LEKÉPEZÉSEK ÉS LEKÉPEZÉSFÉLCSOPORTOK, I.

Írta: DÉNES JÓZSEF

Rédei László akadémikus 70. születésnapjára

Bevezetés

A permutációk és a permutációcsoportok elmélete a véges csoportelmélet egyik legjobban kidolgozott fejezete és több könyvet (C. JORDAN [15], W. A. MANNING [21], H. WIELANDT [38]) teljes terjedelmükben a véges csoportelmélet ezen fontos fejezetének szenteltek.

A permutációk lényeges szerepét mutatja a *Cayley*-féle ábrázolási tétel, amely szerint tetszőleges absztrakt csoport izomorf módon ábrázolható permutációcsoportként.

A *Cayley*-tétel félcsoportokra való kiterjeszthetősége miatt a leképezések hasonló szerepet játszanak a félcsoportelméletben.

Jelen dolgozatnak az a célkitűzése, hogy néhány eredményt ismertessen a véges leképezések elméletéből elsősorban azokat, amelyek a permutációk és a leképezések közötti analógiára mutatnak.

Egy másik fontos szempont, amelyet a dolgozat megírásánál szem előtt tartottunk, ráirányítani a figyelmet a leképezések elméletének olyan gyakorlati alkalmazásaira, amelyek a szerző tudomása szerint újak, számos egyéb alkalmazást ezek fontosságának elismerése mellett is igyekszünk röviden tárgyalni.

Annak ellenére, hogy a múlt század utolsó éveiben és a XX. század első éveiben több szerzőnél (G. ANDREOLI [1], G. FROBENIUS [11], E. H. MOORE [22]) felmerült a csoport, illetve a permutáció általánosításának gondolata A. SZUSKEVICSnek az 1920-as években megjelenő dolgozatai jelentik a leképezésfélcsoport elméleti rendszeres kutatások megindulását. A. SZUSKEVICS [37] könyvének 1937. évi megjelenése a mai napig a leképezésfélcsoportok elméletének legjobban kidolgozott összefoglalása. Š. SCHWARZ egyetemi doktori értekezése [31] számos SZUSKEVICS felfogásához közel álló eredményt tartalmaz. A modern könyvek R. BRUCK [41], A. CLIFFORD, G. PRESTON [3], E. SZ. LJAPIN [18] egyre kisebb teret szentelnek a leképezésfélcsoportoknak, annak ellenére, hogy pl. E. SZ. LJAPIN ezek jelentőségét külön hangsúlyozza.

A SZUSKEVICS által megkezdett irányvonalat több szovjet matematikus folytatja (a teljesség igénye nélkül megemlítendők E. SZ. LJAPIN, A. JA. AJZENSTAT, K. A. BAIRAMOV, N. N. VOROBJEV, L. M. GLUSZKIN, B. M. SCHEIN, V. V. WAGNER, A. E. LIEBER, V. A. OGANYESZJÁN, K. A. ZARECKIJ). (A szovjet iskolának a tárgykörre vonatkozó fontosabb dolgozatai a következők: [40], [42], [43], [44], [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63].)

A szerző mivel sokáig nem tudott A. SZUSKEVICS könyvéhez hozzájutni, több cikkében, amelyeket a leképezésekről írt (lásd [6], [7], [8]) egyes A. SZUSKEVICSnél meglevő eredményeket újra bebizonyított.

Így munkánkban nagy előrelépést jelentett A. SZUSKEVICS munkájának megismerése, ezért a szerző ezúton is köszönetét fejezi ki dr. SCHEINnek és prof. Š. SCHWARZnak, akik A. SZUSKEVICS eredményeivel való megismerkedését könyvének megküldésével, illetve más forrásokra rámutatva elősegítették.

1. Alapfogalmak

A dolgozat véges halmazokkal és algebrai struktúrákkal foglalkozik, ezért a dolgozat szövegében a véges szót elhagyjuk és halmazon, illetve algebrai struktúrán mindig végeset értünk, ellenkező esetben ezt külön jelezzük. Számos véges esetben a vizsgált állítás végtelenre való kiterjesztése [30]-ban megtalálható.

Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a H halmaz elemei az $1, 2, \ldots, n$ természetes egész számok, vagyis $H = \{1, 2, \ldots, n\}$.

A H halmaz önmagára történő leképezését n-ed fokú *permutációnak*, az önmagába való leképezését n-ed fokú *leképezésnek* nevezzük.

H két valódi nem azonos részhalmaza közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést *részleges permutációnak*, ha a megfeleltetés egyértelmű, *részleges leképezésnek* nevezünk. (A részleges leképezést A. SZUSKEVICS [37] könyvében transzmutációnak nevezi.)

A permutációk, leképezések, részleges permutációk, részleges leképezések jelölésére a szokásos írásmódot fogjuk használni.

Példák:

Permutáció
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Leképezés
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Részleges permutáció
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Részleges leképzés
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Egy leképezést akkor nevezünk *szingulárisnak*, ha H pontosan egy elemének pl. i-nek a képe j nem azonos ősével. Jelölése $\left|\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right|$. (A szinguláris leképezés fogalma B. JONSSONnál is szerepel, [14]-ben ugyanezt a fogalmat „replacement”-nek nevezi.) Az α leképezés *defektszámának* a különböző képelemek számát nevezzük. α defektszámát D (α)-val jelöljük. Ha α n-ed fokú permutáció, akkor $D(\alpha) = n$, egyébként $D(\alpha) < n$.

Ha α szinguláris leképezés, akkor $D(\alpha) = n-1$. Ha α n-ed fokú leképezés kép-elemei között az i s_i-szer fordul elő, akkor az $(s_1, s_2 \ldots s_n)$ vektort α *típusának* nevezzük. (A permutációk típusa nyilván $(1, 1, \ldots 1)$.)

Az összes n-edfokú permutációk (ezek száma $n!$), a permutációk egymás utáni végrehajtására mint műveletre nézve, csoportot alkotnak, ezt a csoportot n-edfokú *szimmetrikus csoportnak* nevezzük és S_n-nel fogjuk jelölni. Az összes n-edfokú transzformációk (ezek száma n^n) félcsoportot alkotnak az ún. n-edfokú *szimmetrikus félcsoportot*, amelyet F_n-nel fogunk jelölni.

A szorzat defektszámára vonatkozóan F_n-ben érvényes a következő tétel.

1. TÉTEL. *A szorzat defektszáma legfeljebb annyi lehet, mint a tényezők defektszámainak minimuma.*

Bizonyítás. A tételt elég két tényezős szorzatra bizonyítani. Vagyis α, β, γ leképezésekre vonatkozóan álljon fenn az

$$\alpha\beta = \gamma$$

azonosság, ekkor $\min(D(\alpha), D(\beta)) \geqq D(\gamma)$ teljesülését kell igazolni.

Ha

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \beta(1) & \beta(2) & \cdots & \beta(n) \end{pmatrix},$$

akkor

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha\beta(1) & \alpha\beta(2) & \cdots & \alpha\beta(n) \end{pmatrix},$$

így valóban

$$\min(D(\alpha), D(\beta)) \geqq D(\gamma).$$

Annak bemutatására, hogy az eredmény nem élesíthető, vagyis a $\min(D(\alpha), D(\beta)) = D(\gamma)$ is fennállhat, a következő példa szolgáljon:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\min(D(\alpha), D(\beta)) = D(\alpha\beta) = 2.$$

Az 1. tétel bizonyítása megtalálható a CLIFFORD—PRESTON [3] könyv II. kötet 223. oldalán, valamint a szerző [6], [7] dolgozataiban.

Később látni fogjuk, hogy az 1. tétel annak az ismert mátrixelméleti tételnek a következménye, amely szerint a szorzat rangja nem lehet nagyobb, mint a tényezők rangjának minimuma.

Két részleges leképezés

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} l_1 l_2 \cdots l_s \\ k_1 k_2 \cdots k_s \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \bar{\beta} = \begin{pmatrix} m_1 m_2 \cdots m_t \\ n_1 n_2 \cdots n_t \end{pmatrix}$$

szorzata $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{\gamma}$ részleges leképezés, amelyet úgy kapunk, hogy

$$K = \{k_1, k_2, \dots, k_s\} \quad \text{és} \quad N = \{n_1, n_2, \dots, n_t\}$$

halmazok metszetében levő $t_1, t_2, \dots, t_r$ elemeket tekintjük, ekkor l_{ji}-vel jelölve t_i $\bar{\alpha}$-beli ősét és n_{i_j}-vel t_i $\bar{\beta}$-beli képét

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} l_{j_1} l_{j_2} \cdots l_{j_r} \\ n_{j_1} n_{j_2} \cdots n_{j_r} \end{pmatrix}, \quad \text{ha} \quad K \cap N = \emptyset$$

akkor $\bar{\gamma} = \emptyset$, ekkor $\bar{\gamma}$-t üres elemnek fogjuk nevezni. $\emptyset$ nyilván zérus elem, mivel tetszőleges α részleges leképezés esetén $\alpha\emptyset = \emptyset\alpha = \emptyset$.

A H halmaz részhalmazain értelmezett leképezések és részleges leképezések az üres elemmel együtt a szorzásra nézve algebrai struktúrát alkotnak, amelyet n-edfokú *részleges szimmetrikus félcsoportnak* fogunk nevezni és F_n^*-nel jelölünk.

Hasonló módon definiálhatjuk az n-edfokú *részleges szimmetrikus csoportot*, ha F_n definíciójában szereplő leképezés szavakat permutációval helyettesítjük. Az n-edfokú részleges szimmetrikus csoportot S_n^*-gal jelöljük.

Az n-edfokú részleges szimmetrikus félcsoport rendje

$$0(F_n^*) = 1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}n^i$$

Az n-edfokú részleges szimmetrikus csoport rendje

$$0(S_n^*) = 1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}^2 i!.$$

Példaként közöljük S_3, F_3, S_3^* és F_3^* művelettábláját.

$$0(S_3)=6 \quad 0(F_3)=27 \quad 0(F_3^*)=64 \quad 0(S_3^*)=34$$

S_3 elemei:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 1 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 4 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 5$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 6 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 2 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 3$$

S_3 művelettáblája

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	6	4	5
3	3	1	2	5	6	4
4	4	5	6	1	2	3
5	5	6	4	3	1	2
6	6	4	5	2	3	1

F_3 elemei:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 1 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 2 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 3$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 4 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 5 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 6 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 7$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 8 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 9 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 10 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 11$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 12 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 13 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 14 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 15$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 16 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 17 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 18 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 19$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 20 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 21 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 22 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 23$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 24 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 25 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 26 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 27$$

F_3 műveléttáblája:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	1	2	3	1	1	1	1	2	3	2	2	2	2	1	3	3	3	3	3	1	2	1	1	2	2	3	3
2	1	2	3	1	2	1	3	1	1	2	1	2	3	2	2	3	1	3	2	3	3	2	3	1	3	1	2
3	1	2	3	2	1	3	1	1	1	1	2	3	2	2	2	1	3	2	3	3	3	3	2	3	1	2	1
4	1	2	3	1	4	1	6	10	16	2	10	2	12	4	18	3	16	3	18	6	12	4	6	10	12	16	18
5	1	2	3	1	5	1	7	11	17	2	11	2	13	5	19	3	17	3	19	7	13	5	7	11	13	17	19
6	1	2	3	4	1	6	1	10	16	10	2	12	2	4	18	16	3	18	3	6	12	6	4	12	10	18	16
7	1	2	3	5	1	7	1	11	17	11	2	13	2	5	19	17	3	19	3	7	13	7	5	13	11	19	17
8	1	2	3	1	8	1	9	14	20	4	14	2	15	8	21	3	20	3	21	9	15	8	9	14	15	20	21
9	1	2	3	8	1	9	1	14	20	14	2	15	2	8	21	20	3	21	3	9	15	9	8	15	14	21	20
10	1	2	3	1	10	1	16	4	6	2	4	2	18	10	12	3	6	3	12	16	18	10	16	4	18	6	12
11	1	2	3	1	11	1	17	5	7	2	5	2	19	11	13	3	7	3	13	17	19	11	17	5	19	7	13
12	1	2	3	4	10	6	16	1	1	10	4	12	18	2	2	16	6	18	12	3	3	12	18	6	16	4	10
13	1	2	3	5	11	7	17	1	1	11	5	13	19	2	2	17	7	19	13	3	3	13	19	7	17	5	11
14	1	2	3	1	14	1	20	8	9	2	8	2	21	14	15	3	9	3	15	20	21	14	20	8	21	9	15
15	1	2	3	8	14	9	20	1	1	14	8	15	21	2	2	20	9	21	15	3	3	15	21	9	20	8	14
16	1	2	3	10	1	16	1	4	6	4	2	18	2	10	12	6	3	12	3	16	18	16	10	18	4	12	6
17	1	2	3	11	1	17	1	5	7	5	2	19	2	11	13	7	3	13	3	21	19	17	11	19	5	13	7
18	1	2	3	10	4	16	6	1	1	4	10	18	12	2	2	6	16	12	18	3	3	18	12	16	6	10	4
19	1	2	3	11	5	17	7	1	1	5	11	19	13	2	2	7	17	13	19	3	3	19	13	17	7	11	5
20	1	2	3	14	1	20	1	8	9	8	2	21	2	14	15	9	3	15	3	20	21	20	14	21	8	15	9
21	1	2	3	14	8	20	9	1	1	8	14	21	15	2	2	9	20	15	21	3	3	21	15	20	9	14	8
22	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
23	1	2	3	5	4	7	6	8	9	11	10	13	12	14	15	17	16	19	18	20	21	23	22	25	24	27	26
24	1	2	3	4	8	6	9	5	7	10	14	12	15	11	13	16	20	18	21	17	19	24	26	22	27	23	25
25	1	2	3	5	8	17	9	4	6	11	14	13	15	10	12	17	20	19	21	16	18	25	27	23	26	22	24
26	1	2	3	8	4	9	6	5	7	14	10	15	12	11	13	20	16	21	18	17	19	26	24	27	22	25	23
27	1	2	3	8	5	9	7	4	6	14	11	15	13	10	12	20	17	21	19	16	18	27	25	26	23	24	22

S_3^* elemei

$0 \leftrightarrow \emptyset$

$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$2 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$3 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$4 \leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$5 \leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$6 \leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$7 \leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$8 \leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$9 \leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

$10 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$

$11 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$

$12 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

$13 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$14 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$15 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

$16 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$17 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$18 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

$19 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$20 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$21 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

$22 \leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$23 \leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$24 \leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

$25 \leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$26 \leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$27 \leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

$28 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$29 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$

$30 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

$31 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

$32 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$33 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

F_3^* elemei lásd a táblázatot

$0 \leftrightarrow 0$

$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

$2 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

$3 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$

$4 \leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$

$5 \leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$

$6 \leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$

$7 \leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$

$8 \leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$

$9 \leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}$

$10 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$11 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$12 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$13 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	1	2	1	3	2	3	1	2	1	3	2	3	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	3	3
2	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	2	1	3	1	3	2	0	0	0	0	0	0	1	2	1	3	2	3	2	3	1	3	1	2
3	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	2	1	3	1	2	2	2	1	3	1	3	2	3	2	3	1	2	1
4	0	4	5	6	0	0	0	0	0	0	4	5	4	6	5	6	4	5	4	6	5	6	0	0	0	0	0	0	4	4	5	5	6	6
5	0	0	0	0	4	5	6	0	0	0	5	4	6	4	6	5	0	0	0	0	0	0	4	5	4	6	5	6	5	6	4	6	4	5
6	0	0	0	0	0	0	0	4	5	6	0	0	0	0	0	0	5	4	6	4	6	5	5	4	6	4	6	5	6	5	6	4	5	4
7	0	7	8	9	0	0	0	0	0	0	7	8	7	9	8	9	7	8	7	9	8	9	0	0	0	0	0	0	7	7	8	8	9	9
8	0	0	0	0	7	8	9	0	0	0	8	7	9	7	9	8	0	0	0	0	0	0	7	8	7	9	8	9	8	9	7	9	7	8
9	0	0	0	0	0	0	0	7	8	9	0	0	0	0	0	0	8	7	9	7	9	8	8	7	9	7	9	8	9	8	9	7	8	7
10	0	1	2	3	4	5	6	0	0	0	10	11	12	13	14	15	1	2	1	3	2	3	4	5	4	6	5	6	10	12	11	14	13	15
11	0	4	5	6	1	2	3	0	0	0	11	10	13	12	15	14	4	5	4	6	5	6	1	2	1	3	2	3	11	13	10	15	12	14
12	0	1	2	3	0	0	0	4	5	6	1	2	1	3	2	3	10	11	12	13	14	15	5	4	6	4	6	5	12	10	14	11	15	13
13	0	4	5	6	0	0	0	1	2	3	4	5	4	6	5	6	11	10	13	12	15	14	2	1	3	1	3	2	13	11	15	10	14	12
14	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	2	1	3	1	3	2	5	4	6	4	6	5	10	11	12	13	14	15	14	15	12	13	10	11
15	0	0	0	0	4	5	6	1	2	3	5	4	6	4	6	5	2	1	3	1	3	2	11	10	13	12	15	14	15	14	13	12	11	10
16	0	1	2	3	7	8	9	0	0	0	16	17	18	19	20	21	1	2	1	3	2	3	7	8	7	9	8	9	16	18	17	20	19	21
17	0	7	8	9	1	2	3	0	0	0	17	16	19	18	21	20	7	8	7	9	8	9	1	2	1	3	2	3	17	19	16	21	18	20
18	0	1	2	3	0	0	0	7	8	9	1	2	1	2	3	3	16	17	18	19	20	21	8	7	9	7	9	8	18	16	20	17	21	19
19	0	7	8	9	0	0	0	1	2	3	7	8	7	9	8	9	17	16	19	18	21	20	2	1	3	1	3	2	19	17	21	16	20	18
20	0	0	0	0	1	2	3	7	8	9	2	1	3	1	3	2	8	7	9	7	9	8	16	17	18	19	20	21	20	21	18	19	16	17
21	0	0	0	0	7	8	9	1	2	3	8	7	9	7	9	8	2	1	3	1	3	2	17	16	19	18	21	20	21	20	19	18	17	16
22	0	4	5	6	7	8	9	0	0	0	22	23	24	25	26	27	4	5	4	6	5	6	7	8	7	9	8	9	22	24	23	26	25	27
23	0	7	8	9	4	5	6	0	0	0	23	22	25	24	27	26	7	8	7	9	8	9	4	5	4	6	5	6	23	25	22	27	24	26
24	0	4	5	6	0	0	0	7	8	9	4	5	4	6	5	6	22	23	24	25	26	27	8	7	9	7	9	8	24	22	26	23	27	25
25	0	7	8	9	0	0	0	4	5	6	7	8	7	9	8	9	23	22	25	24	27	26	5	4	6	4	6	5	25	23	27	22	26	24
26	0	0	0	0	4	5	6	7	8	9	5	4	6	4	6	5	8	7	9	7	9	8	22	23	24	25	26	27	26	27	24	25	22	23
27	0	0	0	0	7	8	9	4	5	6	8	7	9	7	9	8	5	4	6	4	6	5	23	22	25	24	27	26	27	26	25	24	23	22
28	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
29	0	1	2	3	7	8	9	4	5	6	16	17	18	19	20	21	10	11	12	13	14	15	23	22	25	24	27	26	29	28	31	30	33	32
30	0	4	5	6	1	2	3	7	8	9	11	10	13	12	15	14	22	23	24	25	26	27	16	17	18	19	20	21	30	32	28	33	29	31
31	0	7	8	9	1	2	3	4	5	6	17	16	19	18	21	20	23	22	25	24	27	26	10	11	12	13	14	15	31	33	29	32	28	30
32	0	4	5	6	7	8	9	1	2	3	22	23	24	25	26	27	11	10	13	12	15	14	17	16	19	18	21	20	32	30	33	28	31	29
33	0	7	8	9	4	5	6	1	2	3	23	22	25	24	27	26	17	16	19	18	21	20	11	10	13	12	15	14	33	31	32	29	30	28

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	1	3	3	2	3	1	1	2	2	1	3	3	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	1	1	3	2	2	2	1	2	2	3	3	3	3	1	3	3	2	1	1	2	2	3	3
2	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	1	2	1	2	3	1	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	1	3	3	2	3	1	1	2	1	1	3	1	2	2	1	2	2	3	2	3	3	1	3	3	2	3	2	3	1	3	1	2
3	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	2	3	1	3	3	2	1	2	1	2	3	1	3	3	2	1	2	1	1	3	1	1	2	1	2	2	3	2	2	3	1	3	3	2	3	3	3	2	3	1	2	1
4	0	4	5	6	0	0	0	0	0	0	4	5	4	5	4	6	6	5	6	4	4	5	5	4	6	6	5	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	4	5	4	4	6	5	5	5	4	5	5	6	6	6	6	4	6	6	5	4	4	5	5	6	6
5	0	0	0	0	4	5	6	0	0	0	4	5	4	5	6	4	6	6	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	5	5	4	6	6	5	6	4	4	5	4	4	6	4	5	5	4	5	5	6	5	6	6	4	6	6	5	6	5	6	4	6	4	5
6	0	0	0	0	0	0	0	4	5	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	5	4	5	6	4	6	6	5	4	5	4	5	6	4	6	6	5	4	5	4	4	6	4	4	5	4	5	5	6	5	5	6	4	6	6	5	6	6	6	5	6	4	5	4
7	0	7	8	9	0	0	0	0	0	0	7	7	8	8	7	9	9	8	9	7	7	8	8	7	9	9	8	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	7	7	8	7	7	9	8	8	8	7	8	8	9	9	9	9	7	9	9	8	7	7	8	8	9	9
8	0	0	0	0	7	8	9	0	0	0	7	8	7	8	9	7	9	9	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	7	8	8	7	9	9	8	9	7	7	8	7	7	9	7	8	8	7	8	8	9	8	9	9	7	9	9	8	9	8	9	7	9	7	8
9	0	0	0	0	0	0	0	7	8	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	8	7	8	9	7	9	9	8	7	8	7	8	9	7	9	9	8	7	8	7	7	9	7	7	8	7	8	8	9	8	8	9	7	9	9	8	9	9	9	8	9	7	8	7
10	0	10	13	16	0	0	0	0	0	0	10	10	13	13	10	16	16	13	16	10	13	13	13	10	16	16	13	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10	10	13	10	10	16	13	13	13	10	13	13	16	16	16	16	10	16	16	13	10	10	13	13	16	16
11	0	1	2	3	4	5	6	0	0	0	10	11	12	13	14	15	16	17	18	1	1	2	2	1	3	3	2	3	4	4	5	5	4	6	6	5	6	10	10	11	12	10	14	15	13	13	12	11	13	17	18	16	16	15	14	16	18	17	11	14	12	17	15	18
12	0	4	5	6	1	2	3	0	0	0	10	12	11	13	15	14	16	18	17	4	4	5	5	4	6	6	5	6	1	1	2	2	1	3	3	2	3	10	10	12	11	10	15	14	13	13	11	12	13	18	17	16	16	14	15	16	17	18	12	15	11	18	14	17
13	0	0	0	0	10	13	16	0	0	0	10	13	10	13	16	10	16	16	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10	13	13	10	16	16	13	16	10	10	13	10	10	16	10	13	13	10	13	13	16	13	16	16	10	16	16	13	16	13	16	10	16	10	13
14	0	1	2	3	0	0	0	4	5	6	1	1	2	2	1	3	3	2	3	10	11	12	13	14	15	16	17	18	4	5	4	5	6	4	6	6	5	10	11	10	12	14	10	15	13	12	13	11	17	13	18	16	15	16	14	18	16	17	14	11	17	12	18	15
15	0	4	5	6	0	0	0	1	2	3	4	4	5	5	4	6	6	5	6	10	12	11	13	15	14	16	18	17	1	2	1	2	3	1	3	3	2	10	12	10	11	15	10	14	13	11	13	12	18	13	17	16	14	16	15	17	16	18	15	12	18	11	17	14
16	0	0	0	0	0	0	0	10	13	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	13	10	13	16	10	16	16	13	10	13	10	13	16	10	16	16	13	10	13	10	10	16	10	10	13	10	13	13	16	13	13	16	10	16	16	13	16	16	16	13	16	10	13	10
17	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	1	2	1	2	3	1	3	3	2	4	5	4	5	6	4	6	6	5	10	11	12	13	14	15	16	17	18	10	11	12	10	14	15	10	13	12	11	13	17	18	13	16	15	14	16	18	17	16	17	18	14	15	11	12
18	0	0	0	0	4	5	6	1	2	3	4	5	4	5	6	4	6	6	5	1	2	1	2	3	1	3	3	2	10	12	11	13	15	14	16	18	17	10	12	11	10	15	14	10	13	11	12	13	18	17	13	16	14	15	16	17	18	16	18	17	15	14	12	11
19	0	19	22	25	0	0	0	0	0	0	19	19	22	22	19	25	25	22	25	19	19	22	22	19	25	25	22	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19	19	19	22	19	19	25	22	22	22	19	22	22	25	25	25	25	19	25	25	22	19	19	22	22	25	25
20	0	1	2	3	7	8	9	0	0	0	19	20	21	22	23	24	25	26	27	1	1	2	2	1	3	3	2	3	7	7	8	8	7	9	9	8	9	19	19	20	21	19	23	24	22	22	21	21	22	26	27	25	25	24	23	25	27	26	20	23	21	26	24	27
21	0	7	8	9	1	2	3	0	0	0	19	21	20	22	24	23	25	27	26	7	7	8	8	7	9	9	8	9	1	1	2	2	1	3	3	2	3	19	19	21	20	19	24	23	22	22	20	21	22	27	26	25	25	23	24	25	26	27	21	24	20	27	23	26
22	0	0	0	0	19	22	25	0	0	0	19	22	19	22	25	19	25	25	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19	19	22	22	19	25	25	22	25	19	19	22	19	19	25	19	22	22	19	22	22	25	22	25	25	19	25	25	22	25	22	25	19	25	19	22
23	0	1	2	3	0	0	0	7	8	9	1	1	2	2	1	3	3	2	3	19	20	21	22	23	24	25	26	27	7	8	7	8	9	7	9	9	8	19	20	19	21	23	19	24	22	21	22	20	26	22	27	25	21	25	23	27	25	26	23	20	26	21	27	24
24	0	7	8	9	0	0	0	1	2	3	7	7	8	8	7	9	9	8	9	19	21	20	23	22	25	24	27	26	1	2	1	2	3	1	3	3	2	19	21	19	20	21	19	23	22	20	22	21	26	22	26	25	23	25	24	26	25	27	24	21	27	20	26	23
25	0	0	0	0	0	0	0	19	22	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19	22	19	22	25	19	25	25	22	19	22	19	22	25	19	25	25	22	19	22	19	19	25	19	19	22	19	22	22	25	22	22	25	19	25	25	22	25	25	25	22	25	19	22	19
26	0	0	0	0	1	2	3	7	8	9	1	2	1	2	3	1	3	3	2	7	8	7	8	9	7	9	9	8	19	20	21	22	23	24	25	26	27	19	20	21	19	23	24	19	22	21	20	22	26	27	22	25	21	23	25	27	26	25	26	27	23	24	20	21
27	0	0	0	0	7	8	9	1	2	3	7	8	7	8	9	7	9	9	8	1	2	1	2	3	1	3	3	2	19	21	20	23	22	25	24	27	26	19	21	20	19	21	23	19	22	20	21	22	27	26	22	25	23	21	25	26	27	25	27	26	24	23	21	20
28	0	28	31	34	0	0	0	0	0	0	28	28	31	31	28	34	34	31	34	28	28	31	31	28	34	34	31	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28	28	28	31	28	28	34	31	31	31	28	31	31	34	34	34	34	28	34	34	31	28	28	31	31	34	34
29	0	4	5	6	7	8	9	0	0	0	28	29	30	31	32	33	34	35	36	4	4	5	5	4	6	6	5	6	7	7	8	8	7	9	9	8	9	28	28	29	30	28	32	33	31	31	30	29	31	35	36	34	34	33	32	34	36	35	29	32	30	35	33	36
30	0	7	8	9	4	5	6	0	0	0	28	30	29	31	33	32	34	36	35	7	7	8	8	7	9	9	8	9	4	4	5	5	4	6	6	5	6	28	28	30	29	28	33	32	31	31	29	30	31	36	35	34	34	32	33	34	35	36	30	33	29	36	32	35
31	0	0	0	0	28	31	34	0	0	0	28	31	28	31	34	28	34	34	31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28	28	31	31	28	34	34	31	34	28	28	31	28	28	34	28	31	31	28	31	31	34	31	34	34	28	34	34	31	34	31	34	28	34	28	31
32	0	4	5	6	0	0	0	7	8	9	4	4	5	5	4	6	6	5	6	19	29	30	31	32	33	34	35	36	7	8	7	8	9	7	9	9	8	28	29	28	30	32	28	33	31	30	31	28	35	31	36	34	33	34	32	36	34	35	32	29	35	30	36	33
33	0	7	8	9	0	0	0	4	5	6	7	7	8	8	7	9	9	8	9	19	30	29	32	31	34	33	36	35	4	5	4	5	6	4	6	6	5	28	30	28	29	33	28	32	31	29	31	30	36	31	35	34	32	34	33	35	34	36	33	30	36	29	35	32
34	0	0	0	0	0	0	0	28	31	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28	31	28	31	34	28	34	34	31	28	31	28	31	34	28	34	34	31	28	31	28	28	34	28	28	31	28	31	31	34	31	31	34	28	34	34	31	34	34	34	31	34	28	31	28
35	0	0	0	0	4	5	6	7	8	9	4	5	4	5	6	4	6	6	5	7	8	7	8	9	7	9	9	8	28	29	30	31	32	33	34	35	36	28	29	30	28	32	33	28	31	30	29	31	35	36	31	34	33	32	34	36	35	34	35	36	32	33	29	30
36	0	0	0	0	7	8	9	4	5	6	7	8	7	8	9	7	9	9	8	4	5	4	5	6	4	6	6	5	28	30	29	31	33	32	34	36	35	28	30	29	28	33	32	28	31	29	30	31	36	35	31	34	32	33	34	35	36	34	36	35	33	32	30	29
37	0	37	44	51	0	0	0	0	0	0	37	37	44	44	37	51	51	44	51	37	37	44	44	37	51	51	44	51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37	37	37	44	37	37	51	44	44	44	37	44	44	51	51	51	51	37	51	51	44	37	37	44	44	51	51
38	0	10	13	16	7	8	9	0	0	0	37	38	45	44	41	52	51	48	55	10	10	13	13	10	16	16	13	16	7	7	8	8	7	9	9	8	9	37	37	38	45	38	41	52	44	44	45	38	44	48	55	51	51	52	41	51	55	48	38	41	45	48	52	55
39	0	19	22	25	4	5	6	0	0	0	37	39	46	44	42	53	51	49	56	19	19	22	22	19	25	25	22	25	4	4	5	5	4	6	6	5	6	37	37	39	46	37	42	53	44	44	46	39	44	49	56	51	51	53	42	51	56	49	39	42	46	49	53	56
40	0	28	31	34	1	2	3	0	0	0	37	40	47	44	43	54	51	50	57	28	28	31	31	28	34	34	31	34	1	1	2	2	1	3	3	2	3	37	37	40	47	37	43	54	44	44	47	40	44	50	57	51	51	54	43	51	57	50	40	43	47	50	54	57
41	0	10	13	16	0	0	0	7	8	9	10	10	13	13	10	16	16	13	16	37	38	45	44	41	52	51	48	55	7	8	7	8	9	7	9	9	8	37	38	37	45	41	37	52	44	45	44	38	48	44	55	51	52	51	41	55	51	48	41	38	48	45	55	52
42	0	19	22	25	0	0	0	4	5	6	19	19	22	22	19	25	25	22	25	37	39	46	44	42	53	51	49	56	4	5	4	5	6	4	6	6	5	37	37	37	46	42	37	53	44	44	44	39	49	44	56	51	53	51	42	56	51	49	42	39	49	46	56	53
43	0	28	31	34	0	0	0	1	2	3	28	28	31	31	28	34	34	31	34	37	40	47	44	43	54	51	50	57	1	2	1	2	3	1	3	3	2	37	40	37	47	43	37	54	44	47	44	40	50	44	57	51	54	51	43	57	51	50	43	40	50	47	57	54
44	0	0	0	0	37	44	51	0	0	0	37	44	37	44	51	37	51	51	44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37	37	44	44	37	51	51	44	51	37	37	44	37	37	51	37	44	44	37	44	44	51	44	51	51	37	51	51	44	51	44	51	37	51	37	44
45	0	7	8	9	10	13	16	0	0	0	37	45	38	44	52	45	51	55	48	7	7	8	8	7	9	9	8	9	10	10	13	13	10	16	16	13	16	37	37	45	37	37	52	41	44	44	38	45	44	55	48	51	51	41	52	51	48	55	45	52	38	55	45	48
46	0	4	5	6	19	22	25	0	0	0	37	46	39	44	53	46	51	56	49	4	4	5	5	4	6	6	5	6	19	19	22	22	19	25	25	22	25	37	37	46	39	37	53	42	44	44	39	46	44	56	49	51	51	42	53	51	49	56	46	53	39	56	46	49
47	0	1	2	3	28	31	34	0	0	0	37	47	40	44	54	47	51	57	50	1	1	2	2	1	3	3	2	3	28	28	31	31	28	34	34	31	34	37	37	47	40	37	54	43	44	44	40	47	44	57	50	51	51	43	54	51	50	57	47	54	40	57	47	50
48	0	0	0	0	10	13	16	7	8	9	10	13	10	13	16	10	16	16	13	7	8	7	8	9	7	9	9	8	37	38	45	44	41	52	51	48	55	37	38	45	37	41	52	37	44	45	38	44	48	55	44	51	52	41	51	55	48	51	48	48	41	52	38	45
49	0	0	0	0	19	22	25	4	5	6	19	22	19	22	25	19	25	25	22	4	5	4	5	6	4	6	6	5	37	39	40	44	42	53	51	49	56	37	39	46	37	42	53	37	44	46	39	44	49	56	44	51	53	42	51	56	49	51	49	49	42	53	39	46
50	0	0	0	0	28	31	34	1	2	3	28	31	28	31	34	28	34	34	31	1	2	1	2	3	1	3	3	2	37	40	47	44	43	54	51	50	57	37	40	47	37	43	54	37	44	47	40	44	50	57	44	51	54	43	51	57	50	51	50	50	43	54	40	47
51	0	0	0	0	0	0	0	37	44	51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37	44	37	44	51	37	51	51	44	37	44	37	44	51	37	51	51	44	37	44	37	37	51	37	37	44	37	44	44	51	44	44	51	37	51	51	44	51	51	51	44	51	37	44	37
52	0	7	8	9	0	0	0	10	13	16	7	7	8	8	7	9	9	8	9	37	45	38	44	52	41	51	55	48	10	13	10	13	16	10	13	16	13	37	45	37	38	52	37	41	44	38	44	45	55	44	48	51	41	51	52	48	51	55	52	45	55	38	48	41
53	0	4	5	6	0	0	0	19	22	25	4	4	5	5	4	6	6	5	6	37	46	39	44	53	42	51	56	49	19	22	19	22	25	19	22	25	22	37	46	37	39	53	37	42	44	39	44	46	56	44	49	51	42	50	53	49	51	56	53	46	56	39	49	42
54	0	1	2	3	0	0	0	28	31	34	1	1	2	2	1	3	3	2	3	37	47	40	44	54	43	51	57	50	28	31	28	31	34	28	31	34	31	37	47	37	40	54	37	43	44	40	44	47	57	44	50	51	43	51	54	50	51	57	54	47	57	40	50	43
55	0	0	0	0	7	8	9	10	13	16	7	8	7	8	9	7	9	9	8	10	13	10	13	16	10	16	16	13	37	45	38	44	52	41	51	55	48	37	45	38	37	52	41	37	44	38	45	44	55	48	44	51	41	52	51	48	55	51	55	55	52	41	45	38
56	0	0	0	0	4	5	6	19	22	25	4	5	4	5	6	4	6	6	5	19	22	19	22	25	19	25	25	22	37	46	39	44	53	42	51	56	49	37	46	39	37	53	42	37	44	39	46	44	56	49	44	51	42	53	51	49	56	51	56	56	53	42	46	39
57	0	0	0	0	1	2	3	28	31	34	1	2	1	2	3	1	3	3	5	28	31	28	31	34	28	34	34	31	37	47	40	44	54	43	51	57	50	37	47	40	37	54	43	37	44	40	47	44	57	50	44	51	43	54	51	50	57	51	57	57	54	43	47	40
58	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
59	0	1	2	3	7	8	9	4	5	6	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	11	12	13	14	15	16	17	18	28	30	29	31	33	32	34	36	35	37	39	38	40	42	41	43	44	46	45	47	49	48	50	51	53	52	54	56	55	57	59	58	61	60	63	62
60	0	4	5	6	1	2	3	7	8	9	10	12	11	13	15	14	16	18	17	28	29	30	31	32	33	34	35	36	19	20	21	22	23	24	25	26	27	37	38	40	39	41	43	42	44	46	47	45	49	50	48	51	52	54	53	55	57	56	60	62	58	63	59	61
61	0	7	8	9	1	2	3	4	5	6	19	21	20	22	24	23	25	27	26	28	30	29	31	33	32	34	36	35	10	11	12	13	14	15	16	17	18	37	39	40	38	42	43	41	44	46	47	45	49	50	48	51	53	54	52	56	57	55	61	63	59	62	58	60
62	0	4	5	6	7	8	9	1	2	3	28	29	30	31	32	33	34	35	36	10	12	11	13	15	14	16	18	17	19	21	20	22	24	23	25	27	26	37	40	38	39	43	41	42	44	47	45	46	50	49	48	51	54	52	53	57	55	56	62	60	63	58	61	59
63	0	7	8	9	4	5	6	1	2	3	28	30	29	31	33	32	34	36	35	19	21	20	22	24	23	25	27	26	10	12	11	13	15	14	16	18	17	37	40	39	38	43	42	41	44	45	46	45	50	49	48	51	54	53	52	57	56	55	63	61	62	59	60	58

$$14 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$15 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$16 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$17 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$18 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$19 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$20 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$21 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$22 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$23 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$24 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$25 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$26 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$27 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$28 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$29 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$30 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$31 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$32 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$33 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$34 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$35 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$36 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$37 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$38 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$39 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$40 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$41 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$42 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$43 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$44 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$45 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$46 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$47 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$48 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$49 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$50 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$51 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$52 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad 58 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$53 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad 59 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$54 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad 60 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$55 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad 61 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$56 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad 62 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$57 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{lásd a táblázatot} \quad 63 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyilvánvalóan fennállnak a következő relációk:

1. $F_n^* \supset F_n \supset S_n$
2. $F_n^* \supset S_n^* \supset S_n$

V. A. OGANESZJAN [55], [56], [57] dolgozataiban számos eredmény található S_n^*-re vonatkozóan.

Ismeretes a *Cayley*-féle ábrázolási tételnek a következő általánosítása:

2. TÉTEL. *Egy tetszőleges S absztrakt $n-1$ rendű félcsoport izomorf módon ábrázolható F_n egy alkalmasan választott részstruktúrájával.*

Bizonyítás. Jelölje $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ S elemeit. Ehhez az S és T között izomorfiát létesítő α leképezést megadhatjuk a következőképpen

$$a_i \overset{\alpha}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_{n-1} & a_n \\ a_1 a_i & a_2 a_i & \cdots a_{n-1} & a_1 a_i \end{pmatrix}$$

α műveletttartó, mivel

$$a_j \overset{\alpha}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_{n-1} & a_n \\ a_1 a_j & a_2 a_j & \cdots a_{n-1} a_j & a_j a_j \end{pmatrix}$$

így

$$a_i a_j \overset{\alpha}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_{n-1} & a_n \\ a_1 a_i a_j & a_2 a_i a_j & \cdots a_{n-1} a_i a_j & a_i a_j \end{pmatrix}$$

és

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_{n-1} & a_n \\ a_1 a_i & a_2 a_i & \cdots a_{n-1} a_i & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_{n-1} & a_n \\ a_1 a_j & a_2 a_j & \cdots a_{n-1} a_j & a_j \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_{n-1} & a_n \\ a_1 a_i a_j & a_2 a_i a_j & \cdots a_{n-1} a_i a_j & a_i a_j \end{pmatrix},$$

α kölcsönösen egyértelmű, mivel a_n képe minden leképezésben különböző.

A bizonyításban szereplő ábrázolást *reguláris ábrázolásnak* fogjuk nevezni.

KOROLLÁRIUM. *Ha S-nek van bal-egysége, akkor F_{n-1}-ben izomorf módon ábrázolható.*

A *Cayley*-tétel különböző általánosításaira vonatkozó eredményeket tartalmaznak az [29], [57], [65] dolgozatok. További eredményeket és bizonyításokat találhat az olvasó [3] 30. oldalán.

A permutációk és permutációcsoportok gráf ábrázolását A. CAYLEY vizsgálta (lásd [2]). Mivel minden absztrakt csoport izomorf módon ábrázolható permutációcsoportként, ezért a *Cayley*-féle gráf-ábrázolás is alkalmazható tetszőleges absztrakt csoportra. A *Cayley*-féle ábrázolás néhány tulajdonságának leírása megtalálható pl. [17]-ben.

Tetszőleges n-edfokú leképezéshez hozzárendelhető egy $1, 2, \ldots, n$ természetes egész számokkal jelölt n szögpontú irányított gráf, amely összefüggő elemidegen részgráfokból áll.

A megfeleltetés módja a következő, ha a leképezés az i-t a j-be viszi át, akkor az i-ből a j-be irányuló élet tartalmaz a gráf.

Ezt a megfeleltetést A. SZUSKEVICS vezette be (lásd [36]).

A megfeleltetés útján nyert gráfokat leképezés gráfoknak fogjuk nevezni, ha a leképezés fokszáma n, akkor a leképezés gráfot $F(n)$ gráfnak fogjuk jelölni.

Az $F(n)$ gráfokat végtelen fokszám esetén O. ORE vizsgálta [24].

Az $F(n)$ gráfok bizonyos számossági tulajdonságait több szerző, pl. R. L. DAVIS [5], F. HARARY [12], L. KATZ [16], RÉNYI A. [28] és a jelen dolgozat szerzője [8] vizsgálta.

Az $F(n)$ gráfok száma az n-edfokú leképezésekkel való kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés miatt $O(F_n)$ vagyis n^n. A megfeleltetés felhasználása nélkül ez a leszámolási feladat sokkal bonyolultabb.

A részleges leképezések hasonló módon történő gráfábrázolásával M. YOELI foglalkozott [39].

A szerző [6]-ban elsőnek gondolt arra, hogy a *Cayley*-féle gráf ábrázolás általánosításaként a leképezések A. SZUSKEVICStől eredő gráfábrázolását a következőkben leírt módon fejlessze tovább.

Jelöljük S absztrakt n-edrendű félcsoport, reguláris ábrázolásával nyert, leképezésfélcsoportot T-vel.

Készítsük el T elemeihez tartozó $F(n+1)$ gráfokat és minden egyes gráf éleit a megfelelő T-beli elemmel jelöljük meg, majd az így nyert gráfokat szuperponálva nyerjük T, illetve *S általánosított Cayley-gráfját.* Eredetileg CAYLEY az élek számozása helyett színezést alkalmazott, ezért a CAYLEY ábrázolással nyert gráfot szokás *Cayley* színes gráfnak is nevezni.

Legyen S a következő művelettáblával jellemzett hatodrendű félcsoport

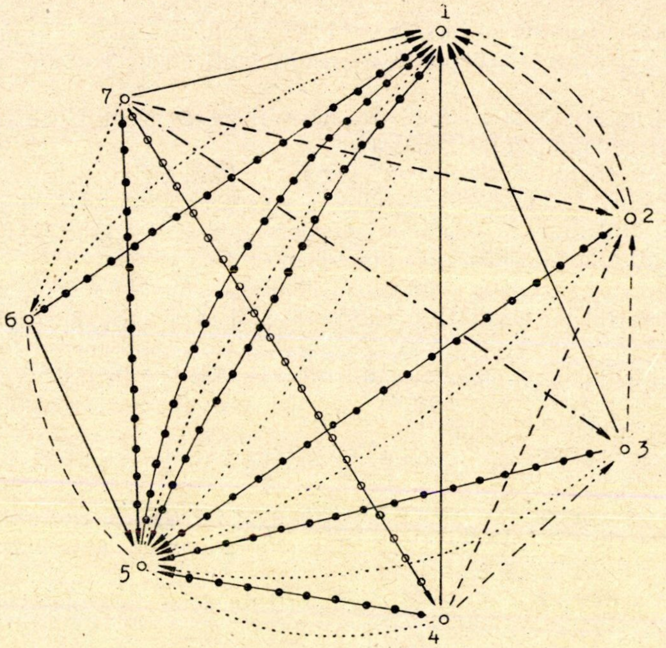
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	5	5
2	1	1	1	1	5	5
3	1	2	3	3	5	5
4	1	2	3	4	5	5
5	5	5	5	5	1	1
6	5	5	6	6	1	1

T elemei:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&1&1&1&5&5&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&1&2&2&5&5&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&1&3&3&5&6&3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&4&5&6&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&5&5&5&1&1&5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&5&5&5&1&1&6\end{pmatrix}.$$

Az S-hez, illetve T-hez rendelt általánosított *Cayley*-gráf tehát a következő:



$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&1&1&1&5&5&1\end{pmatrix}$ ———————— 1

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&1&2&2&5&5&2\end{pmatrix}$ - - - - - - - - - 2

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&1&3&3&5&6&3\end{pmatrix}$ -·-·-·-·-·-· 3

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&4&5&6&4\end{pmatrix}$ –o–o–o–o–o–o–o 4

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&5&5&5&1&1&5\end{pmatrix}$ –•–•–•–•–•–•–• 5

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&5&5&5&1&1&6\end{pmatrix}$ 6

Minden $F(n)$ gráfhoz rendelhető a szokásos módon egy *adjecencia mátrix*, vagyis egy olyan 0, 1 elemekből álló $\|a_{ij}\|$ négyzetes mátrix, amelynek a_{ij} eleme 1, ha az $F(n)$ gráf i szögpontjából j-be irányított él indul, 0 egyébként.

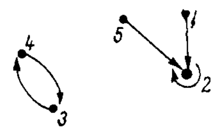
Az $F(n)$ gráfokhoz tartozó adjecencia mátrixokat *leképezés mátrixoknak* fogjuk nevezni. (CLIFFORD, PRESTON [3] I. köt. 116. oldalon és II. köt. 280. oldalon foglalkozik a leképezés mátrixokkal és ezeket „row monomial" mátrixoknak nevezi. További eredmények találhatók a félcsoportok mátrix ábrázolására pl. [67]-ben.) A leképezés mátrixok a permutáló mátrixok általánosításaként tekinthetők, egy további általánosítás, ha az összes $n \times n$ méretű 0, 1 mátrixokat tekintjük. Ezek a szokásos mátrix szorzásra nézve egy, a bináris relációk félcsoportjával izomorf félcsoportot alkotnak, ha a 0, 1 között a logikai összeadás, illetve szorzás van definiálva. Ezt a félcsoportot B_n-nel jelöljük és könnyen belátható, hogy B_n rendje 2^{n^2}, valamint fennáll $F_n \subset B_n$ is, ha $n > 1$. A B_n mátrix ábrázolása is felfogható mint gráfok adjecencia mátrixa és így adódik B_n gráf ábrázolása is. Ez utóbbi gráf-ábrázolás eltér az általánosított *Cayley*-gráftól. B_n számos tulajdonságát vizsgálták, lásd pl. [32]. A leképezések olyan általánosítását, hogy bármely 0, 1 négyzetes mátrixhoz tartozzék egy leképezés, már G. ANDREOLI ismerte (lásd [1]).

A következőkben bevezetésre kerülő fogalmak egy részét a későbbiekben ki fogjuk terjeszteni B_n elemeire.

Egy $F(n)$ gráf olyan diszjunkt gyengén összefüggő komponensekre esik szét, amelyek mindegyike egy irányított kört és a körbe irányuló fákat tartalmaz.

Például:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$



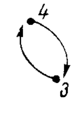
Az $F(n)$ gráf egy összefüggő komponenséhez tartozó leképezést *általánosított ciklusnak* nevezzük. Ez az elnevezés azért indokolt, mivel permutáció esetén a megfelelő gráfban levő komponensekhez az elemidegen ciklusok tartoznak. Az előző példában szereplő leképezés általánosított ciklusokra való felbontása a következő

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nyilvánvaló a következő megfeleltetés

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$



A permutációkra ismeretes azon tétel, amely szerint egy permutáció elemidegen ciklusokra való felbontása a ciklusok sorrendjétől eltekintve csak egyféleképpen történhet, kiterjeszthető leképezésekre is, ha a ciklus szót általánosított ciklussal helyettesítjük.

Hagyjuk el egy $F(n)$ gráfból a körbe irányuló fákat a körben levő gyökérpontoktól eltekintve. Ekkor egy olyan speciális $F(k)$ $(k \leqq n)$ gráfot nyerünk, amely irányított körökből áll és ezért az így nyert $F(k)$ gráfnak egy permutáció felel meg. Ezt a permutációt a leképezés *főpermutációjának* nevezzük. Például az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ leképezés főpermutációja a}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ permutáció.}$$

α leképezés főpermutációját $f(\alpha)$-val fogjuk jelölni.

3. TÉTEL. *Tetszőleges leképezés előállítható*
a) *ciklusok és szinguláris leképezések*
b) *transzpozíciók és szinguláris leképezések szorzataként.*

Bizonyítás. Legyen α tetszőleges leképezés, akkor felírható $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_r$ általánosított ciklusok szorzataként vagyis

$$\alpha = \prod_{i=1}^{r} \alpha_i .$$

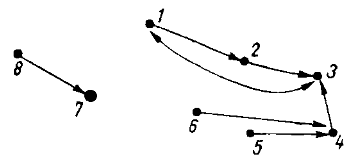
Továbbá $\alpha_i = f(\alpha_i)\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_s$, ahol $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ szinguláris leképezések, amelyek α_i gráf ábrázolásában a köröktől távolodó (vagyis az irányítással ellentétes) irányban levő éleknek felelnek meg. Ezzel az a) állítást igazoltuk.

Mivel $f(\alpha_i)$ transzpozíciók szorzatára bonthatósága jól ismert, a b) állítás is bizonyítást nyert.

KOROLLÁRIUM. *Az összes n-edfokú transzpozíciók és szinguláris leképezések F_n-t generálják.*

A 3. tétel állításának szemléltetésére szolgál a következő példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3) \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 \\ 7 \end{vmatrix} = (1 \quad 2)(1 \quad 3) \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 \\ 7 \end{vmatrix}$$

Könnyű példát találni annak bizonyítására, hogy a permutációk körében érvényes tétel, amely szerint egy permutáció tetszőleges két különböző transzpozíció szorzat alakjában történő előállításában a tényezők számának paritása nem változik, leképezésekre nem vihető át. Például:

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} .$$

Legyen W F_n-beli transzpozíciókból és szinguláris leképezésekből álló halmaz, ekkor W-hez hozzárendelhetünk $2n$ számozott szögponttal rendelkező gráfot, amely

i és j-vel jelzett szögpontjait akkor köti össze él, ha $(ij) \in W$, továbbá $\left|\begin{matrix} 1 \\ k \end{matrix}\right| \in W$ esetén az $l+n$ és $k+n$ jelzésű szögpontokat $l+n$ szögpontból irányított él köti össze. Az így nyert W-hez tartozó $2n$ szögpontú gráfot *általánosított Pólya-gráfnak* nevezzük és $P(W)$-vel jelöljük. PÓLYA GY. alapvető gráfelméleti dolgozatában (lásd [27]) S_n-beli transzpozíciókból álló halmaz gráf ábrázolását oly módon végezte, hogy $P(W)$ a *Pólya*-féle eljárás természetes általánosításának tekinthető.

A hatványozás segítségével F_n elemei két osztályba sorolhatók. Az egyik osztályba tartoznak azon α leképezések, amelyekre létezik olyan s hatványkitevő, hogy $\alpha = \alpha^s$ fennálljon, a másik osztály olyan leképezésekből áll, amelyekre ilyen s nem létezik. Ez utóbbi esetben jelöljük $h(\alpha)$-val azt a legkisebb hatványkitevőt, amelyre $\alpha^{h(\alpha)} = \alpha^s$ fennáll, vagyis $\alpha^{h(\alpha)}$ nem esik α osztályába. $\{\alpha\}$ nem csoport $\{\alpha^{h(\alpha)}\}$ pedig csoport. $h(\alpha)$-t A. SZUSKEVICS [37]-ben módnak, Š. SCHWARZ [31]-ben előperiódusnak, STEINFELD O. [35]-ben második invariánsnak nevezte. Az α-hoz tartozó leképezés gráf maximális famagassága, mint az könnyen látható éppen $h(\alpha)$.

4. TÉTEL. *Az α leképezés által generált struktúra $\{\alpha\}$ akkor és csak akkor csoport, ha α-hoz tartozó leképezés gráfban a legnagyobb famagasság legfeljebb 1.*

Bizonyítás. A hatványozás során a kettő vagy annál nagyobb famagasságok csökkennek. Vagyis ha α famagasságainak maximuma $h(\alpha) \geqq 2$, akkor $h(\alpha^2) \leqq \leqq h(\alpha) - 1$. Ezért, ha $h(\alpha) \geqq 2$, akkor $\alpha = \alpha^s$ nem állhat fenn és így $\{\alpha\}$ nem lehet csoport.

Tegyük fel, hogy $h(\alpha) \leqq 1$. $h(\alpha) = 0$ esetben α permutáció és így $\{\alpha\}$ csoport. Ha $h(\alpha) = 1$, akkor az 1. tétel miatt $h(\alpha^r) = 1$ tetszőleges r esetén ezért és α fokszámának végessége miatt $\{\alpha\}$ csoport.

1. KOROLLÁRIUM. *α akkor és csak akkor eleme F_n egy részcsoportjának, ha $h(\alpha) \leqq 1$.*

2. KOROLLÁRIUM. *Ha $h(\alpha) \geqq 4$, akkor α által generált $\{\alpha\}$ ciklikus félcsoportnak van olyan részfélcsoportja, amely nem ciklikus.*

Bizonyítás. $\{\alpha^3, \alpha^2\}$ nem lehet ciklikus, ugyanis, ha ciklikus lenne, akkor $\{\alpha^2, \alpha^3\} = \{\alpha^2\}$ teljesülne, ez azonban $\alpha^3 \notin \{\alpha^2\}$ miatt lehetetlen.

A továbbiakban annak szükséges és elégséges feltételét is meg fogjuk adni, hogy F_n két eleme mikor generál egy részcsoportot.

5. TÉTEL. $0(\alpha) = h(\alpha) - 1 + 0(f(\alpha))$, *ha* $h(\alpha) \geqq 1$. 1, *ahol* $0(\alpha)$ α *rendjét jelöli.*

Bizonyítás. Ha $h(\alpha) \geqq 2$, akkor $h(\alpha)$ az a legkisebb hatványkitevő, amire α-t felemelve olyan elemet kapunk, hogy $\alpha^{h(\alpha)} = \alpha^r$ egyenlet megoldható legyen.

A legkisebb r megoldás éppen $0(f(\alpha))$ vagyis $\alpha^{h(\alpha)} = \alpha^{0(f(\alpha))}$. Így a különböző α hatványok $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{h(\alpha)} \ldots \alpha^{0(f(\alpha))-1}$, tehát $0(\alpha) = h(\alpha) + 0(f(\alpha)) - 1$.

Az 5. tétel más bizonyításai megtalálhatók a következő dolgozatokban [6], [7], valamint CLIFFORD, PRESTON [3] I. kötet 20. oldal 1.9. tétel.

A. H. CLIFFORD, G, B. PRESTON [3] I. kötet 27 oldalon V. V. VAGNERT követve (lásd [59]) α leképezés *inverzének* nevezi β-t, ha $\alpha\beta\alpha = \alpha$ és $\beta\alpha\beta = \beta$ azonosságok egyidejűleg teljesülnek.

Az eddig bevezetett fogalmak segítségével egy kváziinverz fogalmat fogunk bevezetni, amely különbözik a VAGNER-féle inverztől, s amelyet általánosított inverznek fogunk nevezni. A két inverz fogalom egymáshoz való viszonyát a későbbiek folyamán fogjuk vizsgálni.

Könnyű belátni (lásd [30]), hogy ha α n-ed fokú leképezés, akkor $f(\alpha^k) = = (f(\alpha))^k$, ezért, ellentmondás mentes a következő definíció:

Ha s az a legkisebb hatványkitevő, amelyre α leképezést emelve az $f(\alpha^s) = = (f(\alpha))^{-1}$ egyenlőség teljesül, akkor α^s-t α *kváziinverzének* nevezzük. α kváziinverzét α^{-1}-gyel fogjuk jelölni, hiszen ha α permutáció, akkor α kváziinverze megegyezik az inverzével. Ez a jelölésmód azért nem zavaró, mert az általánosított inverzet, amelyet hasonlóan szokás jelölni, igen ritkán fogjuk használni és a jelölést kizárólag a kváziinverz részére tartjuk fel.

A kváziinverz fogalma kiterjeszthető periodikus félcsoportokra, vagyis olyan félcsoportokra, amelyekben az összes elem végesrendű.

A kváziinverz felhasználásával a kommutátor és a kommutátor részfélcsoport fogalmát természetes módon tudjuk definiálni.

A kváziinverz fogalma kiterjeszthető a reguláris ábrázoláson keresztül absztrakt félcsoportokra is.

Legyen S absztrakt félcsoport az $aba^{-1}b^{-1}$ $(a, b \in S)$ elemeket *kommutátoroknak* nevezzük és az általuk generált részstruktúrát *kommutátor részfélcsoportnak*. A szerző vizsgálta a kommutátor részfélcsoport néhány tulajdonságát ([7], [9]). A kommutátor láncot a csoportokhoz hasonló módon értelmezzük. Így lehetőség nyílik a feloldható félcsoportok bevezetésére; egy félcsoportot *feloldhatónak* nevezünk, ha kommutátorláncának utolsó eleme idempotens.

Az S félcsoport I részfélcsoportját *balideálnak* nevezzük, ha tetszőleges $a \in S$ esetén $aI = I$. Hasonló módon, ha $Ia = I$, akkor I *jobbideál.* Ha I bal- és jobbideál, akkor *ideálnak* nevezzük. S egy nem üres A részhalmaza *kváziideál,* ha $AS \cap SA \subseteq A$ (lásd [33]).

Elemi balideálnak fogjuk nevezni és L_X-szel jelölni T leképezés félcsoport azon részfélcsoportját, amely T összes olyan elemeit tartalmazza, amelyekben képelemenként szereplő betűk az X halmaz elemei.

Egy S félcsoport B részfélcsoportja *biideál,* ha $BSB \subseteq B$.

Legyen S egységelemes félcsoport. Ha p és q két tetszőleges olyan eleme S-nek, hogy $pq = e$ (e jelöli S egységelemét) teljesül, akkor p-t q *balinverzének* és q-t p *jobbinverzének* nevezzük. A *jobb (bal) egység* S-ben definíció szerint egy olyan elem, amelynek van jobb (bal) inverze S-ben. Ha egy $a \in S$ jobb és bal egység, akkor *egység.*

A kváziinverz segítségével a normálosztó fogalma is kiterjeszthető félcsoportokra. S félcsoport R részfélcsoportját akkor nevezzük *normális részfélcsoportnak* vagy *normálosztónak,* ha tetszőleges S-beli a elemre $aRa^{-1} \subseteq R$ teljesül.

2. F_n algebrai tulajdonságai

F_n összes ideáljainak leírását A. M. MALCEV [20]-ban végezte el.

Jelölje $I_{(n,m)}$ F_n-nek olyan elemeiből álló halmazát, amelynek defektszáma legfeljebb m. Ekkor érvényes a

6. TÉTEL. *F_n összes ideáljai az $I_{(n,m)}$ $m = 1, 2, \ldots, n$ halmazok.*

Bizonyítás. Az 1. tételből következik, hogy $I_{(n,m)}$ ideál, így csak azt kell belátni, hogy F_n tetszőleges ideálja az $I_{(n,m)}$ halmazok valamelyikével megegyezik.

Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben létezik olyan I ideál, amely nem egyezik meg semmilyen m-re $I_{(n,m)}$-mel.

Jelölje k azt a legkisebb természetes egész számot, amelyre fennáll $I \subseteq I_{(n,k)}$. Legyen $\alpha \in I_{(n,k)}$ és k definíciója miatt létezik olyan β elem I-ben, hogy $D(\beta) \geqq D(\alpha)$. Ekkor α β által generált F_n-beli főideálhoz tartozik, (lásd CLIFFORD—PRESTON [3] 52. oldal), így $\alpha \in I$ ebből következik, hogy $I_{(n,k)} \geqq I$, vagyis $I_{(n,k)} = I$.

KOROLLÁRIUM. *F_n-ben levő összes szinguláris leképezések $I_{(n,\, n-1)}$ ideált generálják.*

Bizonyítás. Az 1. és 3. tétel alkalmazásával a 6. tétel közvetlen következménye. A 6. tétel kiterjesztése tetszőleges leképezésfélcsoportra K. A. ZARECKIJ [40] munkájában található. A 6. tétel korolláriumánál gyengébb állítás szerepel [66]-ban.

F_n ideáljainak leírása után térjünk át F_n normálosztóira. Nyilvánvaló, hogy minden ideál normálosztó, az állítás megfordítása nem igaz. Ennek bemutatására vonatkozik a következő tétel.

7. TÉTEL. *F_n kommutátor részfélcsoportja normálosztó, de nem ideál.*

Bizonyítás. Először azt fogjuk belátni, hogy F_n kommutátor részfélcsoportja $K_n = (F_n \setminus S_n) \cup A_n$, ahol A_n az n-edfokú alternáló csoportot jelöli. Mint ismeretes, S_n kommutátor részcsoportja A_n, így $A_n \subseteq K_n$. Az összes szinguláris leképezések, mivel ezek kommutátorok, elemei K_n-nek. A 3. tétel bizonyításánál felhasznált konstrukcióból egyszerűen következik, hogy F_n minden olyan α eleme, amelyre $f(\alpha)$ páros, szinguláris leképezések és páros permutációk szorzataként előállítható. Be fogjuk látni, hogy K_n összes eleme is előállítható a fenti módon. Mivel egy tetszőleges leképezés előállítható elemidegen általánosított ciklusok szorzataként, így elég olyan α leképezésre szorítkozni, amely egyetlen általánosított ciklusból áll.

Legyen

$$\alpha = (1\,2 \cdots n)\begin{vmatrix} n \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots n-1 & n \\ 2 & 3 \cdots \;\; 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ha } n \text{ páratlan, akkor } (1\,2 \cdots n), \begin{vmatrix} n \\ 1 \end{vmatrix} \in K_n$$

így $\alpha \in K_n$. Az eljárást iterálva nyerhetjük, hogy tetszőleges olyan leképezés, amely nem permutáció és főpermutációja páratlan, eleme K_n-nek, ha n páros, akkor a bizonyítás hasonló módon történik, azonban n helyére $n-1$ kerül. Tehát azt nyertük, hogy F_n kommutátor részfélcsoportja K_n. A_n-nel való analógia kedvéért K_n-et az *n-edfokú alternáló félcsoportnak* fogjuk nevezni.

Legyen α páratlan permutáció $\alpha K_n \subsetneqq K_n$, így K_n nem ideál. Azonban az 1. tétel felhasználásával triviálisan adódik, hogy tetszőleges $\alpha \in F_n$ esetén $\alpha K_n \alpha^{-1} \subseteq K_n$.

N. ITO [13] és O. ORE [25] egymástól függetlenül bebizonyították, hogy $n \geqq 5$ esetén A_n minden eleme kommutátor. A szerző azt sejti, hogy hasonló eredmény igaz K_n-re is, vagyis $K_n (n \geqq 5)$ összes eleme kommutátor (lásd [9]). K_n és A_n közötti analógiára további adalékot nyújt a 8. tétel. A 8. tétel (lásd [9]) azon ismert csoportelméleti eredmény kiterjesztése félcsoportokra, amely szerint A_n kommutátor részcsoportja önmaga.

8. TÉTEL. *K_n kommutátor részfélcsoportja önmaga.*

Bizonyítás. Mivel a páros permutációk és a szinguláris leképezések elemei K_n-nek és ezek egyben generálják is K_n-et, így K_n kommutátor részfélcsoportja önmaga.

9. TÉTEL. *F_n összes normálosztói K_n és $I_{(n,m)}$, $m=1,2,\ldots,n$, valamint $I_{(n,n-1)}\cup\varepsilon$, ahol ε az egység permutációt jelöli.*

Bizonyítás. A 6. és a 7. tétel, valamint triviális meggondolások biztosítják, hogy K_n, $I_{(n,n-1)}\cup\varepsilon$, $I_{(n,m)}$ $m=1,2\ldots n$ részfélcsoportok normálosztók, így csak annak bizonyítása marad hátra, hogy F_n-nek nincs egyéb normálosztója.

A bizonyítás első lépéseként tegyük fel, hogy F_n N normálosztójában van olyan elem, amely permutáció, ekkor nyilván $\varepsilon\in N$. Ebből következik, hogy N tartalmazza F_n összes szinguláris leképezését. Ennek belátására jelölje σ_i $i=1,2,\ldots,(n-1)^2$ F_n szinguláris leképezéseit, így fennáll a $\sigma_i\varepsilon\sigma_i^{-1}=\sigma_i$ azonosság, vagyis $\sigma_i\in N$. Nyilvánvalóan σ_i segítségével F_n minden idempotens eleme, amely különbözik az egység permutációtól előállítható. J. M. HOWIE bebizonyította (lásd [66]), hogy F_n az egység permutációtól különböző idempotensei által generált részfélcsoport $I_{(n,n-1)}$. (Erősebb állítás is igaz, lásd a 6. tétel korollháriumát.) Így nyilván N csak $I_{(n,n-1)}\cup N_n$ alakú lehet, ahol N_n S_n normálosztója. Mint ismeretes, ha $n\geqq 3$, akkor S_n egyetlen valódi normálosztója A_n, esetünkben azonban ε-t is egyetlen elemből álló normálosztónak kell tekintenünk. $n=2$ esetén $K_n=I_{(n,n-1)}\cup\varepsilon$.

A továbbiakban tegyük fel, hogy N nem tartalmaz permutációt, valamint hogy $I_{(n,k)}\subset N$ és $I_{(n,k+1)}\not\subset N$. Ekkor létezik olyan $k+1$ defektű α eleme F_n-nek, hogy $\alpha\in N$. Ha $\pi_1,\pi_2\ldots,\pi_{n!}$ jelöli S_n elemeit, akkor N normálosztó tulajdonsága miatt $\pi_i\alpha\pi_i^{-1}\in N$ $(i=1,2,\ldots,n!)$. Következésképpen N-nek tartalmaznia kell F_n összes α-val azonos típusú elemét. Könnyű belátni, hogy alkalmas σ szinguláris leképezés esetén $\sigma\alpha=\beta$ oly módon, hogy α és β típusa különböző. Továbbá az is igaz, hogy ha σ_{ij}-vel szinguláris leképezéseket jelölünk, akkor $\prod_{j=1}^{m}\sigma_{ij}\alpha=\beta$ alakban előállítható β elemek olyanok lesznek, hogy F_n tetszőleges $k+1$ defektű elem típusához tartozni fog legalább egy β. Következésképpen $\pi_i\beta\pi_i^{-1}$ $(i=1,2,\ldots,n!)$ alakban F_n tetszőleges $k+1$ defektű leképezése előáll. Vagyis $I_{(n,k+1)}\not\subset N$ feltétel nem teljesülhet, ha $\alpha\in N$ $k+1$ defektű. Így adódik a tétel állításának helyessége, ha N legnagyobb defektű elemének defektszáma $m(m<n)$, akkor $N=I_{(n,m)}$. A normálosztók vizsgálata után rátérünk a maximális csoportok leírására. Először a következőkben többször idézett 10. tételt fogjuk bebizonyítani, amely szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy két leképezés mikor lehet eleme ugyanannak a csoportnak.

10. TÉTEL. *Legyenek $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ n-edfokú leképezések. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\}$ struktúra csoport legyen az, hogy*

1. *$f(\alpha_1), f(\alpha_2),\ldots,f(\alpha_r)$ elemhalmaza megegyezzék,*
2. *$h(\alpha)_i\leqq 1$ $i=1,2,\ldots,r$,*
3. *legyen $m\notin f(\alpha_i)$ $i=1,2,\ldots,r$, akkor ha $\alpha_i(m)=m_i$ és legyen j_i az egyetlen olyan betű, amelyre fennáll, hogy $j_i\in f(\alpha_i)$, és $\alpha_i(j_i)=m_i$, akkor $j_1=j_2=\ldots=j_r$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az 1. feltétel nem teljesül. Ekkor $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\}$ nem lehet csoport, mert legalább két idempotens elemet tartalmaz. Amennyiben a 2. feltétel nem teljesül egy α_j elemre, akkor $\{\alpha_j\}$ nem csoport és így $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,i\,\alpha_r\}$ sem lehet csoport. A 3. feltétel szükségessége a következő módon látható be: $k\notin f(\alpha_i)$ és az egyetlen elem $j_i\in f(\alpha_i)$, úgy hogy fennáll $\alpha(j_i)=k_i$. Mivel $\{\alpha_i,\alpha_2,\ldots\alpha_r\}$ csoport, így csak egyetlen I idempotens eleme van és $I=\alpha_i^q$ miatt $I(k)=j_i$, ezért $j_1=j_2=j_3\ldots=j_r$, amivel a 3. feltétel szükségességét igazoltuk. A tétel bizonyításához ezek után azt kell kimutatni, hogy az 1, 2, 3 feltételek együttesen elégségesek is.

Az $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r\}$ struktúra a leképezések szorzásának asszociativitása miatt asszociatív. Az 1. feltétel teljesülése miatt ha van is több idempotens, ezek főpermutációja megegyezik. A 3. feltétel biztosítja, hogy a farész is megegyezzék, így csak egyetlen idempotens elem lehet. Jelölje az idempotens elemet ε. Az előzőekből tudjuk, hogy $\varepsilon = \tau^d$, ahol τ tetszőleges eleme a struktúrának és d τ rendje $\tau^d\tau = \tau\tau^d = \tau^{d+1}$, akkor a 2. tulajdonság miatt $\tau^{d+1} = \tau$. Következésképpen ε egységelem.

A 2. feltétel miatt a kváziinverz megegyezik az inverzzel. Mivel $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ tetszőleges elemeinek van inverze, ezért csak azt kell bebizonyítani, hogy pontosan egy inverze van. Ezt a 3. feltétel biztosítja.

11. TÉTEL. *Legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ leképezések G n-edrendű csoport generátor elemei és $h(\alpha_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots, r$. Ekkor $\alpha_1, f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_r)$ megadásával G összes eleme egyértelműen meghatározható.*

Bizonyítás. Mivel G csoport, ezért felhasználjuk a 10. tételben szereplő 3. tulajdonságot, amelynek segítségével adódik, hogy α-ból és $f(\alpha_i)$-ből $(i = 2, \dots r)$ az $\alpha_2, \dots, \alpha_r$ elemek egyértelműen meghatározhatók. Mivel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ generátorrendszerét alkotják G-nek, G összes eleme egyértelműen meghatározható.

1. KOROLLÁRIUM. *Tetszőleges félcsoportban az idempotensek száma megegyezik a maximális részcsoportok számával.*

2. KOROLLÁRIUM. *Egy tetszőleges félcsoport két maximális részcsoportja közös elem nélküli.*

12. TÉTEL. *F_n részcsoportjai a k-adfokú $(k = 1, 2, \dots, r)$ szimmetrikus csoporttal izomorfak.*

Bizonyítás. A 11. tétel szerint egy részcsoport elemeinek főpermutációi által izomorfiáig egyértelműen meg vannak határozva. Mivel egy részcsoportban két elem főpermutációjának elemhalmaza nem lehet különböző (lásd 10. tétel 1. feltétel), ilyen módon ha egy elem főpermutációja k-adfokú, akkor tekinthetjük az összes ugyanazon a k betűn értelmezett fő permutációt. Ez természetesen maximális és izomorfiáig egyértelműen meghatározza F_n egy maximális részcsoportját, azért csak izomorfiáig, mert az elem farésze tetszőlegesen választható, ennek megválasztása után a többi elem farésze egyértelműen meghatározott (lásd 11. tétel). Másrészt, ha adott egy részcsoport elemei főpermutációinak halmaza és az nem meríti ki a szimmetrikus csoportot, akkor az elemek által meghatározott részcsoport nem lehet maximális, mivel részcsoportja annak a csoportnak, amelyben az elemek fő permutációi kimerítik a k-adfokú szimmetrikus félcsoportot. Így F_n minden maximális részcsoportja S_k-val izomorf, másrészt bárhogyan adunk meg S_k-t, $k = 1, 2, \dots n-1$ esetén F_n-nek van olyan valódi leképezésekből álló maximális részcsoportja, amely S_k-val izomorf.

1. KOROLLÁRIUM. *F_n tetszőleges maximális részcsoportjának rendje $k!$ $(k \leqq n)$.*

2. KOROLLÁRIUM. *Tetszőlegesen megadott k $(k \leqq n)$ természetes egész esetén található olyan maximális részcsoport F_n-ben, amelynek rendje $k!$*

Š. SCHWARZ azt sejtette (lásd [32]), hogy a 12. tétel érvényben marad, ha F_n helyett az n elemű halmazon értelmezett bináris relációk félcsoportját B_n-t írjuk. Š. SCHWARZ sejtésének megcáfolására a jelen tanulmány III. részében térünk vissza.

E tulajdonságú egy félcsoport akkor, ha minden valódi részfélcsoportja csoport. Az E tulajdonságú félcsoportok jellemzését POLLÁK GY.—RÉDEI L. adta meg (lásd [26]). Az előző eredmények felhasználásával lehetőség nyílik eredményüknek egy egyszerű bizonyítására.

13. TÉTEL. *Egy félcsoport akkor és csak akkor E tulajdonságú, ha az alábbi feltételek egyike teljesül:*
1. *csoport,*
2. *ciklikus félcsoport,*
3. *másodrendű félcsoport.*

Bizonyítás. A tétel állítása abban az esetben ha S csoport, nyilvánvaló, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy S nem csoport. Ha S egyetlen α elemmel van generálva, akkor $h(\alpha) \leqq 2$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\{\alpha\} = S$ és $h(\alpha^2) = 2$ és így $\{\alpha\}^2$ nem csoport és $\{\alpha^2\} \subset S$ ami ellentmond az E tulajdonságnak.

Ha S nem ciklikus, vagyis legalább két elem által generált, akkor maximális részcsoportjainak egyesítése. Tegyük fel, hogy S nem lenne csoportok egyesítése, akkor létezik olyan $\alpha \in S$, amely nem eleme S egyetlen részcsoportjának sem, így $\{\alpha\}$ nem csoport, mivel S-ről feltettük, hogy nem ciklikus, ezért az, hogy $\{\alpha\}$ nem csoport, ellentmond az E tulajdonságnak. S inverz félcsoport, mivel minden elemének van csoport inverze, de nem lehet más általánosított inverze. Tegyük fel,hogy S-ben két idempotens elem van: τ_1, τ_2. Ekkor [3] I. köt. 4.8. segédtétel szerint $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$, másrészt, mivel S E tulajdonságú, $\{\tau_1, \tau_2\} = S$. Mivel $\tau_1\tau_2$ is $\tau_1\tau_2\tau_1\tau_2 = \tau_1\tau_1\tau_2\tau_2 = \tau_1\tau_2$ miatt idempotens, így S kommutatív és idempotens elemekből áll.

Mivel $\{\tau_1, \tau_2\} = S$, ezért S legfeljebb három elemet tartalmazhat, ezek $\tau_1, \tau_2, \tau_1\tau_2$. Ha $\tau_1 \neq \tau_2 \neq \tau_1\tau_2$, akkor $\{\tau_2, \tau_1\tau_2\} \neq S$ és ez ellentmond az E tulajdonságnak. Ha S két elemű, vagyis $\tau_1 = \tau_1\tau_2$, akkor valóban E tulajdonságú. Egy E tulajdonságú félcsoport nem generálható kettőnél több elemmel, mert akkor lenne két idempotens által generált valódi részfélcsoportja.

14. TÉTEL. *Ha egy S leképezésfélcsoport elemeinek fő permutációi azonos halmazon vannak értelmezve, akkor a különböző fő permutációk halmaza (maximális) csoport homomorf kép.*

Bizonyítás. Ha $\alpha_i \in S$, akkor a keresett homomorf ϱ leképezés $\alpha_i \xrightarrow{\varrho} f(\alpha_i)$ megfeleltetéssel adható meg. ϱ műveletartó, mert ha $\alpha_i, \alpha_i^* \in S$ és $\alpha_i = \alpha_i f(\alpha_i)$, $\alpha_i^* = \alpha_i^* f(\alpha_i^*)$, akkor $\alpha_i \xrightarrow{\varrho} f(\alpha_i)\alpha_i^{*\prime} \xrightarrow{\varrho} f(\alpha_i^*)$, továbbá $f(\alpha_i\alpha_i^*) = f(\alpha_i)f(\alpha_i^*)$ és így valóban a ϱ leképezés műveletartó, mivel $\alpha_i\alpha_i^* \xrightarrow{\varrho} f(\alpha_i\alpha_i^*) = f(\alpha_i)f(\alpha_i^*)$.

A főpermutációk halmaza szorzásra nézve zárt és így a ϱ leképezés segítségével, S-nek egy csoport homomorf képét nyerjük.

1. KOROLLÁRIUM. *Minden feloldható leképezésfélcsoport homomorf képe, elemei főpermutációinak halmaza.*

2. KOROLLÁRIUM. *Minden egységelemes leképezésfélcsoport csoport homomorf képe, elemei különböző főpermutációinak halmaza.*

15. TÉTEL. *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az S leképezésfélcsoport, elemidegen részcsoportok egyesítéseként előállítható legyen az, hogy ha $\alpha \in S$, akkor $h(\alpha) \leqq 1$.*

Bizonyítás. A feltétel szükségessége triviálisan következik a 4. tételből. Mivel $\alpha \in S$ esetén $h(\alpha) \leqq 1$, ezért az azonos elemhalmazokon értelmezett főpermutációval rendelkező leképezések olyan félcsoportot alkotnak, amely maximális részcsoportjainak egyesítése. Így a 11. Tétel 2. Korolláriumából és egyszerű meggondolásokból adódik a feltétel elégségessége.

1. KOROLLÁRIUM. *Ha $n > 2$, F_n nem állítható elő csoportok egyesítéseként.*

Bizonyítás. Ha $n > 2$, akkor F_n-ben van olyan α elem, hogy $h(\alpha) > 1$ és így α a 10. tétel szerint nem lehet eleme egyetlen részcsoportnak sem.

2. KOROLLÁRIUM. *F_2 előállítható csoportok egyesítéseként.*

Ez az állítás megtalálható [3] I. kötetének 4.1. pontjában. (6. feladat.)

3. KOROLLÁRIUM. *Egyszerű félcsoportok előállíthatók csoportok egyesítéseként*

16. TÉTEL. *(Croisot) Ha $n > 2$, F_n nem állítható elő egyszerű félcsoportok egyesítéseként* (lásd [4]).

Bizonyítás. [3] I. kötet 4.6. tétele és a 15. tétel együttesen biztosítja, hogy F_n ($n > 2$) nem lehet teljesen egyszerű félcsoportok egyesítése. Jól ismert (lásd pl. [3] I. köt. 76. old.), hogy véges egyszerű félcsoportok teljesen egyszerűek. Így ha F_n-nek lenne egyszerű félcsoportokra való felbontása, akkor ez egyben egy teljesen egyszerű félcsoportokra való felbontást is jelentene, ami az előzőek szerint lehetetlen.

A 16. tétel a 15. tétel 3. korolláriumának közvetlen következménye.

F_n egyoldali ideáljainak leírása F_n magjának meghatározása szempontjából lényeges.

17. TÉTEL. *F_n egy részfélcsoportja akkor és csak akkor balideál, ha elemi balideál vagy elemi balideálok egyesítéseként előállítható.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in L_X$ (L_X elemi balideált jelöl), ekkor $F_n\alpha = L_X$. Jelölje L F_n-nek tetszőleges balideálját. Ha $\alpha \in L$, akkor $L_{X_1} \subseteq L$. Tegyük fel, hogy $L_{X_1} \subset L$ és $\beta \in L$, de $\beta \notin L_{X_1}$. Ekkor $F_n\beta = L_{X_2}$, továbbá $L_{X_1} \cup L_{X_2}$ részfélcsoport, hiszen az $\alpha\beta$ típusú elemek L_{X_2}-nek a $\beta\alpha$ típusúak L_{X_1}-nek elemei. Ha létezik olyan $\gamma \in L$, hogy $\gamma \notin L_{X_1} \gamma \notin L_{X_2}$, akkor $F_n\gamma = L_{X_3}$. Az eljárást addig folytatjuk, amíg L minden eleméhez tartozó elemi balideált kiválasztottuk és ekkor L nyilvánvalóan előállítható a kiválasztott elemi balideálok egyesítéseként.

KOROLLÁRIUM. *F_n minimális balideáljainak mindegyike egy elemű, egy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & i & \dots & i \end{pmatrix}$ alakú leképezést tartalmaz. Így a különböző minimális balideálok száma n.*

18. TÉTEL. *F_n jobbideáljai a kétoldali ideálokkal egyeznek meg.*

Bizonyítás. Felhasználva a 6. tételnél alkalmazott jelölést, jelölje $I_{(n,m)}$ $m = 1, 2, \dots$ $\dots n$ F_n ideáljait. Ekkor $I_{(n,m)} F_n = I_{(n,m)}$, mivel ha ε jelöli F_n egység elemét, akkor $I_{(n,m)}\varepsilon = I_{(n,m)}$ teljesül. Ennélfogva minden jobbideál kétoldali ideál. Az állítás fordítottja nyilvánvaló.

KOROLLÁRIUM. *F_n minimális jobbideálja megegyezik minimális ideáljával, vagyis* $I_{(n,1)}$.

19. TÉTEL. *F_n magja $I_{(n,1)}$.*

Bizonyítás. A. SZUSKEVICS bebizonyította (lásd [36], valamint [3] I. kötet 207. old), hogy minden véges félcsoportnak van egy magja, amely összes minimális balideáljainak, illetve összes minimális jobbideáljainak egyesítése. A. SZUSKEVICS tételének és a 17. tétel korolláriumának közvetlen következménye, hogy F_n magja $I_{(n,1)}$. A 17. tétel korolláriuma helyett alkalmazhatjuk a 18. tétel korolláriumát is a tétel bizonyításához.

20. TÉTEL. *F_n kváziideáljai a balideáljaival egyeznek meg.*

Bizonyítás. STEINFELD O. ([33], [34], valamint [3] I. kötet 85. old.) tétele szerint egy félcsoport részhalmaza akkor és csak akkor kváziideál, ha a félcsoport egy bal- és egy jobbideáljának metszete. STEINFELD O. tétele és a 17., valamint 18. tételek alkalmazásával a 20. tétel állítása egyszerűen bizonyítható.

21. TÉTEL. *F_n minimális kváziideáljai a minimális balideálokkal egyeznek meg.*

Bizonyítás. A 21. tétel a 20. tétel közvetlen következménye.

22. TÉTEL. *F_n bi- és kváziideáljai megegyeznek.*

Bizonyítás. Mivel F_n reguláris (lásd [3], I. kötet 33. old., valamint [10]) alkalmazható LAJOS S. tétele: egy reguláris félcsoport minden biideálja kváziideál (lásd [19]. Másrészt egy félcsoport kváziideálja egyben biideál is. (Lásd [3], I. köt. 85. old.)

KOROLLÁRIUM. *F_n biideáljai a balideáljaival egyeznek meg.*

23. TÉTEL. *Ha egy S leképezés félcsoport, amelynek rendje n, tartalmaz egy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & i & \dots & i \end{pmatrix}$ alakú leképezést, akkor magja $S \cap I_{(n,1)}$.*

Bizonyítás. A. SZUSKEVICStől származik az az eredmény (lásd [3] I. köt. 85. old.), amely szerint ha egy félcsoport magjának és egy részfélcsoportjának van közös eleme, akkor a részfélcsoport magja megegyezik a részfélcsoport és az eredeti félcsoport magjának metszetével. Mivel S F_n-nek részfélcsoportja, ezért ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i & i & \cdots & i \end{pmatrix} \in S \quad \text{akkor } S \text{ magja} \quad S \cap I_{(n,1)}.$$

KOROLLÁRIUM. *Ha A absztrakt félcsoport tartalmaz balzérus elemet, akkor A magja a balzérus elemekből fog állni.*

Bizonyítás. Legyen S leképezés félcsoport A reguláris ábrázolása, ekkor S tartalmaz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & i & \dots & i \end{pmatrix}$ alakú leképezést és így alkalmazható a 23. tétel.

24. TÉTEL. *F_n összes olyan elemeinek P_X halmaza, amely elemek mindegyikének főpermutációjában az X halmaz összes elemei szerepelnek és csak ezek, továbbá $\alpha \in P_X$ esetén $h(\alpha) = 1$, F_n-nek részfélcsoportja.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha, \beta \in P_X$, ekkor $f(\alpha\beta)$ is pontosan az X halmaz elemeiből áll, így $\alpha\beta \in P_X$.

25. TÉTEL. *F_n előállítható elemidegen részfélcsoportjainak egyesítéseként pl. $F_n = S_n \cup I_{(n,n-1)}$ alakban.*

Bizonyítás. S_n részfélcsoport és $\alpha \in S_n$ esetén $D(\alpha) = n$, $\beta \in I_{(n,n-1)}$-ből következik, hogy $D(\beta) \leqq n-1$, mivel $I_{(n,n-1)}$ is részfélcsoport és S_n-nel nincs közös eleme, a tétel állítása bizonyítást nyert.

26. TÉTEL. *Tetszőleges S leképezés félcsoport felbontható elemidegen részfélcsoportjainak egyesítésére, ha $\alpha \in S$, akkor $h(\alpha) = 1$.*

Bizonyítás. Állításunk a 15. tétel következménye.

KOROLLÁRIUM. *Tetszőleges absztrakt félcsoport, amelynek összes ciklikus részfélcsoportja csoport, elemidegen részfélcsoportjainak egyesítéseként felírható.*

Bizonyítás. A reguláris ábrázolás segítségével visszavezethető az absztrakt félcsoport leképezésfélcsoportra is, erre érvényes a 26. tétel. A 4. tétel alkalmazásával teljes a bizonyítás.

A 26. tétel általánosítható, ugyanis SZÉP J. bebizonyította, hogy tetszőleges félcsoport részfélcsoportok egyesítéseként előállítható (lásd [68]).

F_n generátor rendszereivel foglalkozik a 27. és 28. tétel. Számos idevágó eredmény [14]-ben megtalálható.

27. TÉTEL. *$\{S_n, \alpha\} = F_n$ akkor és csak akkor teljesül, ha $D(\alpha) = n-1$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $D(\alpha) = n-2$, akkor a szorzat defektszámaira vonatkozó 1. tétel miatt $n-1$ defektű leképezés nem állítható elő és így $\{S_n, \alpha\} = F_n$ nem állhat fenn. Mivel α $n-1$ defektű, fennáll, hogy $\alpha = f(\alpha)\tau$, ahol τ szinguláris leképezés. Tekintve, hogy

$$f(\alpha) \in S_n \quad f(\alpha)^{-1} f(\alpha)\tau \in \{S_n, \alpha\},$$

vagyis $\tau \in \{S_n, \alpha\}$, de $\beta\tau\beta^{-1}$, $\beta \in S_n$ alakban F_n összes szinguláris leképezése előáll, így $\{S_n, \alpha\}$ elemei között szerepelnek az összes szinguláris leképezések és S_n. A 3. tétel felhasználásával adódik, hogy $\{S_n, \alpha\} = F_n$.

28. TÉTEL. *F_n $(n > 2)$ tetszőleges generátorrendszere legalább három elemű.*

Bizonyítás. Mivel $S_n (n > 2)$ nem ciklikus, így legalább két elemmel generálható. Ily módon a 27. tételből következik a 28. tétel állításának helyessége.

KOROLLÁRIUM. Ha $\{\alpha, \beta, \gamma\} = F_n$, akkor $\{\alpha, \beta\} = S_n$ és $D(\gamma) = n-1$.

29. TÉTEL. *α akkor és csak akkor egysége F_n-nek, ha $\alpha \in S_n$.*

Bizonyítás. Az 1. tétel miatt F_n egységeleme csak két S_n-beli elem szorzataként állítható elő. Mivel F_n egységeleme az egység permutáció, ezért S_n bármely elemét inverzével megszorozva F_n egységeleme előáll.

A 29. tétel bizonyítása A. SZUSKEVICSnél is szerepel (lásd [37], valamint [3] I. köt. 23. old.).

(Beérkezett: 1968. X. 15.)

IRODALOM

[1] ANDREOLI, G.: Sui gruppi di sustituzioni che operano su infiniti elementi, *Circ. Matem. Palermo*, **15**, (1915) 305—335
[2] CAYLEY, A.: The theory of groups: Graphical representation, *Amer. Journ. of Math.* **1** (1878) 174—176
[3] CLIFFORD, A. H.—PRESTON, G. B.: *The algebraic theory of semigroups*, I—II. kötet. Providence. Amer. Math. Soc. 1961, 1967.
[4] CROISOT, R.: Demi-groupes inversifs et demi-groupe reunions de demigroupes simples, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3) **70** (1953) 361—379.
[5] DAVIS, R. L.: The number of structures of finite relations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1963) 486—495.
[6] DÉNES, J.: Connections between transformation semigroups and graphs, *Actes des Journées Internationales d'étude sur la theorie de graphs, Rome, Juillet 1966*, 298—303.
[7] DÉNES, J.: On transformations, transformation semigroups and graphs. Theory of graphs. *Proc. Colloq. Graph Theory held at Tihany 1966*. Akadémiai Kiadó, 1968. 65—75.
[8] DÉNES, J.: Some combinatorial properties of transformations and their connections with the theory of graphs. *Journal of Combinatorial Theory* (megjelenés alatt).
[9] DÉNES, J.: On some properties of commutator subsemigroups *Publicationes Mathematicale Debrecen* **15** (1968) 283—285.
[10] DOSS, C. G.: *Certain equivalence relations in transformation semigroups*, M. A. Thesis, University of Tennessee, 1955.
[11] FROBENIUS, G.: Über endliche Gruppen, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, Berlin, 1895. 163—194.
[12] HARARY, F.: The number of functional digraphs. *Math. Annalen*, **138** (1959) 203—210.
[13] ITO, N.: A theorem on alternating group, *Math. Japonicae* **2** (1951) 59—60.
[14] JONSSON, B.: Defining relations for full semigroups of finite transformations, *Michigan Math. J.* **9** (1962) 77—85.
[15] JORDAN, C.: *Traité des substitutions et des équations algebriques*, Gauthiers-Villars, Paris, 1870.
[16] KATZ, L.: Probability of indecomposability of random mapping function, *Ann. Math. Stat.* **26** (1953) 512—517.
[17] KRAUSE, H. M.: *Gruppenstruktur und Gruppenbild.* Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Promotions Arbeit. 1953.
[18] ЛЯПИН, Е. С.: *Полугруппы*, Гос. Изд. физ. мат. лит., Москва, 1960.
[19] LAJOS, S.: Generalized ideals in semigroups, *Acta Sci. Math. Szeged* **22** (1961) 217—222.
[20] МАЛЬЦЕВ, А. М.: Симметрические группоиды, *Мат. сбор.* **31** (73) (1952) 136—151.
[21] MANNING, W. A.: *Primitive groups*, Stanford Univ. Press, Stanford California 1921.
[22] MOORE, E. H.: A definition of abstract groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **3** (1902) 485—492.
[23] NICOLAS, J.: *Sur l'ordre maximum d'un élément das le groupe S des permutations*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (Théorie des numbers) 8e année 1966/1967 No. 11. és *Acta Arithmetica* **14** (1968) 315—332.
[24] ORE, O.: Graphs and correspondences, *Festschift zum 60. Geburstag von Prof. Andreas Speiser*, Zürich, Orell Füssi Verlag, 1945. 184—191.
[25] ORE, O.: Some remarks on commutators, *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951) 307—314.
[26] POLLÁK, GY.—RÉDEI, L.: Die Halbgruppen deren alle echten Teilhalbgruppen Gruppen sind, *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959) 125—130.
[27] PÓLYA, GY.: Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen, *Acta Math.* **68** (1937) 145—254.
[28] RÉNYI, A.: On connected graphs, *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* **4** (1959) 385—388.
[29] ROSTA, J.: Über eine Erweiterung des Cayleyschen Satzes, *Math. Nachtrichten* **41** (1969) 223—226.
[30] SCHERMANN ÁKOSNÉ: *Leképezések, leképezésfélcsoportok*, Egyetemi doktori disszertáció, Budapest, 1967.
[31] SCHWARZ, Š: Teoria pologrup. *Sbornik prác Prirodovedeckej Fakulty Slovenskej Univerzity V Bratislave* No6, Egyetemi doktori disszertáció, Pozsony, 1943.
[32] SCHWARZ, Š.: The semigroup of binary relations on a finite set, A „*Semigroup theory and applications*" szimpóziumon megtartott előadás kivonata. (Smolenice, 1968. június 17—22)
[33] STEINFELD, O.: Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publ. Math. Debrecen* **4**, (1956) 262—275.
[34] STEINFELD, O.: Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichen Suschkewitsch Kern, *Acta Sci. Math. Univ. Szeged* **18**, (1957) 235—242.
[35] STEINFELD, O.: Über Semiringe mit multiplikativer Kürzungsregel, *Acta Sci. Math. Univ. Szeged* **23** (1963) 191—195.

[36] Suschkewitsch A.: Untersuchungen über verallgemeinerte Substitutitionen, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici Bologna*, 1928. 147—157.
[37] Сушкевич А.: Теория обобщенных групп. Гос. науч. тех. изд. Укран., Харков 1937.
[38] Wielandt, H.: *Finite permutation groups*, Academic Press. New York, London 1964.
[39] Yoeli, M.: The cascade decomposition of sequential machines, *IRE Trans. EC-10* (1961) 587—592.
[40] Зарецкий К. А.: Об идеалах полугрупп. Успехи математических наук, **14** (№ 6) (1959) 173—174.
[42] Айзенштат А. Я.: О полугруппе всех взаимно однозначных отображений множества натуральных чисел в себя, Учёные зап. Выборгского пед. ин-та **2** (1957) 15—24.
[43] Айзенштат А. Я.: Определяющие соотношения конечных симметрических полугрупп. Матем. Сб. (нов. сер.) **45** (1958) 261—280.
[44] Айзенштат А. Я.: Об определяющих соотношениях симметрических полугрупп, Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, **166** (1958) 121—142.
[45] Байрамов П. А.: К проблеме полноты в симметрической полугруппе конечной степени, Дискретный анализ, вып. **8** (1966) 3—26.
[46] Воробьев Н. Н.: О симметрических ассоциативных системах, Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, **89** (1953) 161—166.
[47] Воробьев Н. Н.: Дефектные идеалы ассоциативных систем подстановок, Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, **16** (1949) 47—53.
[48] Воробьев Н. Н.: О канонических представлениях элементов симметрических ассоциативных систем, Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та им. Герцена, **103** (1955) 75—82.
[49] Глускин Л. М.: Транзитивные полугруппы преобразований. Доклады Академии Наук СССР, **129** (1959) вып. I. 16—18.
[50] Глускин Л. М.: Идеалы полугрупп преобразований, Математический сборник, **47** (89) вып. I. (1959) 111—130.
[51] Глускин Л. М.: Платно вложенные идеалы полугрупп, Доклады Академии Наук. СССР, **131** (1960) вып. 5. 1004—1006.
[52] Зарецкий К. А.: Абстрактная характеристика полугруппы всем бинарных отношений, Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та А. И. Герцена, **183** (1958) 251—265.
[53] Зарецкий К. А.: Об идеалах полугрупп, Успехи Математических Наук **6** (1959) 14 вып. 173—174.
[54] Ляпин Е. С.: Ассоциативные системы всех частичных преобразований, Доклады Академии Наук СССР, **88** (1953) вып. I. 13—15.
[55] Оганесян В. А.: Инвариантные и нормальные подсистемы симметрической системы частичных подстановок, Доклады Академии Наук Армянской СССР, **21** (1955) 2. 49—56.
[56] Оганесян В. А.: Теорема о строении системы подстановок, Армянской Гос. заучный пед. ин. Сборник научных трудов, **3** (1956) 9—17.
[57] Оганесян В. А.: Система частичных подстановок и обобщенная теорема кэли, Армянской Гос. заочный пед. ин. Сборник научных трудов, **3** (1956) 19—31.
[58] Вагнер В. В.: К теории частичных преобразований, Докл. Акад. наук. СССР **84** (1952) 653—656.
[59] Вагнер В. В.: Теория обобщенных груд и обобщенных групп, Мат. сборник, **32** (1953) 545—632.
[60] Вагнер В. В.: Полугруппы частичных преобразований с симметричным отношением транзитивности, Изв. высш. учебн. заведений математика, **1** (1957) 81—88.
[61] Либер Л. Е.: О симметрических обобщенных группах, матем. сб. **33** (1953) 531—544.
[62] Шайн Б. М.: К теории полугрупп преобразований, Тр. молодых ученых саратовск. Ун-та вып. матем. Саратов (1964) 120—122.
[63] Шайн Б. М.: Трансформативные полугруппы преобразований. (1966) **71** Матем. сб. 65—82.
[64] B. M. Schein: Semigroups of transformations. A „*Semigroup theory and applications*" szimpóziumon (Smolenice 1968. június 17—22) megtartott előadás kivonata.
[65] Вагнер В. В.: Обобщенные группы, Докл. Акад. наук. СССР, **84** (1952) 1119—1122.
[66] J. M. Howie: The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation semigroup, *London Math. Soc.* **41** (1966) 707—716.
[67] E. J. Tully: Representation of Semigroup by row-monomial matrices over group, *Proc. Japan Academy* **16**, (1964) 157—160.
[68] Szép J.; Véges félcsoportok struktúrájáról, Kézirat 1969.