j=1, 2, \dots),$$

és ezekből adódik (8.3).

Megemlítjük még, hogy ha S egyszerű operátor, akkor, amint be lehet bizonyítani, érvényesek a

$$\lambda_j(S_M) < \lambda_j(S_\mu) \quad (j=1, 2, \dots)$$

szigorú egyenlőtlenségek.

II. FEJEZET *

ALKALMAZÁSOK

REGULÁRIS KVÁZI-DIFFERENCIÁLOPERÁTORRA VONATKOZÓ EGYDIMENZIÓS PEREMÉRTÉK-FELADATOK

Ebben a fejezetben a § Hilbert-tér szerepét azoknak az (a, b) véges intervallumban értelmezett komplex értékű és mérhető $f(x)$ függvényeknek az $L_2(a, b)$ lineáris halmaza fogja játszani, amelyekre

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty;$$

két $L_2(a, b)$ -beli elem, f és g skaláris szorzatát szokás szerint az

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

képlettel fogjuk definiálni.

* A II. fejezet irodalmi hivatkozásait az e fejezet végén található irodalomjegyzék tartalmazza.

Vizsgálni fogjuk az $L_2(a, b)$ -ben értelmezett önadjungált kvázi-differenciál-operátorokat. Az utóbbiak azon operátorok közvetlen általánosításai, amelyekhez a matematikai fizika egydimenziós peremérték-feladatai rendszerint vezetnek. Meg fogjuk mutatni, hogy a vizsgált operátorok félig korlátosak, és az I. fejezet eredményeire támaszkodva tanulmányozni fogjuk tulajdonságaikat¹³.

1. §. Lineáris kvázi-differenciálegyenletek és Cauchy-függvényük

Legyenek $p_k(x)$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$) az $x \in (a, b)$ változó rögzített valós mérhető függvényei, amelyekre teljesülnek a következő feltételek:

$$(1.1) \quad \begin{cases} A) \int_a^b \frac{dx}{|p_0(x)|} < \infty, \\ B) \int_a^b |p_k(x)| dx < \infty \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Ekkor, amint meg fogjuk mutatni, bizonyos $f \in L_2(a, b)$ függvényekre az alábbi egyenlőségek útján definiálható $f^{[k]}$ ($k=0, 1, 2, \dots, 2n$) kvázi-differenciálkifejezéseknek meghatározott értelmük lesz:

$$(1.2) \quad \begin{cases} f^{[0]} = f, & f^{[k]} = \frac{df^{[k-1]}}{dx} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ f^{[n]} = p_0 \frac{df^{[n-1]}}{dx} \\ f^{[n+k]} = -\frac{df^{[n+k-1]}}{dx} + p_k f^{[n-k]} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

E definíciók szerint

$$f^{[k]} = f^{(k)} = \frac{d^k f}{dx^k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

$$f^{[n]} = p_0 f^{(n)} = p_0 \frac{d^n f}{dx^n},$$

$$f^{[n+1]} = -\frac{d}{dx} \left(p_0 \frac{d^n f}{dx^n} \right) + p_1 \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}},$$

$$f^{[n+2]} = -\frac{d}{dx} \left[-\frac{d}{dx} \left(p_0 \frac{d^n f}{dx^n} \right) + p_1 \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right] + p_2 \frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}$$

stb. és végül

$$f^{[2n]} = p_n f - \frac{d}{dx} \left[p_{n-1} f^{(1)} - \frac{d}{dx} \left[p_{n-2} f^{(2)} - \dots - \frac{d}{dx} \left[p_1 f^{(n-1)} - \frac{d}{dx} (p_0 f^{(n)}) \right] \dots \right] \right].$$

¹³ Az ebben a fejezetben ismertetett kutatások eredeti része a szerző korábbi [2], [3] munkáinak bizonyos általánosítását és lezárását képezi. Az I. fejezetben nyert általános fogalmak és tételek segítségével most sikerült a tárgyalást áttekinthetőbbé tenni és lerövidíteni.

Ha a p_k ($k=0, 1, \dots, n$) függvények rendre $(n-k)$ -szor differenciálhatók (ami természetesen nincs biztosítva), akkor $2n$ -szer differenciálható f függvényekre $f^{[2n]}$ végeredményben a Jacobi—Bertrand-féle alakban¹⁴ írható fel:

$$(1.3) \quad f^{[2n]} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(p_{n-k} \frac{d^k f}{dx^k} \right).$$

Jelölje $\mathfrak{D}^*$ azoknak az $f \in L_2(a, b)$ függvényeknek az összességét, amelyekre az (1.2) szerint egymás után képzett $f^{[k]}$ ($k=0, 1, \dots, 2n-1$) kvázi-deriváltak abszolút folytonosak, továbbá $f^{[2n]} \in L_2(a, b)$.

Most legyenek C_k ($k=0, 1, \dots, 2n-1$) tetszés szerinti komplex számok, $x=x_0$ pedig az (a, b) intervallum tetszés szerinti pontja. Éppen úgy, mint a közönséges differenciálegyenletek esetében, érvényes a következő egzisztenciátétel.

1°. Bármilyen $h \in L_2(a, b)$ függvény mellett az

$$(1.4') \quad \begin{cases} f^{[2n]} = h, \\ f^{[k]}(x_0) = C_k \end{cases} \quad (k=0, 1, \dots, 2n-1)$$

kvázi-differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladatnak egy és csak egy $f \in \mathfrak{D}^*$ megoldása van.

Bizonyítás céljából elég megjegyezni, hogy az (1.4') kvázi-differenciálegyenlet, ha az (1.2) képletekkel együtt tekintjük, ekvivalens egy lineáris differenciálegyenlet-rendszerrel:

$$(1.5) \quad \begin{cases} \frac{df^{[k]}}{dx} = \sum_{j=0}^{2n-1} a_{kj} f^{[j]} & (k=0, 1, \dots, 2n-2), \\ \frac{df^{[2n-1]}}{dx} = p_n f^{[0]} - h, \end{cases}$$

minthogy pedig az (1.1) feltételek alapján az egyenletrendszerben szereplő mind-egyik együttható (beleértve a $h \in L_2(a, b)$ függvényt is) az (a, b) intervallum lezárásában integrálható, azért az (1.5) rendszernek az (1.4'') kezdeti feltételek mellett egy és csak egy olyan megoldása van, amely abszolút folytonos $f^{[k]}$ ($k=0, 1, \dots, 2n-1$) függvényekből áll¹⁵.

Az 1°. állításból ismert megfontolások segítségével adódik, hogy az az $\mathfrak{R}_0$ lineáris halmaz, amely a

$$(1.6) \quad \varphi^{[2n]} = 0$$

¹⁴ Amint még JACOBI és BERTRAND megmutatta (J. BERTRAND, *Journal de l'École Polytechnique*, 28 (1878) 276.), minden a *Lagrange*-féle értelemben önadjungált

$$L(f) = \sum_{k=0}^{2n} l_k \frac{d^k f}{dx^k}$$

differenciálkifejezés, amelynek l_k ($k=0, 1, \dots, 2n$) együtthatói rendre k -szor ($k=0, 1, \dots, 2n$) differenciálhatók, előállítható az (1.3) alakban, ahol a p_{n-k} ($k=0, 1, \dots, n$) együtthatók rendre k -szor ($k=0, 1, \dots, n$) differenciálhatók.

¹⁵ Ez a *Picard*-féle szukcesszív approximáció ismert módszerével bizonyítható be.

homogén egyenlet $\varphi(\in \mathfrak{D}^*)$ megoldásaiból áll, $2n$ dimenziójú. Bázisnak vehetjük például az (1. 6) egyenlet azon valós $\Phi_j (j=1, 2, \dots, 2n)$ megoldásainak a rendszerét, amelyek eleget tesznek a

$$\Phi_j^{[k-1]}(a) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \dots, 2n)$$

kezdeti feltételeknek.

Szükségünk lesz a $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{2n}\}$ rendszer bizonyos tulajdonságaira, és ezeket az alább ismertetett azonosságok felhasználásával fogjuk levezetni.

Nem nehéz belátni, hogy az (1. 2) összefüggések alapján tetszőleges $g, f \in \mathfrak{D}^*$ függvényekre fennáll az

$$(1.7) \quad f^{[2n]} \bar{g} = - \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^n f^{[2n-k]} \bar{g}^{[k-1]} + \sum_{k=0}^n p_{n-k} f^{[k]} \bar{g}^{[k]}$$

azonosság, ebből viszont következik az

$$(1.8) \quad f^{[2n]} \bar{g} - f \bar{g}^{[2n]} = \frac{d}{dx} [f, g]_x$$

Lagrange-féle azonosság, ahol

$$(1.9) \quad [f, g]_x = \sum_{k=1}^n (f^{[k-1]}(x) \bar{g}^{[2n-k]}(x) - f^{[2n-k]}(x) \bar{g}^{[k-1]}(x)).$$

Az (1. 8) egyenlőség mindkét oldalát tagonként integrálva a -tól x -ig kapjuk:

$$\int_a^x (f^{[2n]} \bar{g} - f \bar{g}^{[2n]}) dx = [f, g]_x - [f, g]_a \quad (a \leq x \leq b).$$

Ha most itt elvégezzük az $f = \Phi_j, \bar{g} = \Phi_{2n-l+1} (j, l=1, 2, \dots, 2n)$ helyettesítést, akkor azt találjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{2n} \varepsilon_j \varepsilon_k \Phi_j^{[k-1]}(x) \Phi_{2n-l+1}^{[2n-k]}(x) = \delta_{jl} \quad (a \leq x \leq b),$$

ahol

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1 & (j \leq n), \\ -1 & (j > n). \end{cases}$$

Ily módon az $\|\varepsilon_j \varepsilon_k \Phi_j^{[k-1]}(x)\|_1^{2n}, \|\Phi_{2n-l+1}^{[2n-k]}(x)\|_1^{2n}$ matrixok sorok szerint összeszorozva az egységmatrixot adják, tehát oszlopok szerint összeszorozva is azt adják; ezt kiírva a következőt kapjuk:

$$(1.10) \quad \sum_{j=1}^n (\Phi_j^{[k]}(x) \Phi_{2n-j+1}^{[l]}(x) - \Phi_{2n-j+1}^{[k]}(x) \Phi_j^{[l]}(x)) = \begin{cases} 0 & (k+l \neq 2n-1) \\ 1 & (k+l = 2n-1; k < l) \end{cases}$$

$$(a \leq x \leq b; \quad k, l = 0, 1, \dots, 2n).$$

Ennélfogva ha bevezetjük a

$$(1.11) \quad \Phi(x, \xi) = \sum_{j=1}^n (\Phi_j(x) \Phi_{2n-j+1}(\xi) - \Phi_j(\xi) \Phi_{2n-j+1}(x))$$

$$(a \leq x, \xi \leq b)$$

jelölést, akkor azt állíthatjuk, hogy $\Phi(x, \xi)$ mint x függvénye eleget tesz az (1. 6) homogén egyenletnek és a következő kezdeti feltételeknek:

$$\Phi^{[k]}(x, \xi)|_{x=\xi} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-2),$$

$$\Phi^{[2n-1]}(x, \xi)|_{x=\xi} = 1.$$

Amint ismeretes, éppen ezek a tulajdonságok definiálják a *Cauchy-féle* függvényt, amelynek segítségével (könnyen beláthatóan) az

$$\begin{cases} f^{[2n]} = h, \\ f^{[k]}(x_0) = 0 \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

feladat $f(\in \mathfrak{D}^*)$ megoldása az

$$f(x) = \int_{x_0}^x \Phi(x, \xi) h(\xi) d\xi$$

képlet szerint nyerhető.

2. §. A T, T^* kvázi-differenciáloperátorok

Vizsgálatunk tárgyául az a T operátor fog szolgálni, amelynek a $\mathfrak{D}(T)$ értelmezési tartománya az

$$(2. 1) \quad f^{[k]}(a) = f^{[k]}(b) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

kikötéseket teljesítő $f \in \mathfrak{D}^*$ elemekből áll, és amelyre

$$Tf = f^{[2n]} \quad (f \in \mathfrak{D}(T)).$$

Az (1. 8) összefüggés értelmében tetszés szerinti $f, g \in \mathfrak{D}^*$ elemekre

$$(2. 2) \quad \int_a^b (f^{[2n]} \bar{g} - f \bar{g}^{[2n]}) dx = [f, g]_b - [f, g]_a,$$

tehát

$$(Tf, g) = (f, g^{[2n]}) \quad (f \in \mathfrak{D}(T), \quad g \in \mathfrak{D}^*)$$

és speciálisan

$$(Tf, g) = (f, Tg) \quad (f, g \in \mathfrak{D}(T)).$$

Ilyen módon T hermitikus operátor.

Meg fogjuk mutatni, hogy a T operátor defektus-indexe $(2n, 2n)$. Előbb azonban tisztázzuk, hogy mi a T operátor T^* adjungált operátora. Ennek érdekében először is bebizonyítjuk a következő tételt.

2°. A T operátor $\mathfrak{R}(T)$ értékkészlete és a $\varphi^{[2n]} = 0$ egyenlet $\varphi(\in \mathfrak{D}^*)$ megoldásainak az $\mathfrak{N}_0$ halmaza egymás ortogonális komplementumai, vagyis

$$(2. 3) \quad L_2(a, b) = \mathfrak{R}(T) \oplus \mathfrak{N}_0.$$

Valóban, ha $f \in \mathfrak{D}(T)$ és $\varphi \in \mathfrak{N}_0$, akkor a (2. 2) egyenlőségből a $g = \varphi$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$(Tf, \varphi) = 0.$$

Ezek szerint $\mathfrak{N}_0 \perp \mathfrak{R}(T)$.

A (2. 3) felbontás igazolásához azt kell még megmutatni, hogy ha az $f^* \in L_2(a, b)$ elemre $f^* \perp \mathfrak{N}_0$, akkor $f^* \in \mathfrak{R}(T)$.

Az f^* elemhez szerkesszük meg azt az $f_0 \in \mathfrak{D}^*$ elemet, amelyre

$$f_0^{[2n]} = f^*, \quad f_0^{[k]}(b) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1).$$

Ezután a (2. 2) azonosságban elvégezve az $f = f_0$, $g = \Phi_k$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$) helyettesítéseket azt találjuk, hogy

$$(f^* \Phi_k) = \pm f_0^{[2n-k]}(a) \quad (k = 1, 2, \dots, 2n).$$

Ennélfogva ha $f^* \perp \mathfrak{N}_0$, akkor fennállnak az

$$f_0^{[k]}(a) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

összefüggések is, azaz $f_0 \in \mathfrak{D}(T)$ és $f^* = Tf_0 \in \mathfrak{R}(T)$. Ezzel a 2°. állítást bebizonyítottuk.

3°. ¹⁶ A T^* operátor $\mathfrak{D}(T^*)$ értelmezési tartománya éppen a $\mathfrak{D}^*$ halmaz, és

$$T^*g = g^{[2n]} \quad (g \in \mathfrak{D}(T^*)).$$

Valóban, az adjungált operátor definíciója szerint a $g \in L_2(a, b)$ elem $\mathfrak{D}(T^*)$ -hoz tartozik és $g^* = T^*g$ akkor és csak akkor, ha

$$(2. 4) \quad (Tf, g) = (f, g^*) \quad (f \in \mathfrak{D}(T)).$$

A (2. 2) azonosságból látjuk, hogy ez a feltétel mindig teljesül, ha $g \in \mathfrak{D}^*$ és $g^* = g^{[2n]}$.

Meg kell még mutatni, hogy megfordítva is, ha $g \in \mathfrak{D}(T^*)$ és $g^* = T^*g$, azaz egy $g, g^* \in L_2(a, b)$ elempárra teljesül a (2. 4) feltétel, akkor biztosan $g \in \mathfrak{D}^*$ és $g^* = g^{[2n]}$.

Legyen g_0 a $\mathfrak{D}^*$ halmaz olyan eleme, hogy

$$g_0^{[2n]} = g^*.$$

Ekkor (2. 2) és (2. 1) alapján

$$(Tf, g) = (f, g_0^{[2n]}) = (Tf, g_0) \quad (f \in \mathfrak{D}(T)).$$

Következésképpen $\varphi = g - g_0 \perp \mathfrak{R}(T)$, és így a 2°. állítás értelmében $\varphi \in \mathfrak{N}_0$, vagyis $\varphi \in \mathfrak{D}^*$ és $\varphi^{[2n]} = 0$. De ekkor $g = g_0 + \varphi \in \mathfrak{D}^*$ és

$$g^{[2n]} = g_0^{[2n]} = g^*.$$

A 3°. állítást bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy mint kiderült, T^* egyértelműen meghatározott operátor, tehát a $\mathfrak{D}(T)$ halmaz sűrű $L_2(a, b)$ -ben.

¹⁶ Minthogy $\mathfrak{R}(T)$ ortogonális komplementuma mindig megegyezik a $T^*\varphi = 0$ egyenlet φ megoldásainak az összességével, nyilvánvaló, hogy a 3°. állítás magában foglalja a 2°. állítást.

Minthogy továbbá tetszés szerinti komplex λ mellett a

$$T^*f - \lambda f = 0$$

egyenletnek pontosan $2n$ lineárisan független $f \in \mathfrak{D}(T^*)$ megoldása van (ugyanis könnyű belátni, hogy az 1°. állítás érvényes marad, ha benne az $f^{[2n]}$ kvázi-differenciálkifejezést az $f^{[2n]} - \lambda f$ kifejezéssel helyettesítjük), igaz a következő állítás.

4°. A T operátor defektus-indexe $(2n, 2n)$.

3. §. A T operátor önadjungált folytatásai

Jelöljük $\mathfrak{E}$ -vel az $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{4n})$ vektorokból álló $4n$ dimenziójú unitér teret. Mindegyik $f \in \mathfrak{D}^*$ elemnek feleltessük meg azt az $x = x(f)$ vektort, amelyre

$$\xi_k = f^{[k-1]}(a), \quad \xi_{2n+k} = f^{[k-1]}(b) \quad (k = 1, 2, \dots, 2n).$$

Az 1°. és a 2°. állítás értelmében $x(f)$ végigfut az egész $\mathfrak{E}$ téren, ha f végigfut $\mathfrak{D}^*$ -on.

Legyen $\tilde{T}$ a T operátor valamelyik önadjungált folytatása. Minthogy T^* minden ilyen operátornak folytatása, fennáll

$$(3.1) \quad \mathfrak{D}(\tilde{T}) \subset \mathfrak{D}(T^*) \quad \text{és} \quad \tilde{T}f = f^{[2n]} \quad (f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})).$$

Jelölje $\Pi(\tilde{T})$ azoknak az $x = x(f)$ vektoroknak az összességét, amelyeket akkor kapunk, ha f végigfut az egész $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ halmazon. Nyilván $\Pi(\tilde{T})$ az $\mathfrak{E}$ tér lineáris altere. $\Pi(\tilde{T})$ megadása teljesen meghatározza a $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ halmazt (és így (3.1) folytán magát a $\tilde{T}$ operátort is), mert $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ mindazokból az $f \in \mathfrak{D}(T^*)$ elemekből áll, amelyekre $x(f) \in \Pi(\tilde{T})$. Valóban, ha $f \in \mathfrak{D}(T^*)$ és $x_0 = x(f) \in \Pi(\tilde{T})$, akkor $\Pi(\tilde{T})$ definíciója szerint található olyan $f_0 \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$, hogy $x_0 = x(f_0)$. Ekkor azonban $x(f - f_0) = 0$, tehát $g = f - f_0 \in \mathfrak{D}(T) \subset \mathfrak{D}(\tilde{T})$, $f = f_0 + g \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$.

Az önadjungált operátorok definíciója értelmében a $g \in \mathfrak{D}(T^*)$ elem akkor és csak akkor tartozik a $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ halmazhoz, ha

$$(3.2) \quad (\tilde{T}f, g) = (f, T^*g) \quad (f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})).$$

A (2.2), (3.1) összefüggések és a 3°. állítás folytán az utóbbi feltétel ekvivalens azzal, hogy

$$(3.3) \quad [f, g]_b - [f, g]_a = 0 \quad (f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})).$$

Tekintsük azt az

$$\eta = Ux$$

unitér transzformációt, amely az $x = \{\xi_k\} \in \mathfrak{E}$ vektornak az $\eta = \{\eta_k\} \in \mathfrak{E}$ vektort felelteti meg, ahol

$$\eta_k = \xi_{2n-k+1}, \quad \eta_{n+k} = -\xi_{n-k+1}, \quad \eta_{2n+k} = -\xi_{4n-k+1}, \quad \eta_{3n+k} = \xi_{3n-k+1} \\ (k = 1, 2, \dots, n).$$

Ekkor (1.9) alapján a (3.3) feltétel a következőképpen is felírható:

$$(x(f), Ux(g)) = 0 \quad (f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})).$$

Ennélfogva a $g \in \mathfrak{D}(T^*)$ elem akkor és csak akkor van benne a $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ halmazban (vagyis akkor és csak akkor lesz $x(g) \in \Pi(\tilde{T})$), ha $Ux(g)$ ortogonális $\Pi(\tilde{T})$ -ra, más szóval a $\Pi = \Pi(\tilde{T})$ altér és $U\Pi$ egymás ortogonális komplementumai:

$$(3.4) \quad \mathfrak{E} = \Pi \oplus U\Pi.$$

Azt is könnyű belátni, hogy megfordítva, minden (3.4) tulajdonságú $\Pi \subset \mathfrak{E}$ altérnek megfelel a T operátor egy $\tilde{T}$ önadjungált folytatása, amelyre $\Pi(\tilde{T}) = \Pi$. Valóban, ha $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ gyanánt azoknak az $f \in \mathfrak{D}(T^*)$ elemeknek az összességét választjuk, amelyekre $x(f) \in \Pi$, és előírjuk, hogy $f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$ esetén $\tilde{T}f = f^{[2n]}$ legyen, önadjungált operátort kapunk (ugyanis rá vonatkozóan a (3.3) egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $g \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$), amelynek megvan a kívánt $\Pi(\tilde{T}) = \Pi$ tulajdonsága.

Ilyen módon igazoltuk a következő állítást.

5°. Legyen $\Pi \subset \mathfrak{E}$ olyan altér, amely rendelkezik a (3.4) tulajdonsággal, $\mathfrak{D}_\Pi$ pedig azoknak az $f \in \mathfrak{D}(T^*)$ elemeknek a halmaza, amelyekre $x(f) \in \Pi$. Értelmezzünk a $\mathfrak{D}_\Pi$ halmazon egy $\tilde{T}_\Pi$ operátort a következőképpen:

$$\tilde{T}_\Pi f = f^{[2n]} \quad (f \in \mathfrak{D}_\Pi).$$

Az így kapott $\tilde{T}_\Pi$ operátor a T operátor önadjungált folytatásainak az általános alakját szolgáltatja.

Megmutatjuk, hogyan adhatók meg analitikusan a (3.4) tulajdonsággal rendelkező Π alterek. Az említett tulajdonság következtében minden ilyen Π altér dimenziója szükségképpen $2n$. Ezért a $\Pi \subset \mathfrak{E}$ lineáris halmaz $2n$ számú lineárisan független egyenletből álló rendszerrel adható meg:

$$(3.5) \quad \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} \xi_k + \sum_{k=1}^{2n} \beta_{jk} \xi_{2n+k} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n).$$

Bevezetve az

$$i_j = (\bar{\alpha}_{j1}, \dots, \bar{\alpha}_{j2n}, \bar{\beta}_{j1}, \dots, \bar{\beta}_{j2n}) \quad (j = 1, 2, \dots, 2n)$$

lineárisan független vektorokat, a (3.5) egyenletrendszert így írhatjuk fel:

$$(3.6) \quad (x, i_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n).$$

Nyilvánvaló, hogy a (3.6) egyenletrendszer akkor és csak akkor határozza meg az adott, (3.4) tulajdonságú Π alteret, ha az $i_1, i_2, \dots, i_{2n}$ vektorok bázist alkotnak Π ortogonális komplementumában, vagyis $U\Pi$ -ben. Minthogy pedig $U^2 = I$, az utóbbi feltétel ekvivalens azzal, hogy az $Ui_1, Ui_2, \dots, Ui_{2n}$ vektorok bázist alkotnak a $\Pi = U(U\Pi)$ altérben. Ismét figyelembe véve, hogy $\Pi \perp U\Pi$, az alábbi feltételekhez jutunk:

$$(3.7) \quad (Ui_k, i_j) = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, 2n).$$

Könnyű belátni, hogy ezek a feltételek nemcsak szükségesek, hanem elégségesek is ahhoz, hogy a (3.5) egyenletrendszer által meghatározott Π lineáris halmaznak meglegyen a (3.4) tulajdonsága.

A nyert eredmény megfogalmazása céljából fel fogjuk használni az önadjungált peremfeltétel-rendszer fogalmát. Mint ismeretes, a

$$(3.8) \quad \sum \alpha_{jk} f^{[k-1]}(a) + \sum \beta_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

lineárisan független peremfeltételekből álló rendszert akkor nevezik *önadjungáltk*, ha tetszés szerinti $g, f \in \mathfrak{D}^*$ elemekre, amelyek eleget tesznek ezeknek a feltételeknek, fennáll

$$[g, f]_b - [g, f]_a = 0,$$

vagy, ami ugyanaz, ha mindazoknak az $f \in \mathfrak{D}^*$ elemeknek a halmaza, amelyekre ezek a feltételek teljesülnek, a T operátor valamelyik $\tilde{T}$ önadjungált folytatásának a $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ értelmezési tartományát alkotja.

Az 5°. állítás és a fenti megfontolások értelmében a T operátor mindegyik $\tilde{T}$ önadjungált folytatásának megfelel egy önadjungált peremfeltétel-rendszer, amely a $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ halmazt határozza meg az imént ismertetett módon.

Vezessük még be a következő jelölést: ha $a = (a_1, a_2, \dots, a_{2n})$ és $b = (b_1, b_2, \dots, b_{2n})$, akkor legyen

$$(3.9) \quad \{a, b\} = \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_{2n-k+1} - \sum_{k=1}^n a_{2n-k+1} \bar{b}_k.$$

Ekkor érvényes a következő állítás.

6°. Ahhoz, hogy a lineárisan független peremfeltételekből álló (3. 8) rendszer önadjungált legyen, szükséges és elégséges, hogy $m=2n$ legyen és hogy az $a_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{j2n})$, $b_j = (\beta_{j1}, \beta_{j2}, \dots, \beta_{j2n})$ vektorok eleget tegyenek az

$$(3.10) \quad \{a_j, a_k\} = \{b_j, b_k\} \quad (j, k = 1, 2, \dots, 2n)$$

feltételeknek¹⁷.

Ez az állítás abból adódik, hogy a (3. 10) feltételek ekvivalensek a (3. 7) alattiakkal, ugyanis könnyen beláthatóan

$$(U i_k, i_j) = \{a_j, a_k\} - \{b_j, b_k\} \quad (j, k = 1, 2, \dots, 2n).$$

Most felsorolunk néhány példát önadjungált peremfeltétel-rendszerre.

Nem nehéz belátni, hogy az

$$f^{[p_j]}(a) = 0, \quad f^{[q_j]}(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

peremfeltételek, ahol

$$0 \leq \begin{matrix} p_1 < p_2 < \dots < p_n \\ q_1 < q_2 < \dots < q_n \end{matrix} \leq 2n-1,$$

akkor és csak akkor alkotnak önadjungált rendszert, ha

$$p_k + p_{n-k+1} = 2n-1, \quad q_k + q_{n-k+1} = 2n-1$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

¹⁷ A valós esetben az önadjungáltság analóg feltételei szerepelnek A. A. GRAFF [4] munkájában.

Azt sem nehéz megmutatni, hogy ha a (3. 8) önadjungált peremfeltétel-rendszer szétesik az a végpontra vonatkozó m_1 számú és a b végpontra vonatkozó m_2 számú feltételre, akkor biztosan $m_1 = m_2 = n$, és így ebben az esetben a peremfeltétel-rendszer a következő alakban írható fel:

$$(3. 11) \quad \sum_{k=1}^{2n} a_{jk} f^{[k-1]}(a) = 0, \quad \sum_{k=1}^{2n} b_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Bevezetve az

$$\alpha_j = (a_{j1}, \dots, a_{j2n}), \quad b_j = (b_{j1}, \dots, b_{j2n}) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

vektorokat, a (3. 11) rendszer önadjungáltságának a feltételei az alábbiak lesznek:

$$\{\alpha_j, \alpha_k\} = 0, \quad \{b_j, b_k\} = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

Speciálisan az

$$\begin{aligned} f^{[2n-j-1]}(a) - \sum_{k=1}^n a_{jk} f^{[k-1]}(a) &= 0, \\ f^{[2n-j-1]}(b) + \sum_{k=1}^n b_{jk} f^{[k-1]}(b) &= 0 \end{aligned} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

peremfeltétel-rendszer akkor és csak akkor önadjungált, ha

$$(3. 12) \quad a_{jk} = \bar{a}_{kj}, \quad b_{jk} = \bar{b}_{kj} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

Az általánosabb esetben az

$$\begin{aligned} f^{[2n-j-1]}(a) - \sum_{k=1}^n a_{jk} f^{[k-1]}(a) - \sum_{k=1}^n c_{jk} f^{[k-1]}(b) &= 0, \\ f^{[2n-j-1]}(b) + \sum_{k=1}^n d_{jk} f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^n b_{jk} f^{[k-1]}(b) &= 0 \end{aligned} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

peremfeltétel-rendszer akkor és csak akkor lesz önadjungált, ha fennáll (3. 12) és

$$c_{jk} = \bar{d}_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

4. §. Félig korlátos T operátorok

Az alább következő állítás azt mutatja, hogy a matematikai fizika szokásos feladataiban előforduló kvázi-differenciáloperátorok félig korlátosak.

$\mathcal{T}$. A T operátor alulról félig korlátos, ha¹⁸

$$C) \quad p_0(x) \geq 0 \quad (a \leq x \leq b).$$

¹⁸ Meg lehet mutatni, hogy a C) feltétel nemcsak elégséges, hanem szükséges is ahhoz, hogy a T operátor alulról félig korlátos legyen.

Az állítás bebizonyítása céljából elég megmutatni, hogy a T operátor valamelyik $\tilde{T}$ önadjungált folytatása alulról félig korlátos. Ilyen önadjungált folytatásnak a $\tilde{T}_\infty$ operátort választjuk (ez a továbbiakban fontos szerepet fog játszani: ki fog derülni, hogy $\tilde{T}_\infty$ a T operátor *durva* folytatása), amely a *legegyszerűbb* önadjungált peremfeltétel-rendszernek, nevezetesen az

$$(4.0) \quad f^{[k]}(a) = f^{[k]}(b) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

feltételeknek felel meg.¹⁹

Az (1.7) azonosságot az $f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}_\infty)$, $g=f$ elemekre felírva, majd mindkét oldal: a -tól b -ig integrálva azt kapjuk, hogy

$$(4.1) \quad (\tilde{T}_\infty f, f) = \sum_{k=0}^n \int_a^b p_k(x) |f^{(n-k)}(x)|^2 dx \quad (f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}_\infty)).$$

Másrészt, ha $f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}_\infty)$, akkor

$$f^{(n-k)}(x) = \int_a^b V_k(x, \xi) f^{(n)}(\xi) d\xi \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$V_k(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!} & \text{ha } \xi \leq x, \\ 0 & \text{ha } \xi \geq x \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Ennélfogva, ha bevezetjük a

$$H(\xi, \eta) = - \sum_{k=1}^n \int_a^b p_k(x) V_k(x, \xi) V_k(x, \eta) dx \quad (a \leq \xi, \eta \leq b)$$

jelölést és $f^{(n)}$ helyébe mindenütt az $\frac{f^{[n]}}{p_0}$ kifejezést tesszük, akkor a (4.1) egyenlőséget a következő alakban írhatjuk fel:

$$(4.2) \quad (\tilde{T}_\infty f, f) = \int_a^b |f^{[n]}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{p_0(\xi)} - \int_a^b \int_a^b H(\xi, \eta) f^{[n]}(\xi) \overline{f^{[n]}(\eta)} \frac{d\xi}{p_0(\xi)} \frac{d\eta}{p_0(\eta)}.$$

Tekintsük a

$$(4.3) \quad \psi(\xi) = \mu \int_a^b H(\xi, \eta) \psi(\eta) \frac{d\eta}{p_0(\eta)}$$

¹⁹ Ezek szerint $\mathfrak{D}(\tilde{T}_\infty)$ azoknak az $f \in \mathfrak{D}(T^*)$ elemeknek az összessége, amelyek eleget tesznek a (4.0.) feltételeknek.

súlyozott integrálegyenletet, amelyben a $H(\xi, \eta)$ magfüggvény valós, szimmetrikus és folytonos²⁰.

Legyen $\{\psi_j\}_1^\infty$ a (4. 3) egyenlet fundamentális függvényeinek a teljes ortonormális rendszere és $\{\mu_j\}_1^\infty$ a sajátértékek megfelelő rendszere. Itt az ortonormalitás a

$$\{\varphi, \psi\} = \int_a^b \varphi(\xi) \overline{\psi(\xi)} \frac{d\xi}{p_0(\xi)}$$

skaláris szorzatra vonatkozóan értendő. Ekkor bármilyen $\varphi(\xi)$ ($a \leq \xi \leq b$) folytonos függvényre²¹ érvényes a Hilbert-féle képlet:

$$\{H\varphi, \varphi\} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{-1} |\{\varphi, \psi_j\}|^2,$$

ahol

$$(4. 4) \quad \{H\varphi, \varphi\} = \int_a^b \int_a^b H(\xi, \eta) \varphi(\xi) \overline{\varphi(\eta)} \frac{d\xi}{p_0(\xi)} \frac{d\eta}{p_0(\eta)}.$$

Minthogy $j \rightarrow \infty$ esetén $|\mu_j| \rightarrow \infty$, alkalmas számozás mellett

$$\mu_j^{-1} \geq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu), \quad \mu_j^{-1} < 1 \quad (j > \nu).$$

Következésképpen, ha

$$\{\varphi, \psi_j\} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu),$$

akkor

$$\{H\varphi, \varphi\} \leq \sum_{j=\nu+1}^{\infty} |\{\varphi, \psi_j\}|^2 \leq \{\varphi, \varphi\}.$$

Most figyelembe véve a (4. 2), (4. 4) képleteket azt kapjuk, hogy tetszés szerinti $f \in \mathcal{D}(\tilde{T}_\infty)$ elemre, amely eleget tesz az

$$(4. 5) \quad \{f^{[n]}, \psi_j\} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

feltételeknek, fennáll a

$$(\tilde{T}_\infty f, f) \geq 0$$

egyenlőtlenség. Ennek alapján már könnyű belátni, hogy $\tilde{T}_\infty$ alulról félig korlátos operátor, sőt azt is, hogy $\tilde{T}_\infty$ negatív spektruma véges számú sajátértékből áll, amelyek multiplicitásának az összege $\leq \nu$.

²⁰ Megemlítjük, hogy ha p_0 -ra teljesül az A) és a C) feltétel, akkor a (4.3) egyenletre érvényesek maradnak a valós szimmetrikus magú integrálegyenletekre vonatkozó Hilbert-Schmidt-féle elmélet összes állításai és formulái, feltéve, hogy alkalmas módon fogalmazzuk meg, ill. írjuk fel őket, vagyis az elméletben fellépő integrálokban minden $d\xi, d\eta, \dots$ differenciált a megfelelő $\frac{d\xi}{p_0(\xi)}, \frac{d\eta}{p_0(\eta)}, \dots$ súlyozott differenciállal helyettesítünk.

²¹ Sőt, minden olyan $\varphi(\xi)$ ($a \leq \xi \leq b$) mérhető függvényre, amelyre

$$\int_a^b |\varphi(\xi)|^2 \frac{d\xi}{p_0(\xi)} < \infty.$$

Csakugyan, ha a $\tilde{T}_\infty$ operátor spektrálfüggvényét $E(\lambda)$ -val jelöljük ($-\infty < \lambda < \infty$), és feltesszük, hogy valamilyen $\varepsilon > 0$ mellett az $E(-\varepsilon)\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{H} = L_2(a, b)$) altér dimenziója nagyobb, mint v , akkor az $E(-\varepsilon)\mathfrak{H}$ altérben található olyan $f \neq 0$ vektor, amelyre teljesülnek a (4. 5) feltételek és amelyre

$$(\tilde{T}_\infty f, f) = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \lambda d(E(\lambda)f, f) \leq -\varepsilon(f, f) < 0,$$

ez pedig lehetetlen.

Tehát $\tilde{T}_\infty$ és vele együtt T is alulról félig korlátos. A 7° . állítást bebizonyítottuk.

A továbbiakban, anélkül hogy mondanánk, mindig feltesszük, hogy a p_0 függvény az A) feltételen kívül a C) feltételnek is eleget tesz (vagyis nem-negatív).

Ebben az esetben érvényes a következő állítás.

8° . A T operátor bármelyik $\tilde{T}$ önadjungált folytatása alulról félig korlátos, és diszkrét spektruma van.

A 8° . állítás első része abból adódik, hogy a T operátor félig korlátos és defektus-száma $n(T) = 2n$ véges (lásd I. fejezet, 18. tétel). Az állítás második részének (ti. hogy $\tilde{T}$ spektruma diszkrét) a bebizonyításához, $n(T)$ végeessége miatt, elég megmutatni, hogy a T operátor legalább egy folytatásának, például a $\tilde{T}_\infty$ folytatásnak, diszkrét spektruma van (lásd I. fejezet, 22. és 24. tétel). Másrészt a 7° . állítás igazolása során egyúttal megállapítottuk, hogy $\tilde{T}_\infty$ negatív spektruma véges számú sajátértékből áll, és a hozzájuk tartozó multiplicitások összege véges. Minthogy ugyanezek a megfontolások alkalmazhatók a $\tilde{T}_\infty + cI$ operátorra tetszés szerinti valós c esetén, ebből már következik, hogy $\tilde{T}_\infty$ spektruma diszkrét.

A 8° . állítást bebizonyítottuk.

Megemlítjük, hogy a $\tilde{T}$ operátor spektrumának a diszkréttségét rendszerint más módon igazolják, nevezetesen mint annak a közvetlen folyományát, hogy ha c a $\tilde{T}$ operátornak nem sajátértéke, akkor $(\tilde{T} - cI)^{-1}$ teljesen folytonos. Az utóbbi körülmény viszont a $(\tilde{T} - cI)^{-1}$ operátornak Green-függvény segítségével történő integrál-előállításából adódik.

5. §. A Green-függvény és a $\tilde{T}$ önadjungált folytatás fundamentális függvényei

Azon feltevés mellett, hogy a 0 szám a $\tilde{T}$ operátornak nem sajátértéke, meg fogjuk mutatni, hogyan határozható meg az f függvény a

$$\tilde{T}f = h \quad (h \in L_2(a, b))$$

egyenletből.

Mint tudjuk, ez az operátoregyenlet ekvivalens az

$$\begin{aligned} (5.1') \quad & \{f^{[2n]} = h, \\ (5.1'') \quad & \{U_j(f) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n) \end{aligned}$$

rendszerrel, ahol az $U_j(f)$ ($j=1, 2, \dots, 2n$) kifejezések valamilyen

$$U_j(f) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_{jk} f^{[k-1]}(b) \quad (j = 1, 2, \dots, 2n)$$

alakú „perem-funkcionálok”.

Az (5. 1') egyenlet $f \in \mathfrak{D}^*$ általános megoldását a következőképpen lehet előállítani:

$$(5. 2) \quad f(x) = \int_a^x \Phi(x, \xi) h(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{2n} C_k \Phi_k(x) \quad (a \leq x \leq b);$$

itt $\Phi(x, \xi)$ a Cauchy-függvény, $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{2n})$ a $\varphi^{[2n]}=0$ egyenlet megoldásaiból álló $\mathfrak{N}_0$ halmaz bázisa, C_k ($k=1, 2, \dots, 2n$) pedig tetszés szerinti konstansok. A

$$\Phi^*(x, \xi) = \begin{cases} 0 & (x \leq \xi), \\ \Phi(x, \xi) & (x \geq \xi) \end{cases}$$

jelölés bevezetésével az (5. 2) egyenlőség az

$$f(x) = \int_a^b \Phi^*(x, \xi) h(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{2n} C_k \Phi_k(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

alakra hozható. Az f függvénynek ezt a kifejezését behelyettesítve az (5. 1'') összefüggésekbe a C_k ($k=1, 2, \dots, 2n$) értékekre az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$(5. 3) \quad \int_a^b U_j(\Phi^*(x, \xi)) h(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{2n} U_j(\Phi_k) C_k = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, 2n).$$

Ennek az egyenletrendszernek az $|U_j(\Phi_k)|_{j=1}^{2n}$ determinánsa nem nulla, mert különben az (5. 1) rendszernek $h=0$ esetén (vagyis a $\tilde{T}f=0$ egyenletnek) léteznék $f \neq 0$ megoldása, és ez ellentmond a tett feltevésnek.

A $\Phi(x, \xi)$ függvény (1. 11) kifejezéséből következik, hogy fennáll

$$\chi_j(\xi) = U_j(\Phi^*(x, \xi)) \in \mathfrak{N}_0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n)$$

is. Ennélfogva ha megoldjuk az (5. 3) lineáris egyenletrendszert a C_k ($k=1, 2, \dots, 2n$) ismeretlenekre és a nyert kifejezéseket behelyettesítjük az (5. 2) összefüggésbe, arra az eredményre jutunk, hogy

$$(5. 4) \quad f(x) = \int_a^b G(x, \xi) h(\xi) d\xi,$$

ahol

$$(5. 5) \quad G(x, \xi) = \begin{cases} \Phi(x, \xi) + \sum_{j=1}^{2n} \Phi_j(x) \Psi_j(\xi) & (x \geq \xi), \\ \sum_{j=1}^{2n} \Phi_j(x) \Psi_j(\xi) & (x \leq \xi), \end{cases}$$

és $\Psi_j \in \mathfrak{N}_0$ ($j = 1, 2, \dots, 2n$).

Minthogy bármilyen $h \in L_2(a, b)$ esetén az (5.4) egyenlőség ekvivalens az $f = \tilde{T}^{-1}h$ egyenlőséggel és a $\tilde{T}^{-1}$ operátor hermitikus, azért a $G(x, \xi)$ Green-függvény hermitikus magfüggvény, azaz

$$G(x, \xi) = \overline{G(\xi, x)} \quad (a \leq x, \xi \leq b).$$

Most legyen $\{\varphi_j\}_1^\infty$ a $\tilde{T}$ operátor sajátvektoraiból álló teljes ortonormális rendszer, ahol a számozást úgy végezzük, hogy a megfelelő λ_j ($j = 1, 2, \dots$) sajátértékek növekedő sorozatot alkossanak:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \quad (\lambda_n \rightarrow \infty).$$

Más szóval $\{\varphi_j\}_1^\infty$ a

$$(5.6) \quad \begin{cases} \varphi^{[2n]} - \lambda \varphi = 0 \\ U_j(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, 2n)$$

peremérték-feladathoz tartozó fundamentális függvények teljes ortonormális rendszere, $\{\lambda_j\}_1^\infty$ pedig a megfelelő karakterisztikus értékek sorozata. Minthogy a $\tilde{T}\varphi - \lambda\varphi = 0$ egyenlet ekvivalens a $\varphi - \lambda\tilde{T}^{-1}\varphi = 0$ egyenlettel, azért az előbbi egyenlet, és így az (5.6) peremérték-feladat is, ekvivalens a

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0$$

integrálegyenlettel.

Tekintettel arra, hogy ennek az egyenletnek majdnem mindegyik λ_j ($j = 1, 2, \dots$) karakterisztikus értéke pozitív, MERCER tétele szerint érvényes a

$$(5.7) \quad G(x, \xi) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varphi_v(x) \overline{\varphi_v(\xi)}}{\lambda_v} \quad (a \leq x, \xi \leq b)$$

sorfejtés, és ez az $a \leq x, \xi \leq b$ négyzetben abszolút és egyenletesen konvergens. Most megjegyezzük, hogy az (5.5), (1.11) képletek és az (1.10) összefüggések értelmében a $G(x, \xi)$ függvény

$$(5.8) \quad G_{jk}(x, \xi) = \frac{\partial^{j+k} G(x, \xi)}{\partial x^j \partial \xi^k} \quad (j, k = 0, 1, \dots, n-1)$$

deriváltjai léteznek és folytonosak.

Ennek folytán érvényesek a

$$(5.9) \quad G_{jk}(x, \xi) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varphi_v^{(j)}(x) \overline{\varphi_v^{(k)}(\xi)}}{\lambda_v} \quad (j, k = 0, 1, \dots, n-1)$$

sorfejtések²² és mindegyikük abszolút és egyenletesen konvergens az $a \leq x, \xi \leq b$ négyzetben.

²² Az (5.9) sorfejtések érvényességét folytonos (5.8) deriváltakkal rendelkező $G(x, \xi)$ hermitikus magfüggvényekre a szerző először az [5] közleményben állapította meg. Az alább ismertetett egyszerű bizonyítás A. M. DANYILEVSKIJTÓL származik [6] (aki Harkovban a város német megszállása idején éhen halt).

Ennek az állításnak a bebizonyítása során az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy²³

$$\lambda_v > 0 \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Ekkor az (5. 7) sorfejtésből adódik a következő egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \{G(x, x) - G(x, x+h) - G(x+h, x) + G(x+h, x+h)\} = \\ & = \frac{1}{h^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{|\varphi_v(x+h) - \varphi_v(x)|^2}{\lambda_v} \geq \frac{1}{h^2} \sum_{v=1}^m \frac{|\varphi_v(x+h) - \varphi_v(x)|^2}{\lambda_v} \\ & \quad (a \leq x, x+h \leq b; \quad m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Elvégezve először a $h \rightarrow 0$, azután pedig az $m \rightarrow \infty$ határátmenetet, azt kapjuk, hogy

$$(5. 10) \quad (G_{11}(x, x) \geq \sum_{v=1}^{\infty} \frac{|\varphi'_v(x)|^2}{\lambda_v} \quad (a \leq x \leq b).$$

Minthogy továbbá tetszés szerinti $m < n$ természetes számokra

$$\begin{aligned} (5. 11) \quad & \left| \sum_{v=m}^n \frac{\varphi_v^{(j)}(x) \overline{\varphi_v^{(k)}(\xi)}}{\lambda_v} \right| \leq \sqrt{\sum_{v=m}^n \frac{|\varphi_v^{(j)}(x)|^2}{\lambda_v}} \sqrt{\sum_{v=m}^n \frac{|\varphi_v^{(k)}(\xi)|^2}{\lambda_v}} \\ & \quad (a \leq x, \xi \leq b), \end{aligned}$$

azért az (5. 10) összefüggésekből adódik, hogy a

$$(5. 12) \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varphi_v^{(j)}(x) \overline{\varphi_v^{(k)}(\xi)}}{\lambda_v} \quad (a \leq x, \xi \leq b; \quad j, k = 0, 1)$$

sorok rögzített ξ (illetve x) mellett x -ben (illetve ξ -ben) abszolút és egyenletesen konvergensek. Ennélfogva az (5. 12) sor összege $j=1, k=0$ esetén a $j=0, k=0$ értékekhez tartozó (5. 12) sor összegének az x változó szerinti deriváltja. Az (5. 7) egyenlőség értelmében innen

$$(5. 13) \quad G_{10}(x, \xi) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varphi'_v(x) \overline{\varphi'_v(\xi)}}{\lambda_v} \quad (a \leq x, \xi \leq b).$$

Minthogy pedig ugyanígy a $j=1, k=1$ értékekhez tartozó (5. 12) sor összege a $j=1, k=0$ értékekhez tartozó (5. 12) sor-összeg ξ szerinti deriváltja, az (5. 13) összefüggés alapján kapjuk:

$$(5. 14) \quad G_{11}(x, \xi) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varphi'_v(x) \overline{\varphi'_v(\xi)}}{\lambda_v} \quad (a \leq x, \xi \leq b).$$

²³ Ellenkező esetben a $G(x, \xi)$ függvényt megfontolásainkban mindenütt helyettesíthetnénk a

$$G_p(x, \xi) = G(x, \xi) - \sum_{v=1}^p \frac{\varphi_v(x) \overline{\varphi_v(\xi)}}{\lambda_v}$$

függvénnyel, ahol a p értéket úgy választjuk meg, hogy $v > p$ esetén $\lambda_v > 0$ legyen.

Be kell még bizonyítani, hogy az (5. 13), (5. 14) sorfejtések az $a \leq x, \xi \leq b$ négyzetben abszolút és egyenletesen konvergensek. Ez azonban következik az (5. 11) egyenlőtlenségből, az (5. 7) sorfejtés egyenletes konvergenciájából és abból, hogy a

$$(5.15) \quad G_{11}(x, x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{|\varphi'_v(x)|^2}{\lambda_v} \quad (a \leq x \leq b)$$

sorfejtés az (a, b) intervallumban egyenletesen konvergál (DINI tétele alapján).

Ilyen módon állításunkat a $G_{jk}(x, \xi)$ ($j, k=0, 1$) deriváltakra bebizonyítottuk.

Analóg eljárással, de most már az (5. 7), (5. 13), (5. 14) sorfejtésekből kiindulva be lehet bizonyítani az állítást a $G_{jk}(x, \xi)$ ($j, k=0, 1, 2$) deriváltakra. Ugyanígy folytatva az okoskodást igazolhatjuk az összes (5. 9) sorfejtések érvényességét, valamint abszolút és egyenletes konvergenciáját.

Erre az eredményre hamarosan szükségünk lesz.

6. §. A $\mathfrak{D}[T]$ halmaz és a T_μ durva folytatás

Jelölje L_0 mindazoknak az $f \in L_2(a, b)$ függvényeknek a halmazát, amelyek abszolút folytonosak, abszolút folytonos $f^{[k]}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) deriváltjaik vannak és ezekre teljesülnek az

$$(6.1) \quad f^{[k]}(a) = f^{[k]}(b) = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

peremfeltételek, végül

$$(6.2) \quad \int_a^b p_0(x) |f^{(n)}(x)|^2 dx < \infty.$$

Értelmezzük az L_0 halmazon a $(g, f)_1$ skaláris szorzatot a következő képlettel:

$$(g, f)_1 = \int_a^b p_0(x) g^{(n)}(x) \overline{f^{(n)}(x)} dx \quad (g, f \in L_0).$$

Ekkor L_0 Hilbert-tér.

Ennek az állításnak a bebizonyítása céljából elég annyit igazolni, hogy L_0 teljes normált tér az

$$\|f\|_1 = \sqrt{(f, f)_1}$$

normára nézve.

Legyen $\{f_v\}_1^\infty \subset L_0$ egy Cauchy-sorozat, azaz

$$\|f_v - f_\mu\|_1 \rightarrow 0, \quad \text{ha } \mu, v \rightarrow \infty.$$

Ekkor a $\sqrt{p_0(x)} f_v^{(n)}(x)$ függvények sorozatára alkalmazni lehet a Riesz—Fischer-tételt; e tétel értelmében található olyan $\varphi(x)$ ($a \leq x \leq b$) mérhető függvény, hogy

$$(6.3) \quad \begin{cases} \int_a^b p_0(x) |\varphi(x)|^2 dx < \infty, \\ \int_a^b p_0(x) |\varphi(x) - f_v^{(n)}(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{ha } v \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Legyen

$$f(x) = \int_a^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(\xi) d\xi \quad (a \leq x \leq b);$$

akkor $f^{(n)} = \varphi$ és

$$f^{(k)}(x) = \int_a^x \frac{(x-\xi)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \varphi(\xi) d\xi \quad (a \leq x \leq b; k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Minthogy azonban L_0 definíciója szerint

$$f_v^{(k)}(x) = \int_a^x \frac{(x-\xi)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} f_v^{(n)}(\xi) d\xi \quad (a \leq x \leq b; k = 0, 1, \dots, n-1)$$

is fennáll, azért

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x) - f_v^{(k)}(x)| &= \left| \int_a^x \frac{(x-\xi)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} (\varphi(\xi) - f_v^{(n)}(\xi)) d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{(b-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \int_a^b |\varphi(\xi) - f_v^{(n)}(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{(b-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \sqrt{\int_a^b \frac{d\xi}{p_0(\xi)} \int_a^b p_0(\xi) |\varphi(\xi) - f_v^{(n)}(\xi)|^2 d\xi}, \end{aligned}$$

tehát (6.3) alapján $k=0, 1, \dots, n-1$ esetén az $f_v^{(k)}(x)$ ($v=1, 2, \dots$) sorozat egyenletesen tart $f^{(k)}(x)$ -hez. Következésképpen

$$f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = \lim_{v \rightarrow \infty} f_v^{(k)}(a) = \lim_{v \rightarrow \infty} f_v^{(k)}(b) = 0$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Ily módon $f \in L_0$ és minthogy $f^{(n)} = \varphi$, azért (6.3) azt jelenti, hogy $\|f - f_v\|_1 \rightarrow 0$. L_0 teljességét bebizonyítottuk.

Most mutassuk meg, hogy $\mathfrak{D}(T)$ mint az L_0 Hilbert-tér részhalmaza sűrű ebben a térben. Tegyük fel az ellenkezőt; ekkor L_0 -ban található olyan g ($g \neq 0$) elem, amely ortogonális $\mathfrak{D}(T)$ -re, amelyre tehát

$$\int_a^b p_0(x) f^{(n)}(x) \overline{g^{(n)}(x)} dx = \int_a^b f^{[n]}(x) \overline{g^{(n)}(x)} dx = 0 \quad (6.4)$$

$$(f \in \mathfrak{D}(T)).$$

De $f \in \mathfrak{D}(T)$ esetén

$$(6.5) \quad f(x) = \int_a^x \Phi(x, \xi) f^{[2n]}(\xi) d\xi, \quad f^{[n]}(x) = \int_a^x \Phi_{n0}(x, \xi) f^{[2n]}(\xi) d\xi,$$

ahol $\Phi(x, \xi)$ az (1. 11) képlettel értelmezett *Cauchy-féle* függvény, és

$$\Phi_{kl}(x, \xi) = \sum_{j=1}^n (\Phi_j^{[k]}(x) \Phi_{2n-j+1}^{[l]}(\xi) - \Phi_j^{[l]}(\xi) \Phi_{2n-j+1}^{[k]}(x))$$

$$(a \leq x, \xi \leq b; \quad k, l = 0, 1, \dots, 2n).$$

Az $f^{[n]}$ függvény (6. 5) alatti kifejezését behelyettesítve a (6. 4) összefüggésbe azt nyerjük, hogy

$$(6.6) \quad \int_a^b f^{[2n]}(\xi) \overline{\chi(\xi)} d\xi = 0 \quad (f \in \mathfrak{D}(T)),$$

ahol

$$(6.7) \quad \chi(\xi) = \int_{\xi}^b \Phi_{n0}(x, \xi) g^{(n)}(x) dx \quad (a \leq x \leq b).$$

A (6. 6) egyenlőség azt fejezi ki, hogy $\chi \perp \mathfrak{R}(T)$, következésképpen a 2°. állítás szerint $\chi \in \mathfrak{D}(T^*)$ és

$$\chi^{[2n]} = 0.$$

Másrészt ha (1. 10) felhasználásával (6. 7) alapján egymás után kiszámítjuk a $\chi^{[k]}$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$) kvázi-deriváltakat, kiderül, hogy majdnem mindenütt

$$(6.8) \quad \begin{cases} \chi^{[k]}(\xi) = \int_{\xi}^b \Phi_{nk}(x, \xi) g^{(n)}(x) dx & (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ \chi^{[n+k]}(\xi) = \frac{d^k}{d\xi^k} (p_0(\xi) g^{(n)}(\xi)) + \int_{\xi}^b \Phi_{n,n+k}(x, \xi) g^{(n)}(x) dx \\ & (k = 0, 1, \dots, n), \end{cases}$$

és ebből egyúttal következik a

$$\frac{d^k}{d\xi^k} (p_0 g^{(n)}) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

kvázi-deriváltak abszolút folytonossága. Speciálisan

$$(6.9) \quad \chi^{[2n]} = \frac{d^n}{d\xi^n} (p_0 g^{(n)}) = 0.$$

Mínthogy a $g(\in L_0)$ függvény eleget tesz a

$$(6.10) \quad g^{(k)}(a) = g^{(k)}(b) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

peremfeltételeknek, a (6. 9) egyenlőségből következik, hogy

$$\int_a^b p_0 |g^{(n)}|^2 dx = \int_a^b g(x) \frac{d^n}{dx^n} (p_0 g^{(n)}) dx = 0.$$

Ennélfogva $g^{(n)}=0$ és így a (6. 10) összefüggések miatt $g=0$. Ellentmondásra jutottunk.

Tehát $\mathfrak{D}(T)$ sűrű L_0 -ban.

Most már nem okoz nagy nehézséget az alábbi állítás bebizonyítása.

9°. A $\mathfrak{D}[T]$ halmaz megegyezik az L_0 halmazzal; a $\tilde{T}_\infty$ operátor²⁴ azonos a T operátor T_μ durva folytatásával.

Valóban, minthogy $\mathfrak{D}(T)$ sűrű L_0 -ban, azért tetszés szerinti $f \in L_0$ elemhez található olyan $\{f_v\} \subset \mathfrak{D}(T)$ sorozat, hogy

$$\|f - f_v\|_1^2 = \int_a^b p_0(x) |f^{(n)}(x) - f_v^{(n)}(x)|^2 dx \rightarrow 0.$$

Ekkor, mint már tudjuk, $k=0, 1, \dots, n-1$ esetén az $\{f_v^{(k)}(x)\}$ sorozat az (a, b) számközben egyenletesen tart $f^{(k)}(x)$ -hez, tehát

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & (f - f_v, f - f_v) = \int_a^b |f(x) - f_v(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{ha } v \rightarrow \infty; \\ \text{II.} \quad & \begin{cases} (T(f_\mu - f_v), f_\mu - f_v) = \sum_{k=0}^n \int_a^b p_k(x) |f_v^{(n-k)}(x) - f_\mu^{(n-k)}(x)|^2 dx \rightarrow 0 \\ \text{ha } \mu, v \rightarrow \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Az I. és a II. feltétel teljesülése azt jelenti, hogy $f \in \mathfrak{D}[T]$. Ily módon

$$(6. 11) \quad L_0 \subset \mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty].$$

Másrészt az I. fejezet 4. § értelmében (lásd a 10. tételt és a 3. pontot) egy $\tilde{T}$ önadjungált folytatásra akkor és csak akkor áll fenn a $\mathfrak{D}[T] = \mathfrak{D}[\tilde{T}]$ egyenlőség, ha $\tilde{T} = T_\mu$. Ezek szerint ha bebizonyítjuk, hogy

$$(6. 12) \quad \mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty] \subset L_0,$$

akkor a (6. 11) összefüggés figyelembevételével a

$$\mathfrak{D}[T] = \mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty] = L_0$$

egyenlőséget nyerjük, és így a 9°. állítás be lesz bizonyítva.

Minthogy $\mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty] = \mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty + cI]$ ($-\infty < c < \infty$), a (6. 12) tartalmazás bizonyításánál az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\tilde{T}_\infty > 0$.

²⁴ Emlékeztetünk arra, hogy ez az operátor a (6.10) peremfeltételekhez tartozik.

Az I. fejezet 4. lemmája értelmében $f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty]$ esetén

$$(6.13) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |(f, \varphi_j)|^2 < \infty,$$

ahol $\{\varphi_j\}_1^\infty$ a $\tilde{T}_\infty$ operátor sajátvektoraiból álló teljes ortonormális rendszer és

$$\tilde{T}_\infty \varphi_j = \lambda_j \varphi_j \quad (\lambda_j > 0; \quad j = 1, 2, \dots).$$

Tekintsük az

$$f_v = \sum_{j=1}^v (f, \varphi_j) \varphi_j \in \mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty] \quad (v = 1, 2, \dots)$$

függvények sorozatát. Erre nyilván fennáll

$$(T(f_v - f_\mu), f_v - f_\mu) = \sum_{j=\mu+1}^v \lambda_j |(f, \varphi_j)|^2 \rightarrow 0$$

$$\text{ha } \mu, v \rightarrow \infty \quad (\mu < v).$$

Minthogy másrészt a $\tilde{T}_\infty$ operátor $G(x, \xi)$ Green-függvényére érvényesek a

$$G_{kk}(x, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\varphi_j^{(k)}(x)|^2}{\lambda_j} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1; \quad a \leq x \leq b)$$

sorfejtések, és így egy $M > 0$ számra

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\varphi_j^{(k)}(x)|^2}{\lambda_j} \leq M \quad (a \leq x \leq b; \quad k = 0, 1, \dots, n-1).$$

azért

$$(6.14) \quad \begin{aligned} |f_v^{(k)}(x) - f_\mu^{(k)}(x)|^2 &= \left| \sum_{j=\mu+1}^v (f, \varphi_j) \varphi_j^{(k)}(x) \right|^2 \leq \\ &\leq \sum_{j=\mu+1}^v \lambda_j |(f, \varphi_j)|^2 \sum_{j=\mu+1}^v \frac{|\varphi_j^{(k)}(x)|^2}{\lambda_j} \leq M \sum_{j=\mu+1}^v \lambda_j |(f, \varphi_j)|^2 \\ &\quad (a \leq x \leq b; \quad k = 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Ily módon tetszés szerinti $k=0, 1, \dots, n-1$ mellett az $\{f_v^{(k)}(x)\}_{v=1}^\infty$ sorozat az (a, b) intervallumban egyenletesen tart valamilyen $g_k(x)$ folytonos függvényhez. Következésképpen az f függvény, amely az $\{f_v\}$ sorozat négyzetes középben vett limesze, egyúttal e sorozat egyenletes limesze is, és $(n-1)$ -szer folytonosan differenciálható: $f^{(k)}(x) = g_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$)²⁵. Továbbá minthogy az f_v ($v=1, 2, \dots$) függvények eleget tesznek a (6. 10) peremfeltételeknek, ugyanez igaz lesz az f függvényre is.

²⁵ Ezek szerint érvényesek az

$$f^{(k)}(x) = \sum_{v=1}^{\infty} (f, \varphi_v) \varphi_v^{(k)}(x) \quad (a \leq x \leq b; \quad k = 0, 1, \dots, n-1)$$

sorfejtések, és mindegyikük egyenletesen (és abszolút) konvergens az (a, b) számközben.

Mindezek után világos, hogy a

$$(T(f_v - f_\mu), f_v - f_\mu) = \int_a^b p_0 |f_v^{(n)} - f_\mu^{(n)}|^2 dx + \sum_{k=1}^n \int_a^b p_k |f_v^{(n-k)} - f_\mu^{(n-k)}|^2 dx$$

egyenlőség jobb oldalán álló összeg $\mu, v \rightarrow \infty$ esetén nullához tart, úgyhogy (6. 14) értelmében

$$\int_a^b p_0 |f_v^{(n)} - f_\mu^{(n)}|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{ha } \mu, v \rightarrow \infty.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\{f_v\} \subset L_0$ sorozat Cauchy-sorozat, tehát L_0 teljessége miatt van f_0 limesze L_0 -ban. De ha az $\{f_v\}_1^\infty$ sorozat L_0 -ban tart f_0 -hoz, akkor egyenletesen is tart f_0 -hoz. Ennélfogva $f = f_0 \in L_0$. Ily módon a (6. 12) összefüggést és vele együtt a 9°. állítást bebizonyítottuk.

7. §. A $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó fő peremfeltételek és a $\mathfrak{D}[\tilde{T}]$ halmaz

Egy

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_k f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_k f^{[k-1]}(b) = 0$$

alakú peremfeltételt, amely minden $f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$ függvényre teljesül, a T operátor $\tilde{T}$ önadjungált folytatásához tartozó *fő peremfeltételnek* nevezünk, ha

$$\alpha_k = \beta_k = 0 \quad (k > n).$$

Ennek a fogalomnak a jobb megértése céljából végezzük el a következő megfontolásokat.

Mindegyik $f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$ elemnek feleltessük meg a $2n$ -dimenziós komplex $\hat{\mathfrak{E}}$ térben fekvő $\hat{x}(f) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n})$ vektort, ahol

$$\xi_k = f^{[k-1]}(a), \quad \xi_{n+k} = f^{[k-1]}(b) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Nyilvánvaló, hogy az a $\hat{N}$ halmaz, amely az összes $\hat{x}(f)$ ($f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$) vektorokból áll, az $\hat{\mathfrak{E}}$ térben lineáris alteret alkot. Legyen ennek a dimenziója $2n - d$. Ekkor a $\hat{N}$ alteret egy d számú lineárisan független egyenletből álló rendszer határozza meg:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \xi_k + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} \xi_{n+k} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, d).$$

Világos, hogy ekkor a

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, d)$$

peremfeltételek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó lineárisan független fő peremfeltételekből álló teljes rendszert szolgáltatnak.

Az elmondottakból többek között az is kitűnik, hogy ha egy $(n-1)$ -szer differenciálható $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) függvény eleget tesz a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó mindegyik fő peremfeltételnek, akkor található olyan $f_0 \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$ függvény, hogy

$$f_0^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad f_0^{(k)}(b) = f^{(k)}(b) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Azt is könnyű belátni, hogy ha a

$$(7.1) \quad \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n)$$

egyenletek a $\tilde{T}$ operátor önadjungált peremfeltétel-rendszerét alkotják, akkor a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó lineárisan független fő peremfeltételek pontos d száma éppen $2n-r$, ahol r az

$$(7.2) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{12n} & \beta_{1n} & \dots & \beta_{12n} \\ \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{22n} & \beta_{2n} & \dots & \beta_{22n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2nn} & \dots & \alpha_{2n2n} & \beta_{2nn} & \dots & \beta_{2n2n} \end{vmatrix}$$

matrix rangja. Az is nyilvánvaló, hogy a (7.1) feltétel-rendszer mindig helyettesíthető olyan ekvivalens rendszerrel, amelyben az első d feltétel fő peremfeltétel.

A fő peremfeltételek szerepét a következő állítás világítja meg.

10°. Legyen $\tilde{T}$ a T operátor valamelyik önadjungált folytatása, $\{\varphi_j\}_1^\infty$ a $\tilde{T}$ operátor sajátvektorainak teljes ortonormális rendszere és $\tilde{T}\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$ ($j = 1, 2, \dots$). Ekkor egy $f \in L_2(a, b)$ elemre nézve az alábbi három kijelentés ekvivalens:

$$a) \quad f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}];$$

$$(7.3) \quad b) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |(f, \varphi_j)|^2 < \infty;$$

c) f majdnem mindenütt megegyezik egy f_0 abszolút folytonos függvénnyel, amelynek az $f_0^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) deriváltjai léteznek és abszolút folytonosak, amelyre teljesülnek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó összes fő peremfeltételek, végül pedig

$$(7.4) \quad \int_a^b p_0(x) |f_0^{(n)}(x)|^2 dx < \infty.$$

Minthogy $\mathfrak{D}[\tilde{T}] = \mathfrak{D}[\tilde{T} + cI]$ ($-\infty < c < \infty$) és $\tilde{T}$ -nak a $\tilde{T} + cI$ operátorral való helyettesítése esetén a (7.3) sor a

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + c) |(f, \varphi_j)|^2$$

sorba megy át, amely a (7.3) sorral egyszerre konvergens vagy divergens, azért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\lambda_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots$). Ekkor azonban az a) és a b) állítás ekvivalenciája közvetlenül adódik a 4. lemmából (I. fejt., 4. §).

Jelölje $L(\tilde{T})$ az olyan f_0 függvények összességét, amelyenkről a c) kijelentésben szó van.

Az a), c) kijelentések ekvivalenciájának a bebizonyításához először megmutatjuk, hogy c)-ből következik a), azaz

$$L(\tilde{T}) \subset \mathfrak{D}[\tilde{T}].$$

Legyen $f \in L(\tilde{T})$. Ekkor f -re teljesül valamennyi fő peremfeltétel, és így található olyan $f_0 \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$ elem, amelyre

$$f_0^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad f_0^{(k)}(b) = f^{(k)}(b) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Ennélfogva, a 9°. állítás felhasználásával,

$$g = f - f_0 \in \mathfrak{D}[T] \subset \mathfrak{D}[\tilde{T}],$$

minthogy pedig $f_0 \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$, azért $f = g + f_0 \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$.

Most meg fogjuk mutatni, hogy a)-ból következik c), vagyis

$$(7.5) \quad \mathfrak{D}[\tilde{T}] \subset L(\tilde{T}),$$

és ezzel a 10°. állítás bizonyításának a végéhez érünk.

Az I. fejezetben szereplő 15. tétel szerint

$$\mathfrak{D}[\tilde{T}] = \mathfrak{D}[T] + \mathfrak{N}'_0, \quad \text{ahol} \quad \mathfrak{N}'_0 = \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[\tilde{T}].$$

Ebből, figyelembe véve a 9°. állítást, azt kapjuk, hogy minden $f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$ függvény abszolút folytonos, első $n-1$ számú $f^{(k)}$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) deriváltja létezik és abszolút folytonos, továbbá $f^{(n)}$ eleget tesz a (7.4) feltételnek.

Ily módon (7.5) bebizonyításához már csak azt kell megmutatnunk, hogy az $f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$ függvényre teljesülnek az összes fő peremfeltételek. Erre a célra felhasználhatjuk azt a tényt, hogy a) és b) ekvivalens egymással, és ugyanúgy okoskodva, mint a 9°. állítás bizonyítása során, igazolhatjuk, hogy (7.3) folytán érvényesek az

$$(7.6) \quad f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \varphi_j) \varphi_j^{(k)}(x) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

sorfejtések, és mindegyikük az (a, b) intervallumban abszolút és egyenletesen konvergens.

Mínt hogy mindegyik $\varphi_j(x)$ ($j=1, 2, \dots$) fundamentális függvény eleget tesz a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó teljes peremfeltétel-rendszernek és így minden fő peremfeltételnek, a (7.6) sorfejtésekből következik, hogy f -re is teljesülnek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó összes fő peremfeltételek.

A 10°. állítást bebizonyítottuk.

8. §. A $\Gamma_{\tilde{T}}(f, g)$ és a $\tilde{T}[f, g]$ funkcionálok.

Az $f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$ elemeknek a $\tilde{T}$ operátor sajátvektorai szerint haladó sorfejtései

Tekintsük a $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ halmazon a következő funkcionált²⁶:

$$(8.1) \quad \Gamma_{\tilde{T}}(f, g) = - \left[\sum_{k=1}^n f^{[2n-k]}(x) g^{[k]}(x) \right]_a^b \quad (g, f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})).$$

²⁶ Mint rendesen, $[\varphi(x)]_a^b$ a $\varphi(b) - \varphi(a)$ kifejezést jelenti.

Mínthogy

$$[f, g]_a = [f, g]_b \quad (g, f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})),$$

azért

$$(8.2) \quad \Gamma_{\tilde{T}}(f, g) = \overline{\Gamma_{\tilde{T}}(g, f)} \quad (g, f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})).$$

Ez az egyenlőség azt mutatja, hogy rögzített $g \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$ mellett a $\Gamma_{\tilde{T}}(f, g)$ funkcionált az

$$\hat{x}(f) = (f(a), \dots, f^{(n-1)}(a), f(b), \dots, f^{(n-1)}(b))$$

vektor teljesen meghatározza. Tekintettel arra, hogy ennél a megfontolásnál f és g szerepét fel lehet cserélni, azt kapjuk, hogy a $\Gamma_{\tilde{T}}(f, g)$ funkcionál értékét az $\hat{x}(f)$ és az $\hat{x}(g)$ vektor megadása teljesen meghatározza. Ezek szerint

$$(8.3) \quad \Gamma_{\tilde{T}}(f, g) = F(\hat{x}(f), \hat{x}(g)),$$

ahol $F(x, y)$ egy funkcionál, amelynek az értelmezési tartománya az összes $x, y \in \hat{\Pi}$ párokból áll (itt $\hat{\Pi}$ az a lineáris halmaz, amelyet az $\hat{x}(f), f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$ vektorok alkotnak). Mínthogy

$$\Gamma_{\tilde{T}}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) = \lambda_1 \Gamma_{\tilde{T}}(f_1, g) + \lambda_2 \Gamma_{\tilde{T}}(f_2, g) \quad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ számok}),$$

azért a (8.3) összefüggés alapján

$$1. \quad F(x, y) = \overline{F(y, x)} \quad (x, y \in \hat{\Pi});$$

$$2. \quad F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 F(x_1, y) + \lambda_2 F(x_2, y) \quad (x_1, x_2, y \in \hat{\Pi}).$$

Innen már könnyen adódik, hogy az F funkcionálhoz hozzárendelhetünk (még-hozzá végtelenül sokféleképpen, ha $\hat{\Pi}$ nem azonos az egész $\mathfrak{E}$ térrel) egy $\|\gamma_{jk}\|_1^{2n}$ hermitikus matrixot, amelyre

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_{2n}) \in \hat{\Pi}, \quad y = (\eta_1, \dots, \eta_{2n}) \in \hat{\Pi}$$

esetén

$$F(x, y) = \sum_{j,k=1}^{2n} \gamma_{jk} \xi_j \bar{\eta}_k.$$

Ekkor (8.3) értelmében tetszés szerinti $f, g \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$ elemekre igaz a következő:

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\tilde{T}}(f, g) &= \sum_{j,k=1}^n \gamma_{jk} f^{(j-1)}(a) \overline{g^{(k-1)}(a)} + \\ &+ \sum_{j,k=1}^n \gamma_{n+j,k} f^{(j-1)}(b) \overline{g^{(k-1)}(a)} + \sum_{j,k=1}^n \gamma_{j,n+k} f^{(j-1)}(a) \overline{g^{(k-1)}(b)} + \\ &+ \sum_{j,k=1}^n \gamma_{n+j,n+k} f^{(j-1)}(b) \overline{g^{(k-1)}(b)}. \end{aligned}$$

Ugyanezzel az egyenlőséggel értelmezzük a $\Gamma_{\tilde{T}}(f, g)$ kifejezést tetszés szerinti $f, g \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$ elemekre. Mínthogy a 10°. állítás értelmében az $f, g \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$ függvények eleget tesznek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó valamennyi fő peremfeltételnek, azért $\hat{x}(f), \hat{x}(g) \in \hat{\Pi}$, tehát a

$$\Gamma_{\tilde{T}}(f, g) \quad (f, g \in \mathfrak{D}[\tilde{T}])$$

funkcionál említett definíciója nem függ a $\|\gamma_{jk}\|_1^{2n}$ matrix megválasztásától.

Az (1. 7) azonosság és a (8. 1) egyenlőség folytán fennáll

$$(8. 5) \quad (\tilde{T}f, g) = \Gamma_{\tilde{T}}(f, g) + \sum_{k=0}^n \int_a^b p_{n-k}(x) f^{(k)}(x) \overline{g^{(k)}(x)} dx \\ (f, g \in \mathfrak{D}(\tilde{T})).$$

Speciálisan

$$(8. 6) \quad (\tilde{T}f, f) = \Gamma_{\tilde{T}}(f, f) + \sum_{k=0}^n \int_a^b p_{n-k}(x) |f^{(k)}(x)|^2 dx.$$

Erre a képletre sokféle célból lesz szükségünk, többek között az alábbi állítás igazolásához is.

11°. ²⁷ Ha az $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) abszolút folytonos függvény $n-1$ számú abszolút folytonos $f^{(k)}(x)$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) deriválttal rendelkezik, továbbá teljesíti a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó összes fő peremfeltételt és az

$$\int_a^b p_0(x) |f^{(n)}(x)|^2 dx < \infty$$

feltételt, akkor érvényesek az

$$(8. 7) \quad f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \varphi_j) \varphi_j^{(k)}(x) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

sorfejtések, amelyek az (a, b) intervallumban abszolút és egyenletesen konvergálnak, valamint az

$$f^{(n)}(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} (f, \varphi_j) \varphi_j^{(n)}(x)$$

sorfejtés, amely abban az értelemben konvergens, hogy

$$(8. 8) \quad \int_a^b p_0(x) |f^{(n)}(x) - \sum_{j=1}^v (f, \varphi_j) \varphi_j^{(n)}(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{ha } v \rightarrow \infty.$$

²⁷ A Hilbert—Schmidt-tétel szerint az $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) folytonos függvény az (a, b) számközben abszolút és egyenletesen konvergens

$$(1) \quad f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} (f, \varphi_v) \varphi_v(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

sorba fejthető, ha a függvényt elő lehet állítani forrásszerűen a $\tilde{T}$ operátor $G(x, s)$ Green-függvénye, vagy ha a 0 szám sajátérték, $\tilde{T}$ általánosított Green-függvénye segítségével. Ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy f deriváltjai abszolút folytonosak és eleget tesznek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó összes peremfeltételnek. Nyilvánvaló, hogy a 11°. állítás az f függvényre vonatkozó lényegesen enyhébb követelmények mellett biztosítja az abszolút és egyenletesen konvergens (1) sorfejtések létezését. A 11°. állítás általánosabb és teljesebb azoknál a sorbafejtési tételeknél is, amelyeket TREFFTZ [7] a Schmidt-féle párok elmélete segítségével nyert.

Valóban, az f függvényre tett megkötések együttesen ekvivalensek, a 10° . állítás alapján, azzal az egyetlen megkötéssel, hogy $f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$. Másrészt a 10° . állítás bebizonyítása közben megállapítottuk, hogy bármilyen $f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$ függvényre (amelyet mindig tekinthetünk folytonosnak) fennállnak az (a, b) számközben abszolút és egyenletesen konvergens (8. 7) sorfejtések.

Be kell még bizonyítani a (8. 8) összefüggést. Ennek az érdekében vezessük be az

$$f_v(x) = \sum_{j=1}^v (f, \varphi_j) \varphi_j(x) \quad (a \leq x \leq b; \quad v = 1, 2, \dots)$$

jelölést. Ekkor

$$(8.9) \quad (\tilde{T}(f_v - f_\mu), f_v - f_\mu) = \sum_{j=\mu+1}^{\infty} \lambda_j |(f, \varphi_j)|^2 \rightarrow 0, \\ \text{ha } \mu, v \rightarrow \infty.$$

Másrészt (8. 6) értelmében

$$(\tilde{T}(f_v - f_\mu), f_v - f_\mu) = \Gamma \tilde{T}(f_v - f_\mu, f_v - f_\mu) + \sum_{k=0}^n \int_a^b p_{n-k} |f_v^{(k)} - f_\mu^{(k)}|^2 dx,$$

és itt a (8. 7) sorfejtések egyenletes konvergenciája miatt

$$\lim_{\mu, v \rightarrow \infty} \Gamma \tilde{T}(f_v - f_\mu, f_v - f_\mu) = 0, \\ \lim_{\mu, v \rightarrow \infty} \int_a^b p_{n-k} |f_v^{(k)} - f_\mu^{(k)}|^2 dx = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Ennélfogva

$$\lim_{\mu, v \rightarrow \infty} \int_a^b p_0 |f_v^{(n)} - f_\mu^{(n)}|^2 dx = 0.$$

Következésképpen, a Riesz—Fischer-tétel szerint, található olyan $\varphi(x)$ ($a \leq x \leq b$) mérhető függvény, amelyre

$$(8.10) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^b p_0 |\varphi - f_v^{(n)}|^2 dx = 0.$$

Ekkor tekintettel arra, hogy

$$\left| \int_a^x \varphi(x) dx - f_v^{(n-1)}(x) + f_v^{(n-1)}(a) \right| \leq \int_a^x |\varphi(x) - f_v^{(n)}(x)| dx \leq \\ \leq \sqrt{\int_a^b \frac{dx}{p_0(x)}} \sqrt{\int_a^b p_0(x) |\varphi(x) - f_v^{(n)}(x)|^2 dx} \quad (a \leq x \leq b; \quad v = 1, 2, \dots),$$

fennáll

$$\begin{aligned} & \int_a^x \varphi(x) dx - f^{(n-1)}(x) + f^{(n-1)}(a) = \\ & = \lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^x \varphi(x) dx - f_v^{(n-1)}(x) + f_v^{(n-1)}(a) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Ily módon $\varphi = f^{(n)}$, és (8. 10) azt fejezi ki, hogy érvényes a (8. 8) összefüggés. Az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy mivel $f_v \rightarrow f$ és igazak a (8. 9) alatti egyenlőségek, azért $\tilde{T}[f, f]$ definíciója szerint (lásd I. fejezet, 4. §)

$$(8. 11) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} (\tilde{T}f_v, f_v) = \tilde{T}[f, f].$$

Másrészt a (8. 7) sorfejtések egyenletes konvergenciája és a (8. 10) egyenlőség miatt, amelyben $\varphi = f^{(n)}$, fennáll

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \Gamma_{\tilde{T}}(f_v, f_v) = \Gamma_{\tilde{T}}(f, f)$$

és

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^b p_{n-k} |f_v^{(k)}|^2 dx = \int_a^b p_{n-k} |f^{(k)}|^2 dx \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Tehát ha a $(\tilde{T}f_v, f_v)$ kifejezést a (8. 6) képlet segítségével írjuk fel, akkor (8. 11) alapján könnyen nyerjük, hogy

$$(8. 12) \quad \tilde{T}[f, f] = \Gamma_{\tilde{T}}(f, f) + \sum_{k=0}^n \int_a^b p_{n-k} |f^{(k)}|^2 dx \quad (f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]).$$

Innen ismert gondolatmenettel következik, hogy általában

$$(8. 13) \quad \tilde{T}[f, g] = \Gamma_{\tilde{T}}(f, g) + \sum_{k=0}^n \int_a^b p_{n-k} f^{(k)} \overline{g^{(k)}} dx \quad (f, g \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]).$$

9. §. A $\tilde{T}$ operátor negatív sajátértékeinek a száma

Ebben a paragrafusban azt az esetet fogjuk vizsgálni, amikor a T operátor szigorúan pozitív.

1. A T operátort akkor mondjuk szigorúan pozitívnak, ha

$$(9. 1) \quad T[f, f] > 0 \quad (f \in \mathfrak{D}[T], f \neq 0).$$

Minthogy $\tilde{T}_\infty$ megegyezik a T operátor T_μ durva folytatásával, azért a 10. tétel és a 4. lemma (I. fej., 4. §) értelmében $\mathfrak{D}[T] = \mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty]$ és

$$T[f, f] = \tilde{T}_\infty[f, f] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{(\infty)} |(f, \varphi_j)|^2 \quad (f \in \mathfrak{D}[T]),$$

ahol $\{\varphi_j\}$ a $\tilde{T}_\infty$ operátor sajátvektoraiból álló teljes ortonormális rendszer és $\tilde{T}_\infty \varphi_j = \lambda_j^{(\infty)} \varphi_j$ ($j=1, 2, \dots$; $\lambda_1^{(\infty)} \leq \lambda_2^{(\infty)} \leq \dots$).

Ilyen módon a T operátor akkor lesz szigorúan pozitív, ha $\tilde{T}_\infty$ mindegyik $\lambda_j^{(\infty)}$ ($j=1, 2, \dots$) sajátértéke pozitív, következésképpen

$$(\tilde{T}_\infty f, f) > 0, \quad \text{ha } f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}_\infty), \quad f \neq 0.$$

Mivel a $\Gamma \tilde{T}_\infty$ funkcionál azonosan nullával egyenlő, a (8. 6) képlet értelmében annak a feltételét, hogy a T operátor szigorúan pozitív legyen, a

$$\sum_{k=0}^n \int_a^b p_{n-k}(x) |f^{(k)}(x)|^2 dx > 0$$

alakban lehet felírni, ahol az egyenlőtlenségnek minden olyan $f \neq 0$ függvényre teljesülnie kell, amelynek az $f^{(k)}$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) deriváltjai léteznek és abszolút folytonosak,

$$\int_a^b p_0(x) |f^{(n)}(x)|^2 dx < \infty$$

és

$$(9.2) \quad f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

Speciálisan megállapíthatjuk, hogy a T operátor szigorú pozitivitásához *elég-séges*, hogy a p_k ($k=0, 1, \dots, n$) függvények mindannyian nem-negatívak legyenek²⁸.

Az I. fejezet 19. tételéből és a 10°. állításból közvetlenül adódik az alábbi állítás.

12°. Ha T szigorúan pozitív operátor, akkor a $\tilde{T}$ önadjungált folytatás negatív sajátértékeinek a pontos száma²⁹ megegyezik a

$$(9.3) \quad \sum_{j,k=1}^r \tilde{T}[\varphi_j, \varphi_k] \zeta_j \bar{\zeta}_k$$

alakban fellépő negatív négyzetek számával, ahol $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r\}$ valamilyen bázis a $\varphi^{[2n]}=0$ egyenlet azon $\varphi(\in \mathfrak{D}^*)$ megoldásainak a halmazában, amelyek eleget tesznek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó összes fő peremfeltételnek.

Mutassuk meg, hogy

$$(9.4) \quad r = 2n - d,$$

ahol d a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó lineárisan független fő peremfeltételek száma.

A T operátor szigorúan pozitív lévén a $\varphi^{[2n]}=0$ egyenlet megoldásainak az $\mathfrak{H}_0$ halmazából vett tetszés szerinti $\varphi \neq 0$ elemre az $\hat{x}(\varphi)$ vektor (amelyet a 8. § elején

²⁸ Be lehet bizonyítani (lásd [2], 1. tétel), hogy a T operátor szigorú pozitivitásának a szükséges és elégséges feltétele a következő: legyen $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m\}$ bázis az (1.6) egyenlet $\varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(b) = 0$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) peremfeltételeknek eleget tevő φ megoldásainak a halmazában; ekkor $m=n$ és $\det |\chi_j^{(k-1)}(x)|$ ($j, k=1, 2, \dots, n$) különbözik nullától minden $a < x < b$ érték esetén.

²⁹ A $\tilde{T}$ operátor negatív sajátértékeinek a pontos számán az operátor egymástól különböző negatív sajátértékeihez tartozó multiplicitások összegét értjük.

definiáltunk) nem nulla (ugyanis $\hat{x}(\varphi) = 0$ esetén $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{T}_\infty)$). Tehát minden $\varphi \in \mathfrak{N}_0$ elemnek megfelelően az $\hat{x}(\varphi) \in \hat{\mathcal{E}}$ vektort, a $2n$ -dimenziós $\mathfrak{N}_0$ térnek a $2n$ -dimenziós $\hat{\mathcal{E}}$ térre való kölcsönösen egyértelmű leképezését kapjuk. Másrészt az a követelmény, hogy φ -re teljesüljenek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó összes fő peremfeltételek, azt jelenti, hogy az $\hat{x}(\varphi)$ vektorok egy $(2n-d)$ -dimenziós $\hat{\Pi} \subset \hat{\mathcal{E}}$ altérhez tartoznak, amelyet d számú lineáris egyenlet határoz meg. Ebből következik a (9. 4) összefüggés.

2. Megmutatjuk, hogyan számítható ki a $\tilde{T}[\varphi_j, \varphi_k]$ ($j, k = 1, 2, \dots, r$) kifejezés a Γ funkcionálok segítségével.

Legyen $\{\Phi_1, \dots, \Phi_{2n}\}$ valamilyen bázis az (1. 6) egyenlet φ megoldásaiból álló $\mathfrak{N}_0$ halmazban. Ha a (2. 2) Lagrange—Green-féle azonosságban elvégezzük az $f = \Phi_j$, $g = \Phi_k$ ($j, k = 1, 2, \dots, 2n$) helyettesítést, akkor a következőt kapjuk:

$$(9. 5) \quad [\Phi_j, \Phi_k]_a^b = 0.$$

Tekintsük az

$$(9. 6) \quad [f, \Phi_j]_a^b = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n)$$

peremfeltétel-rendszert. Nem nehéz meggyőződni róla, hogy ezek a peremfeltételek lineárisan függetlenek és önadjungált rendszert alkotnak (akár pozitív a T operátor, akár nem). Csakugyan, ha feltesszük, hogy a (9. 6) peremfeltételek lineárisan összefüggnek, akkor található olyan $\Phi = c_1 \Phi_1 + \dots + c_{2n} \Phi_{2n} \neq 0$ függvény, amelyre tetszés szerinti $f \in \mathcal{D}^*$ esetén fennáll az

$$[f, \Phi]_a^b = 0$$

egyenlőség. A (2. 2) azonosság alapján ebből következik:

$$\int_a^b f^{[2n]} \bar{\Phi} dx = 0 \quad (f \in \mathcal{D}^*),$$

és ez nyilvánvalóan ellentmondásban van az 1^o. állítással.

Hátra van még annak az igazolása, hogy a (9. 6) rendszerre teljesülnek a (3. 8) önadjungáltsági feltételek. Könnyű azonban belátni, hogy ezek a jelen esetben a (9. 5) összefüggésekre redukálódnak.

Most jelölje $\tilde{T}_0$ ³⁰ a T operátornak azt az önadjungált folytatását, amely a (9. 6) peremfeltétel-rendszernek felel meg.

A minket érdeklő esetben, amikor T szigorúan pozitív operátor, a (9. 6) egyenlet-rendszert meg lehet oldani a magas rendszámú $f^{[k]}(a)$ és $f^{[k]}(b)$ ($k = n, n+1, \dots, \dots, 2n-1$) kvázi-deriváltakra. Valóban, a (9. 6) egyenletrendszerben ezekhez a kvázi-

³⁰ Megemlítjük, hogy mivel (9.5) értelmében $\Phi_j \in \mathcal{D}(\tilde{T}_0)$ ($j = 1, 2, \dots, 2n$) és

$$\tilde{T}_0 \Phi_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n),$$

azért a 13. tétel (I. fejt., 5. §) szerint $\tilde{T}_0$ azonos a T operátor T_M finom folytatásával (ha T pozitív operátor).

deriváltakhoz tartozó együtthatók matrixa

$$(9.7) \quad \begin{vmatrix} \Phi_1(a), \Phi'_1(a), \dots, \Phi_1^{(n-1)}(a), \Phi_1(b), \Phi'_1(b), \dots, \Phi_1^{(n-1)}(b) \\ \dots \\ \Phi_{2n}(a), \Phi'_{2n}(a), \dots, \Phi_{2n}^{(n-1)}(a), \Phi_{2n}(b), \Phi'_{2n}(b), \dots, \Phi_{2n}^{(n-1)}(b) \end{vmatrix}$$

és ennek a determinánsa nem nulla, mert a matrix sorait rendre az $\hat{x}(\Phi_1), \dots, \hat{x}(\Phi_n)$ vektorok alkotják, amelyek lineárisan függetlenek ($\hat{x}(\Phi) \neq 0$, ha $\Phi \neq 0$). Megoldva a (9.6) egyenletrendszert az $f^{(k)}(a)$ és $f^{(k)}(b)$ ($k=n, n+1, \dots, 2n-1$) deriváltakra, a (9.6) peremfeltétel-rendszert a következő alakra hozhatjuk:

$$(9.8) \quad f^{[2n-j-1]}(a) - \sum_{k=1}^n a_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(a) - \sum_{k=1}^n c_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(b) = 0, \\ (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$f^{[2n-j-1]}(b) + \sum_{k=1}^n d_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(a) + \sum_{k=1}^n b_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(b) = 0,$$

ahol (lásd a 158. oldal (3.12) képletét és utolsó sorát)

$$a_{jk}^{(M)} = \overline{a_{kj}^{(M)}}, \quad b_{jk}^{(M)} = \overline{b_{kj}^{(M)}}, \quad c_{jk}^{(M)} = \overline{d_{kj}^{(M)}} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

A (9.8) és a (8.1) képlet alapján azt kapjuk, hogy tetszés szerinti $g, f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}_0)$, tehát tetszés szerinti $g, f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}_0]$ esetén is fennáll a

$$(9.9) \quad \Gamma_{\tilde{T}_0}(f, g) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(a) \overline{g^{(j-1)}(a)} + \sum_{j,k=1}^n c_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(b) \overline{g^{(j-1)}(a)} + \\ + \sum_{j,k=1}^n d_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(a) \overline{g^{(j-1)}(b)} + \sum_{j,k=1}^n b_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(b) \overline{g^{(j-1)}(b)}$$

egyenlőség. Minthogy (8.5) értelmében a

$$\Gamma_{\tilde{T}}(\varphi_j, \varphi_k) - \Gamma_{\tilde{T}_0}(\varphi_j, \varphi_k), \quad \tilde{T}[\varphi_j, \varphi_k] - \tilde{T}_0[\varphi_j, \varphi_k] \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

különbségek egyenlők egymással, továbbá

$$\tilde{T}_0[\varphi_j, \varphi_k] = (\tilde{T}_0 \varphi_j, \varphi_k) = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, r),$$

arra a következtetésre jutunk, hogy

$$(9.10) \quad \tilde{T}[\varphi_j, \varphi_k] = \Gamma_{\tilde{T}}(\varphi_j, \varphi_k) - \Gamma_{\tilde{T}_0}(\varphi_j, \varphi_k) \quad (j, k = 1, 2, \dots, r).$$

Az alábbi állítás a 12°. állítás és a (9.10) képletek folyománya.

13°. Ha az

$$(9.11) \quad \begin{cases} f^{(2n)} - \lambda f = 0 \\ f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0 \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

peremérték-feladat mindegyik karakterisztikus értéke pozitív, akkor az

$$(9.12) \begin{cases} f^{[2n]} - \lambda f = 0, \\ f^{[2n-j-1]}(a) - \sum_{k=1}^n a_{jk} f^{(k-1)}(a) - \sum_{k=1}^n c_{jk} f^{(k-1)}(b) = 0, \\ f^{[2n-j-1]}(b) + \sum_{k=1}^n d_{jk} f^{(k-1)}(a) + \sum_{k=1}^n b_{jk} f^{(k-1)}(b) = 0 \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

peremérték-feladat negatív karakterisztikus értékeinek a pontos száma, ha csak teljesülnek az

$$(9.13) \quad a_{jk} = \bar{a}_{kj}, \quad c_{jk} = \bar{d}_{kj}, \quad b_{jk} = \bar{b}_{kj} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

önadjungáltsági feltételek, megegyezik a

$$(9.14) \quad \sum_{j,k=1}^n (a_{jk} - a_{jk}^{(M)}) \xi_j \bar{\xi}_k + 2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{j,k=1}^n (c_{jk} - c_{jk}^{(M)}) \xi_j \bar{\eta}_k \right\} + \sum_{j,k=1}^n (b_{jk} - b_{jk}^{(M)}) \eta_j \bar{\eta}_k$$

hermitikus alakban előforduló negatív négyzetek számával.

Valóban, az hogy a (9. 11) peremérték-feladat karakterisztikus értékei pozitívak, éppen azt jelenti, hogy a T operátor szigorúan pozitív. Ennélfogva a (9. 12) feladatban szereplő peremfeltételekhez tartozó $\tilde{T}$ önadjungált operátorra alkalmazható a 12°. állítás. Másrészt mivel a $\tilde{T}$ operátorhoz nem tartozik egyetlen fő peremfeltétel sem, azért a 10°. állítás értelmében $\Phi_j \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$ ($j = 1, 2, \dots, 2n$), következésképpen a vizsgált esetben $r = 2n$, és így a (9. 3) alak felírásánál élhetünk a $\varphi_j = \Phi_j$ ($j = 1, 2, \dots, 2n$) választással. Ezek szerint a (9. 12) peremérték-feladathoz tartozó negatív karakterisztikus értékek pontos száma egyenlő a $\tilde{T}[\Phi, \Phi]$ alakban fellépő negatív négyzetek számával, ahol

$$\Phi = \zeta_1 \Phi_1 + \zeta_2 \Phi_2 + \dots + \zeta_n \Phi_n.$$

Másrészt tekintettel arra, hogy (9. 10) értelmében

$$\tilde{T}[\Phi, \Phi] = \Gamma_{\tilde{T}}(\Phi, \Phi) - \Gamma_{\tilde{T}_0}(\Phi, \Phi)$$

és hogy $\Gamma_{\tilde{T}}$ a $\Gamma_{\tilde{T}_0}$ -ra vonatkozó (9. 9) képlettel analóg képlet segítségével számítható ki, $\tilde{T}[\Phi, \Phi]$ megegyezik a (9. 3) alakkal, amelyben

$$\begin{aligned} \xi_k &= \Phi^{(k-1)}(a) = \sum_{j=1}^{2n} \zeta_j \Phi_j^{(k-1)}(a), \\ \eta_k &= \Phi^{(k-1)}(b) = \sum_{j=1}^{2n} \zeta_j \Phi_j^{(k-1)}(b). \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Ez a ζ változókat a ξ, η változókba átvivő transzformáció nem szinguláris (a (9. 7) matrix nem szinguláris), és ezzel a 13°. állítást bebizonyítottuk.

Másképpen és egyúttal egészen egyszerűen képezhető a (9. 3) alak abban az esetben, amikor ismeretes a $\tilde{T}$ operátor $G(x, s)$ Green-függvénye (és így a 0 szám

a $\tilde{T}$ operátornak nem sajátértéke). Minthogy ezzel kapcsolatban fény derül néhány érdekes részletre, megmutatjuk, hogyan történik ez.

Tisztázzuk először, hogy az

$$U(f) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f^{(k-1)}(a) + \sum_{k=1}^n \beta_k f^{(k-1)}(b)$$

alakú $U(f)$ perem-funkcionál milyen feltételek mellett generál a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó $U(f)=0$ fő peremfeltételt.

Ehhez megjegyezzük, hogy a $\tilde{T}$ operátor $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ értelmezési tartománya, azonos lévén a $\tilde{T}^{-1}$ operátor értékkészletével, mindazokból az f elemekből áll, amelyek előállíthatók

$$f(x) = \int_a^b G(x, s) h(s) ds \quad (h \in L_2(a, b))$$

alakban. Minthogy ekkor

$$U(f) = \int_a^b U(G(x, s)) h(s) ds,$$

nyilvánvaló, hogy az $U(f)=0$ feltétel akkor és csak akkor lesz a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó fő peremfeltétel, ha az s változóban azonosan fennáll³¹ az

$$U(G(x, s)) = \sum_{k=1}^n \alpha_k G_{k-1,0}(a, s) + \sum_{k=1}^n \beta_k G_{k-1,0}(b, s) \equiv 0 \\ (a \leq s \leq b)$$

egyenlőség. Ezek szerint a

$$G_{k,0}(a, s), \quad G_{k,0}(b, s) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

függvények között található $r = 2n - d$ számú, az (a, b) intervallumban lineárisan független függvény, de több nem található.

A $G(x, s)$ mag hermitikus lévén, ugyanezt állíthatjuk a

$$(9.15) \quad G_{0k}(x, a), \quad G_{0k}(x, b) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

függvényekről.

Másrészt tetszés szerinti $s \in (a, b)$ érték mellett $G(x, s)$ mint x függvénye eleget tesz az összes fő peremfeltételnek, továbbá a $G_{jk}(x, s)$ ($j, k = 0, 1, \dots, n-1$) függvények mindannyian folytonosak, tehát a (9.15) függvények is eleget tesznek a fő peremfeltételeknek.

Következésképpen a

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k G_{0k}(x, a) + \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k G_{0k}(x, b) \quad (a \leq x \leq b)$$

alakú Φ függvények r -dimenziós lineáris halmaza megegyezik a

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^r \zeta_j \varphi_j(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

³¹ Itt felhasználjuk az (5.8) jelöléseket.

alakú Φ függvények lineáris halmazával, ahol φ_j ($j=1, 2, \dots, r$) a 12° . állításban definiált függvények. Ebből nyerjük:

$$\begin{cases} G_{0k}(x, a) = \sum_{j=1}^r c_{jk} \varphi_j(x), \\ (a \leq x \leq b; \quad k = 0, 1, \dots, n-1), \\ G_{0k}(x, b) = \sum_{j=1}^r c_{j, n+k} \varphi_j(x), \end{cases}$$

ahol $\|c_{jk}\|$ ($j=1, 2, \dots, r; k=0, 1, \dots, 2n-1$) r -ed rangú téglalap alakú matrix. Ennélfogva

$$(9.16) \quad \tilde{T} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k G_{0k}(x, a) + \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k G_{0k}(x, b), \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k G_{0k}(x, a) + \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k G_{0k}(x, b) \right] =$$

$$= \tilde{T} \left[\sum_{j=1}^r \zeta_j \varphi_j, \sum_{j=1}^r \zeta_j \varphi_j \right] = \sum_{j,k=1}^r T[\varphi_j, \varphi_k] \zeta_j \bar{\zeta}_k,$$

ahol

$$(9.17) \quad \zeta_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_{jk} \xi_k + \sum_{k=0}^{n-1} c_{j, n+k} \eta_k \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

Számítsuk ki a (9.16) bal oldalán álló alak együtthatóit. Ebből a célból megjegyezzük, hogy (5.9) értelmében

$$G_{0k}(x, s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(x) \overline{\varphi_j^{(k)}(s)}}{\lambda_j} \quad (a \leq x, s \leq b);$$

másrészt a 4. lemma szerint (I. fejt., 4. §) fennáll

$$\tilde{T}[f, g] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f, \varphi_j) \overline{(g, \varphi_j)} \quad (g, f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]).$$

Ennélfogva

$$\tilde{T}[G_{0j}(x, s), G_{0k}(x, t)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^{(j)}(s) \overline{\varphi_i^{(k)}(t)}}{\lambda_i} = G_{jk}(s, t)$$

$$(a \leq s, t \leq b; \quad j, k = 0, 1, \dots, n-1),$$

tehát a (9.16) bal oldalán álló alak felírható a következőképpen:

$$(9.18) \quad \sum_{j,k=0}^{n-1} G_{jk}(a, a) \zeta_j \bar{\zeta}_k + 2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{j,k=0}^{n-1} G_{jk}(a, b) \zeta_j \bar{\eta}_k \right\} + \sum_{j,k=0}^{n-1} G_{jk}(b, b) \eta_j \bar{\eta}_k.$$

Minthogy ez az alak a (9.3) alakból keletkezik a (9.17) transzformáció segítségével, amelynek a matrixa r -ed rangú, a 12° . állítás alapján igaz a következő.

14° . Ha T szigorúan pozitív operátor, $\tilde{T}$ pedig T olyan önadjungált folytatása, amelynek van $G(x, s)$ Green-függvénye, akkor a $\tilde{T}$ operátor negatív sajátértékeinek a pontos száma megegyezik a (9.18) alakban előforduló negatív négyzetek számával.

Valóban, mivel feltettük, hogy a 0 szám nem sajátérték, azért a (9. 3) alak nem szinguláris, tehát a (9. 18) alak rangja r .

Válasszuk most meg a $c_j = a, b$ ($j = 1, 2, \dots, r$) és a $q_j = 0, 1, \dots, n-1$ ($j = 1, 2, \dots, r$) számokat úgy, hogy a megfelelő determináns ne legyen nulla:

$$\Delta = |G_{q_j q_k}(c_j, c_k)|_{j,k=1}^r \neq 0.$$

Ekkor a (9. 18) alak ekvivalens a

$$\sum_{j,k=1}^r G_{q_j q_k}(c_j, c_k) \zeta_j \bar{\zeta}_k$$

alakkal, mert a

$$\varphi_j(x) = G_{0, q_j}(x, 0) \quad (a \leq x \leq b; \quad j = 1, 2, \dots, r)$$

választás esetén a két alak azonos.

Az (I. fejj., 5. §) 12. tétel és az I. fejezet (6. 22), (6. 23) képletei alapján kimondhatjuk, hogy a $\tilde{T}_\infty$ operátor $G_\infty(x, s)$ Green-függvénye a $G(x, s)$ Green-függvényből az alábbi képlettel nyerhető:

$$(9. 19) \quad G_\infty(x, s) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} G(x, s) & G_{q_1, 0}(c_1, s) \dots G_{q_r, 0}(c_r, s) \\ G_{0, q_1}(x, c_1) & \\ \vdots & \\ G_{0, q_r}(x, c_r) & \end{vmatrix} \quad \Delta$$

Ezt az összefüggést közvetlenül is le lehet vezetni (lásd [2], 7. tétel) és ekkor a 14°. állítás az I. fejezetben szereplő 20. tétel következményeként adódik.

10. §. Peremérték-feladatok karakterisztikus értékeire vonatkozó korlátok

Mint hogy a 9°. állítás értelmében a $\tilde{T}_\infty$ operátor mindig azonos a T operátor T_μ durva folytatásával, a 9. §-ban definiált $\tilde{T}_0$ operátor pedig megegyezik a T operátor T_M finom folytatásával (hacsak T szigorúan pozitív operátor), azért az (I. fejezet 8. §-ban ismertetett) 24. és 25. tételnek, továbbá a 8. 1., 8. 2. megjegyzéseknek a tekintett T kvázi-differenciáloperátorra való egyszerű átfogalmazásával a következő állításra jutunk.

15°. Legyenek $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ az

$$(10. 1) \quad \begin{aligned} & f^{[2n]} - \lambda f = 0, \\ & \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n) \end{aligned}$$

önadjungált peremérték-feladat egymás után következő karakterisztikus értékei, $\lambda_1^{(\infty)} \leq \lambda_2^{(\infty)} \leq \lambda_3^{(\infty)} \leq \dots$ pedig a megfelelő

$$f^{[2n]} - \lambda f = 0,$$

$$f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n-1)$$

„durva” peremérték-feladat egymás után következő karakterisztikus értékei.

Ekkor

$$\lambda_j \leq \lambda_j^{(\infty)} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Ezenkívül ha $\lambda_1 \geq 0$, akkor fennállnak a

$$\lambda_j \geq \lambda_j^{(0)} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

egyenlőtlenségek is, ahol $\lambda_1^{(0)} \leq \lambda_2^{(0)} \leq \lambda_3^{(0)} \leq \dots$ az

$$f^{[2n]} - \lambda f = 0,$$

$$[f, \Phi_j]_a^b = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n)$$

„finom” peremérték-feladat egymás után következő sajátértékei.

Emlékeztetünk arra is, hogy a 8. 1. megjegyzés értelmében (I. fej.)

$$\lambda_j^{(\infty)} \leq \lambda_{j+2n}^{(0)} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Ha pedig felhasználjuk a G és a $G^{(\infty)}$ Green-függvény között fennálló (9.19) összefüggést, akkor meggyőződhetünk róla, hogy

$$\lambda_j^{(\infty)} \leq \lambda_{j+2n-d},$$

ahol d a (10. 1) feladathoz tartozó fő peremfeltételek száma³².

Ismertetünk még egy, az előbbivel megegyező típusú állítást.

16°. Legyenek $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ az

$$(10. 2') \quad f^{[2n]} - \lambda f = 0,$$

$$(10. 2'') \quad \sum_{k=1}^{2n} a_{jk} f^{[k-1]}(a) = \sum_{k=1}^{2n} b_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

önadjungált peremérték-feladat egymás után következő karakterisztikus értékei, $\lambda_1^{(a)} \leq \lambda_2^{(a)} \leq \lambda_3^{(a)} \leq \dots$ pedig az

$$(10. 3') \quad f^{[2n]} - \lambda f = 0,$$

$$(10. 3'') \quad f^{(j-1)}(a) = \sum_{k=1}^{2n} b_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

peremérték-feladat egymás után következő karakterisztikus értékei.

Ekkor

$$(10. 4) \quad \lambda_j \leq \lambda_j^{(a)} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Ha ezenkívül $\lambda_1 \geq 0$, akkor az is igaz, hogy

$$(10. 5) \quad \lambda_j \geq \lambda_{ja} \quad (j = 1, 2, \dots),$$

³² Vagyis $d = 2n - r$, ahol r a (7.2) matrix rangja.

ahol $\lambda_{1a} \leq \lambda_{2a} \leq \lambda_{3a} \leq \dots$ az

$$(10.6') \quad f^{[2n]} - \lambda f = 0,$$

$$(10.6'') \quad [f, \chi_j]_a = \sum_{k=1}^{2n} b_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

peremérték-feladat egymás után következő sajátértékei; itt $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ a

$$(10.7') \quad \varphi^{[2n]} = 0,$$

$$(10.7'') \quad \sum_{k=1}^{2n} b_{jk} \varphi^{[k-1]}(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

feladat n számú lineárisan független $\varphi(\in \mathfrak{D}^*)$ megoldását jelenti.

Valóban, tekintsük azt a $T^{(a)}$ operátort, amelynek a $\mathfrak{D}(T^{(a)})$ értelmezési tartománya azokból az $f \in \mathfrak{D}^*$ elemekből áll, amelyekre

$$f^{[j]}(a) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, 2n-1),$$

$$\sum_{k=1}^{2n} b_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

és legyen $T^{(a)}f = f^{[2n]}$ ($f \in \mathfrak{D}(T^{(a)})$). Könnyen belátható, hogy $T^{(a)}$ hermitikus operátor és a T operátornak folytatása.

A (10.3) peremfeltételekhez tartozó $\tilde{T}_{\infty}^{(a)}$ operátor a $T^{(a)}$ operátor önadjungált folytatása. Nem nehéz belátni, hogy $T^{(a)}$ bármely másik $\tilde{T}^{(a)}$ önadjungált folytatása, egyidejűleg a T operátornak is önadjungált folytatása lévén, egy (10.2) alakú önadjungált peremfeltétel-rendszernek fog megfelelni.

A 10° . állítás segítségével nehézség nélkül adódik, hogy a $T^{(a)}$ operátor tetszés szerinti $\tilde{T}^{(a)}$ önadjungált folytatására

$$\mathfrak{D}[\tilde{T}_{\infty}^{(a)}] \subset \mathfrak{D}[\tilde{T}^{(a)}]$$

A 10. tétel értelmében (I. fejj., 4. §) ez azt jelenti, hogy $\tilde{T}_{\infty}^{(a)}$ a $T^{(a)}$ operátor durva folytatása, és ebből következik (10.4).

Ha $\lambda_1 > 0$, akkor $\lambda_j^{(a)} > 0$ ($j = 1, 2, \dots$). Így a (10.7) rendszer φ megoldásainak az $\mathfrak{N}$ összessége n -dimenziós (mert ha $\mathfrak{N}$ dimenziója ennél nagyobb volna, a (10.3) peremérték-feladatnak a $\lambda = 0$ szám is karakterisztikus értéke lenne). Legyen $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n)$ bázis az $\mathfrak{N}$ halmazban. A

$$[\chi_j, \chi_k]_a = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

összefüggések segítségével igazolható, hogy a (10.6'') peremfeltétel-rendszer önadjungált. Továbbá ugyanezen összefüggések folytán mindegyik $\chi \in \mathfrak{N}$ függvény a (10.6) feladat megoldása a $\lambda = 0$ esetben. A 13. tétel értelmében (I. fejj., 5. §) ez azt jelenti, hogy a (10.6'') peremfeltételekhez tartozó $\tilde{T}_0^{(a)}$ operátor a $\tilde{T}^{(a)}$ operátor finom folytatása, ebből pedig következik (10.5).

A 16° . állítást bebizonyítottuk.

A (10.2) peremérték-feladat negatív karakterisztikus értékeinek a pontos számára vonatkozóan az alábbi megjegyzéseket tehetjük.

Ha $T^{(a)}$ szigorúan pozitív operátor ($\lambda_1^{(a)} > 0$), akkor ennek a számnak a meghatározására a 12° . állításban megfogalmazottnál egyszerűbb szabályt alkalmazhatunk, nevezetesen ez a szám megegyezik a (9. 3) alakban fellépő negatív négyzetek számával, ahol a $\tilde{T}$ operátor a (10. 2'') peremfeltételeknek felel meg, $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r\}$ pedig valamilyen bázis a (10. 7) rendszer azon megoldásainak a halmazában, amelyek eleget tesznek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó, csak az a végpontra vonatkozó összes fő peremfeltételnek. Ebben az esetben a (10. 2) peremérték-feladat negatív karakterisztikus értékeinek a pontos számát még másképpen is meg lehet határozni, ti. a $\tilde{T}$ operátor $G(x, s)$ Green-függvénye segítségével (hacsak ez létezik, azaz $\lambda_1 > 0$). Nem nehéz megmutatni, hogy most ez a szám megegyezik nemcsak a (9. 18) alakban, hanem az egyszerűbb

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} G_{jk}(a, a) \xi_j \bar{\xi}_k$$

alakban fellépő negatív négyzetek számával is.

11. §. Az eddigi eredmények egy általánosítása

Legyen $\sigma(x) = \sigma(x-0)$ ($a \leq x \leq b$) növekedő függvény. Jelöljük $L_2(\sigma)$ -val mindazoknak az $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) komplex értékű függvényeknek a lineáris halmazát, amelyek a σ függvényre vonatkozóan mérhetőek (σ -mérhetőek) és amelyekre

$$\int_a^b |f(x)|^2 d\sigma(x) < \infty.$$

Ha az $L_2(\sigma)$ -beli f, g elemek skaláris szorzatát az

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} d\sigma(x)$$

egyenlőséggel értelmezzük, akkor $L_2(\sigma)$ Hilbert-térre válik.

Az összes korábbi megfontolásokat el lehet végezni úgy is, hogy $L_2(a, b)$ helyett az $L_2(\sigma)$ teret vesszük alapul, ekkor azonban a T operátort az alábbi módon kell definiálni.

Jelölje $\mathfrak{D}^*$ azoknak az $f \in L_2(\sigma)$ függvényeknek a halmazát, amelyeknek az $f^{[k]}$ ($k=0, 1, \dots, 2n-1$) kvázi-deriváltjai léteznek és abszolút folytonosak, amelyekhez továbbá található olyan $h \in L_2(\sigma)$ elem, hogy

$$(11.1) \quad \int_a^x h d\sigma = f^{[2n-1]}(a) - f^{[2n-1]}(x) + \int_a^x p_n f dx \quad (a \leq x \leq b).$$

Így a $\sigma(x) \equiv x$ esetben (11. 1) mindkét oldalát differenciálva azt kapjuk, hogy $h = f^{[2n]}$. Ha a σ függvény abszolút folytonos,

$$(11.2) \quad \sigma(x) = \int_a^x \varrho(x) dx \quad (a \leq x \leq b),$$

akkor az (a, b) számközben majdnem mindenütt

$$h = \frac{1}{\varrho} f^{[2n]}.$$

Nilvánvaló, hogy mindegyik $f \in \mathfrak{D}^*$ elemnek csak egy olyan h függvény felel meg, amelyre teljesül a (11. 1) feltétel; legyen definícióképpen

$$h = T^*f.$$

Ekkor nem nehéz megmutatni, hogy bármelyik $g, h \in L_2(\sigma)$ elempárra érvényes lesz az (1. 8) *Lagrange*-féle azonosságot helyettesítő

$$(11. 3) \quad \int_a^x (T^*f \bar{g} - f \overline{T^*g}) d\sigma = [f, g]$$

azonosság.

Most jelöljük $\mathfrak{D}(T)$ -vel azoknak az $f \in \mathfrak{D}^*$ elemeknek a halmazát, amelyekre

$$f^{[k]}(a) = f^{[k]}(b) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1),$$

és értelmezzük a T operátort a

$$Tf = T^*f \quad (f \in \mathfrak{D}(T))$$

képlettel. Ekkor a (11. 3) azonosság³³ segítségével be lehet bizonyítani, hogy T hermitikus operátor az $L_2(\sigma)$ térben mindenütt sűrű $\mathfrak{D}(T)$ értelmezési tartománnyal és $(2n, 2n)$ defektus-indexszel, T^* pedig a T operátor adjungáltja.

Nem nehéz megmutatni, hogy az ilyen módon definiált T operátorra az 1° – 16° . állítások valamennyien érvényben maradnak, ha az $f^{[2n]}$ kifejezést mindenütt, ahol előfordul, a T^*f kifejezéssel helyettesítjük.

Tekintsünk egy

$$T^*f - \lambda f = 0,$$

(11. 4)

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n)$$

alakú önadjungált peremérték-feladatot. Tegyük fel, hogy ha ebben a feladatban a T^*f kifejezést az $f^{[2n]}$ kifejezéssel helyettesítjük, olyan peremérték-feladatot kapunk, amelynek a 0 szám nem karakterisztikus értéke, és legyen $G(x, \xi)$ az ehhez a feladathoz tartozó *Green*-függvény. Ekkor kiderül, hogy a (11. 4) peremérték-feladat ekvivalens a következő súlyozott integrálegyenlettel:

$$f(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\sigma(\xi) = 0.$$

Ebből nem nehéz levezetni (lásd [2], 1059. oldal), hogy a tett feltevés mellett a peremérték-feladat negatív karakterisztikus értékeinek a pontos száma nem függ a $\sigma(x)$ függvény megválasztásától.

³³ És az 1° . állítás felhasználásával, amely igaz marad, ha $f^{[2n]}$ helyébe a T^*f kifejezést írjuk.

Megemlítjük még, hogy ha a σ függvény abszolút folytonos és $\varrho = \sigma'$, akkor a (11. 4) peremérték-feladat a következő alakra hozható:

$$f^{[n]} - \lambda \varrho f = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

IRODALOM

- [1] M. G. KREJN: A félig korlátos hermitikus operátorok önadjungált folytatásainak elmélete és alkalmazásai. (I) *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményei*, **18** (1968) 273—314.
- [2] M. KREIN: Sur les opérateurs différentiels auto-adjoints et leurs fonctions de Green symétriques. *Математический сборник* **2** (1937) 1023—1072.
- [3] M. KREIN: Sur les développements des fonctions arbitraires en séries de fonctions fondamentales d'un problème aux limites quelconques, *Математический сборник* **2** (1937) 923—932.
- [4] А. А. Графф: К теории линейных дифференциальных систем в области одного измерения. *Математический сборник* **18** (1946) 305—327; **21** (1947) 143—158.
- [5] M. KREIN: Sur les dérivées des noyaux de Mercer. *Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie des Sciences* **200** (1935) 797—799.
- [6] А. Данилевский: К одной теореме М. Г. Крейна. *Доклады Академии наук СССР* **1** (1936) 335—338.
- [7] E. TREFFTZ: Schwingungsprobleme und Integralgleichungen. *Mathematische Annalen* **87** (1922) 307—314.