A KIEGÉSZÍTŐ VÁLTOZÓK MÓDSZERE

Írta: MAJTHAY ANTAL

1. Bevezetés

A kiegészítő változók módszere DANTZIG és COTTLE munkássága nyomán született, előzményei azonban sokkal korábbi időpontra nyúlnak vissza. Mindenesetre ők javasoltak a konvex kvadratikus programozási feladat megoldására egy, az ekvivalens feladat sajátos szerkezetét mélyen kihasználó megoldó algoritmust [8], [9]. DANTZIG és COTTLE gondolatait TUCKER mélyreható vizsgálat tárgyává tette [62], és ennek eredményeként nemdegenerált feladat esetén az algoritmus logikailag kifogástalan leírását nyerte. E vizsgálatokat folytatva LEMKE arra a felismerésre jutott, hogy az alapgondolat variálásával egyéb problémák is sikeresen kezelhetők [38], [39], [41].

A következő második pontban a probléma kialakulásának a történetét vázoljuk és ennek kapcsán megmutatjuk, hogy a matematikai programozásnak nagyon sok problémája szorosan összefügg az általunk vizsgált, és első pillantásra nagyon speciálisnak tűnő problémával. A harmadik, negyedik és ötödik pontban három, egymással rokon algoritmus leírását és végességük, illetőleg eredményességük, továbbá alkalmazhatósági határaik vizsgálatát találja az olvasó.

2. A kiegészítő változók módszerének kialakulása és a matematikai programozásban betöltött szerepe

2.1. Tekintsük a következő feladatot:

Legyen $\mathbf{w}(\mathbf{z})$ az N-dimenziós euklideszi térnek egy önmagába való leképezése. Keressünk a nemnegatív ortánsban egy olyan $\mathbf{z}$ vektort, amelynek a $\mathbf{w}(\mathbf{z})$ képe ortogonális $\mathbf{z}$-re és ugyanebbe az ortánsba esik.

Kiegészítő változók módszerének egy algoritmuscsaládot nevezünk, amely a $\mathbf{w}(\mathbf{z}) = G\mathbf{z}+\mathbf{g}$ eset vizsgálata során született.

Legyen tehát G $N\times N$-típusú valós elemű mátrix, $\mathbf{g}$ pedig N elemű oszlopvektor. Keressünk olyan N elemű $\mathbf{z}$ és $\mathbf{w}$ oszlopvektort, amelyekre fennáll:

$$\mathbf{w} = G\mathbf{z}+\mathbf{g} \tag{2. 1. 1}$$

$$\mathbf{w} \geqq \mathbf{0} \tag{2. 1. 2}$$

$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0} \tag{2. 1. 3}$$

$$\mathbf{z}^T\mathbf{w} = 0. \tag{2. 1. 4}$$

E képletekben $\mathbf{0}$ zérusvektort jelöl, a vektorok közötti egyenlőtlenség komponensenként értendő, T a transzponálás jele, így $\mathbf{z}^T\mathbf{w}$ a $\mathbf{z}$ és $\mathbf{w}$ vektorok skalárszorzatát jelöli.

A továbbiakban a

$$\min g(\mathbf{x})$$
$$g_i(\mathbf{x}) \geqq 0 \qquad i=1, \ldots, m$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

szimbolikus írásmóddal a következő feladatot fogjuk jelölni:

Határozzuk meg a $g(\mathbf{x})$ valós értékű függvénynek a $g_i(\mathbf{x}) \geqq 0$ $i=1, \ldots, m$ és $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ feltételek által meghatározott halmazon felvett minimumának az értékét, továbbá a halmaznak legalább egy olyan $\mathbf{x}$ pontját, amelyben $g(\mathbf{x})$ értéke minimális, illetőleg mutassuk meg, hogy ilyen nincsen.

Analóg módon értendő a

$$\max g(\mathbf{x})$$
$$g_i(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0} \qquad i=1, \ldots, m$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

szimbolikus írásmód is.

A matematikai programozás elméletében először a lineáris programozás dualitás-tételének vizsgálata során jutottak a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) problémára [61].

Tekintsünk egy kanonikus formában megfogalmazott primál-duál feladatpárt. Legyen A adott $m \times n$ típusú valós elemű mátrix, $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ adott m, ill. n elemű oszlopvektor, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ pedig n, ill. m elemű változó vektorok.

Primál feladat:

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &A\mathbf{x} \geqq \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2. 1. 5}$$

Duál feladat:

$$\begin{aligned} &\max \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ &A^T\mathbf{y} \leqq \mathbf{c} \\ &\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2. 1. 6}$$

Vezessük be az $\mathbf{u}$ n-dimenziós és $\mathbf{v}$ m-dimenziós segédváltozókat. Ezeknek segítségével a feladatpár a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &A\mathbf{x} - \mathbf{v} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \\ &\mathbf{v} \geqq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2. 1. 5'}$$

$$\begin{aligned} &\max \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ &A^T\mathbf{y} + \mathbf{u} = \mathbf{c} \\ &\mathbf{y} \geqq \mathbf{0} \\ &\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2. 1. 6'}$$

A lineáris programozás dualitástétele [6] szerint e feladatok bármelyike akkor és csak akkor oldható meg, ha a másik is megoldható. Eszerint a két feladatot egyszerre is vizsgálhatjuk. Ha bevezetjük a

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ -\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

jelöléseket, akkor e feltételek alakja:

$$\mathbf{w} = G\mathbf{z} + \mathbf{g}$$

$$\mathbf{w} \geqq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}.$$

A kiegészítő eltérések gyenge tétele [6] szerint, egy $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ megengedett megoldáspár, ill. a hozzájuk tartozó $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorok akkor és csak akkor alkotják a feladatpár optimális megoldását, ha

$$\mathbf{x}^T\mathbf{u} = \mathbf{y}^T\mathbf{v} = 0.$$

A nemnegativitási feltételre való tekintettel e feltétel éppen egyenértékű a

$$\mathbf{z}^T\mathbf{w} = 0$$

feltétellel.

Összefoglalva: a (2. 1. 5), (2. 1. 6) lineáris programozási feladatpár ekvivalens a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feladattal.

A lineáris programozással analóg viszonyokat találunk a konvex kvadratikus programozási feladat vizsgálata során is [29].

Tegyük fel, hogy Q $n \times n$-típusú, valós elemű, pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix. A további jeleket átvesszük a (2. 1. 5), (2. 1. 6) feladatokból. Tekintsük a következő kvadratikus programozási feladatot:

$$\min \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}.$$

Minthogy a lineáris feltételek triviálisan teljesítik a *Kuhn—Tucker*-féle feltételminősítést [37], a célfüggvény pedig konvex, azért a *Kuhn—Tucker*-elmélet szerint egy nemnegatív komponensekkel rendelkező $\mathbf{x}$ vektor akkor és csak akkor alkotja a feladat optimális megoldását, ha lehet hozzá olyan nemnegatív $\mathbf{y}$ vektort találni, hogy a

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{y}^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b})$$

Lagrange-függvényre teljesülnek az alábbi feltételek:

$$\begin{aligned} &\nabla_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T Q + \mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T A \geqq \mathbf{0}, \\ (2.1.7)\qquad &\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\mathbf{x}^T A + \mathbf{b}^T \leqq \mathbf{0}, \\ &\nabla_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\mathbf{x} = 0, \\ &\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\mathbf{y} = 0. \end{aligned}$$

Bevezetve az

$$\mathbf{u} = Q\mathbf{x} + \mathbf{c} - A^T\mathbf{y},$$

$$\mathbf{v} = A\mathbf{x} - \mathbf{b},$$

továbbá a

$$G = \begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

jelöléseket, láthatjuk, hogy a (2. 1. 7) feltételek a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) alakot öltik. Eszerint a konvex kvadratikus programozási feladat is ekvivalens a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feltételrendszer megoldásának a feladatával.

Rendkívül érdekes tény, hogy a kvadratikus programozás elmélete egy másik úton is elvezet a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) problémára, mégpedig a lineáris programozáshoz hasonlóan a dualitás gondolatán keresztül.

A dualitás fogalmát DENNIS [12] és DORN [15] terjesztette ki a kvadratikus programozási feladatra, majd később COTTLE [5], ill. DANTZIG és COTTLE [8] általánosították DENNIS és DORN gondolatait. Értékes gondolatokat tartalmaz MOND [51] dolgozata is.

A lineáris programozás elméletében egy feladat duálisát szimbolikus alapon értelmezzük, mégpedig úgy, hogy az nem használható fel közvetlenül általánosítási alapként. Előnyösebb azt vizsgálni, hogy melyek a dualitásnak azok a tényei, amelyekre erősen támaszkodunk, s amelyek a szimbolikától függetlenek. További útmutatást a *Lagrange*-függvény vizsgálata nyújt még, mint azt később látni fogjuk. Az első gondolaton elindulva természetesen adódik a következő:

Két matematikai programozási, mégpedig egy maximumkeresési és egy minimumkeresési feladatot akkor tekintünk egymás duálisának, ha közülük bármelyik feladat optimális megoldásának a létezése maga után vonja a másik feladatra is az optimális megoldás létezését és ez esetben az optimális célfüggvényértékek megegyeznek, továbbá a maximumfeladat célfüggvényének az értéke tetszőleges megengedett megoldás esetén kisebb vagy egyenlő a minimumfeladat tetszőleges megengedett megoldásához tartozó célfüggvény értékével.

Vegyük észre, hogy a definícióban a „duál duálja a primál" általában nem egészen pontos kijelentés is benne foglaltatik.

Tekintsük ezután a következő kvadratikus programozási feladatot:

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{x}^T Q\mathbf{x}+\mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &A\mathbf{x} \geqq \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2. 1. 8}$$

Az egyes szimbólumok jelentése pontosan megegyezik az előzőkben megadottal, azzal a változtatással, hogy Q legyen pozitív definit, de nem feltétlenül szimmetrikus. (A szimmetriával kapcsolatos engedmény e ponton semmitmondó, a később vizsgálandó autoduális esetnél azonban hasznát fogjuk venni.)

W. S. DORN a lineáris programozás dualitástételére támaszkodva megmutatta [15], hogy e feladatnak a fenti értelemben vett duálisa a következő, ugyancsak kvadratikus programozási feladat:

$$\begin{aligned} &\max -\mathbf{u}^T Q\mathbf{u}+\mathbf{b}^T\mathbf{v} \\ &A^T\mathbf{v}-(Q+Q^T)\mathbf{u} \leqq \mathbf{c} \\ &\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2. 1. 9}$$

Tegyük fel mármost, hogy $A=Q=G$ és $-\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{g}$, azaz tekintsük a

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{x}^T G\mathbf{x}+\mathbf{g}^T\mathbf{x} \\ &G\mathbf{x}+\mathbf{g} \geqq \mathbf{0} \\ &\mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2. 1. 10}$$

feladatot. NEUMANN JÁNOSnak egy mátrix-elméleti tételére [53] hivatkozva DORN megmutatta, hogy e feladat feltételei mindig konzisztensek. (COTTLE valamivel egyszerűbben bizonyítja ugyanezt [4] egy GALEtől eredő állításra hivatkozva [21].)

Írjuk fel a feladatnak a (2. 1. 9) szerinti duálisát:

$$\begin{aligned} &\max -\mathbf{u}^T G\mathbf{u}-\mathbf{g}^T\mathbf{v} \\ &G^T\mathbf{v}-(G+G^T)\mathbf{u}-\mathbf{g} \leqq \mathbf{0} \\ &\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2. 1. 11}$$

Az egyenlőtlenségeket balról $\mathbf{v}^T$-vel szorozva, $\mathbf{g}^T$-re becslést nyerhetünk. Ezt és a G mátrix pozitív definit tulajdonságát felhasználva kiderül, hogy optimális megoldás esetén szükségképpen

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}. \tag{2. 1. 12}$$

Ezt a feltételt a (2. 1. 11)-hez hozzávéve, vele optimálisan ekvivalens feladatot kapunk a következő értelemben:

Két matematikai programozási feladatot akkor tekintünk optimálisan ekvivalensnek, ha bennük mind az optimális megoldások halmaza, mind pedig az optimum értéke azonos.

E definíció szerint a (2. 1. 12)-vel kiegészített (2. 1. 11) feladat optimálisan ekvivalens a (2. 1. 10) feladattal, és az is könnyen látható, hogy a közös optimum értéke zérus. E gondolatmenet teljessé tételéhez még annak a kimutatása is szükséges, hogy az adott feltételek mellett a célfüggvény el is éri a minimumát; ez azonban elkerülte DORN figyelmét. Ennek az állításnak a helyességét FRANK és WOLFE már jóval korábban és sokkal általánosabb körülmények között igazolta [20], amikor bebizonyította, hogy alulról korlátos kvadratikus függvény lineáris feltételekkel megadott nem üres tartományon mindig felveszi a minimumát. Ez az állítás egyébként csak legfeljebb másodfokú függvény esetén igaz, magasabb fokú polinom esetén már nem, miként azt KAPLANSKY bebizonyította [62]. Illusztráló példaként tekintsük az egész síkon az $x_1^2+(1-x_1x_2)^2$ függvényt, amely nem éri el értékkészletének alsó határát.

Ha egy matematikai programozási feladat optimálisan ekvivalens a duálisával, akkor azt a feladatot autoduálisnak nevezzük. E fogalommal élve, eredményünket úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a (2. 1. 10) feladat autoduális, mindig konzisztens és az optimális célfüggvényérték zérus. Ez azonban más szóval azt jelenti, hogy pozitív definit G mátrix esetén a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feltételrendszer konzisztens.

DORN eredményének alternatívájaként COTTLE arra az eredményre jutott, hogy pozitív szemidefinit G matrix esetén is mindig létezik a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feltételrendszernek megoldása, feltéve, hogy a (2. 1. 1)—(2. 1. 3) feltételrendszer konzisztens [4].

E vizsgálódás során COTTLE észrevette, hogy a (2. 1. 10) probléma csak első pillantásra tűnik speciálisnak, valójában pedig jelentős kapcsolatban áll a kvadratikus programozás legáltalánosabb feladatával.

A kvadratikus programozási feladatok dualitását vizsgálva ugyanis COTTLE arra az eredményre jutott [5], hogy pozitív szemidefinit $n\times n$ típusú Q és ugyancsak pozitív szemidefinit $m\times m$ típusú P mátrixokkal az alábbi kvadratikus programozási problémák egymás duálisai:

$$\begin{aligned}\min \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T Q\mathbf{x}+\tfrac{1}{2}\mathbf{y}^T P\mathbf{y}+\mathbf{c}^T\mathbf{x}&\\ A\mathbf{x}+P\mathbf{y}+\mathbf{b} &\geqq \mathbf{0}\\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0},\end{aligned}$$

illetőleg

$$\begin{aligned}\max -\tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T Q\mathbf{x}-\tfrac{1}{2}\mathbf{y}^T P\mathbf{y}-\mathbf{b}^T\mathbf{y}&\\ Q\mathbf{x}-A^T\mathbf{y}+\mathbf{c} &\geqq \mathbf{0}\\ \mathbf{y} &\geqq \mathbf{0}.\end{aligned}$$

E tény miatt természetes a következő összetett program megoldását keresnünk:

$$\begin{aligned}\min \mathbf{x}^T Q\mathbf{x}+\mathbf{y}^T P\mathbf{y}+\mathbf{c}^T\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{y}&\\ Q\mathbf{x}-A^T\mathbf{y}+\mathbf{c} &\geqq \mathbf{0}\\ A\mathbf{x}+P\mathbf{y}+\mathbf{b} &\geqq \mathbf{0}\\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}\\ \mathbf{y} &\geqq \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{2. 1. 13}$$

E feladatban a primál és duál célfüggvények különbségének a minimumát keressük az együttesen megengedett megoldások halmazán.

Ha bevezetjük a

$$G = \begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & P \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

jelöléseket, akkor látjuk, hogy a (2. 1. 13) feladat éppen DORN (2. 1. 10) alatti feladatának az alakját ölti fel.

COTTLE szimmetrikus duális kvadratikus programozási feladatainak a célfüggvényei és feltételei egyaránt elegánsan levezethetők egy

(2. 1. 14) $$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x}) - (\tfrac{1}{2}\mathbf{y}^T P\mathbf{y} + \mathbf{b}^T\mathbf{y}) - \mathbf{y}^T A\mathbf{x}$$

függvényből. Ez a megfigyelés vezette DANTZIGot és COTTLEt [9] a következő általánosításra:

Tekintsünk egy, az $m \times n$-dimenziós tér nemnegatív ortánsán értelmezett, kétszer folytonosan differenciálható $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvényt. Tegyük fel, hogy $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ adott $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ vektor esetén az $\mathbf{x}$-nek szigorúan konvex függénye az egész $\{\mathbf{x}:\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$ halmazon, adott $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ vektor esetén viszont az $\mathbf{y}$-nak szigorúan konkáv függvénye az $\{\mathbf{y}:\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}\}$ halmazon. Ekkor $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ segítségével megfogalmazható egy duális feladatpár:

$$\begin{gathered} \min \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{y}^T \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ -\nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}, \end{gathered}$$

illetőleg

$$\begin{gathered} \max \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}. \end{gathered}$$

A fentiek mintájára érdemes ez esetben is megfogalmazni a következő összetett programot:

(2. 1. 15) $$\begin{gathered} \min \mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{y}^T \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq \mathbf{0} \\ -\nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}. \end{gathered}$$

Ha bevezetjük az

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{v}(\mathbf{z}) \end{bmatrix}$$

jelöléseket, akkor a (2. 1. 15) feladat a következő alakot ölti:

$$\min \mathbf{z}^T \mathbf{w}(\mathbf{z})$$
$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) \geqq \mathbf{0} \tag{2. 1. 16}$$
$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}.$$

Ha itt eltekintünk a $\mathbf{w}(\mathbf{z})$ leképezés konkrét definíciójától, akkor egészen általános formában vizsgálhatjuk a (2. 1. 16) feladatot, $\mathbf{w}(\mathbf{z})$-t egyszerűen az N-dimenziós tér egy önmagába való leképezéseként felfogva.

A (2. 1. 16) feladatot a (2. 1. 15) rövid jeleként tekintve, a dualitástételből következik, hogy (2. 1. 16) akkor és csak akkor oldható meg, ha a következő feltételrendszer konzisztens:

$$\mathbf{z}^T \mathbf{w}(\mathbf{z}) = 0$$
$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) \geqq \mathbf{0} \tag{2. 1. 17}$$
$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}.$$

Az általános esetben is világos, hogy a (2. 1. 17) feltételek teljesülése elégséges ahhoz, hogy valamely $\mathbf{z}$ vektor megoldja a (2. 1. 16) feladatot. Röviden megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén szükséges is.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{w}(\mathbf{z})$ a tér differenciálható leképezése. Jelölje

$$\left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right] \quad \text{a} \quad „\mathbf{w}(\mathbf{z})”$$

Jacobi mátrixának a transzponáltját a $\mathbf{z}$ pontban és tegyük fel, hogy valamely — a feltételeknek eleget tevő — $\mathbf{z}$ pontban teljesül a *Kuhn—Tucker*-féle feltételminősítés. Ha ezenkívül még az is igaz, hogy a $\mathbf{z}$ pontban a $\left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right]$ matrix pozitív szemidefinit és $\mathbf{z}$ megoldja a (2. 1. 16) feladatot, akkor $\mathbf{z}^T\mathbf{w}(\mathbf{z}) = 0$; azaz ilyen körülmények között a (2. 1. 17) feltételek teljesülése valóban szükséges az optimalitáshoz.

Az állítás helyességét a *Kuhn—Tucker*-féle tétel felhasználásával könnyen bizonyíthatjuk. A (2. 1. 7) képletekkel analóg feltételeket felírva ugyanis a következőre juthatunk:

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) + \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right](\mathbf{z} - \mathbf{y}) \geqq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{z}^T \left(\mathbf{w}(\mathbf{z}) + \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right](\mathbf{z} - \mathbf{y})\right) = 0$$
$$\mathbf{y}^T \mathbf{w}(\mathbf{z}) = 0.$$

E relációkat, továbbá a premisszáinkat felhasználva, a következőket nyerhetjük:

$$0 \leqq \mathbf{z}^T \mathbf{w}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right] (\mathbf{y}-\mathbf{z}) \leqq (\mathbf{z}-\mathbf{y})^T \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right] (\mathbf{y}-\mathbf{z}) \leqq 0,$$

ez pedig éppen az állításunk helyességét igazolja.

DANTZIG és COTTLE a (2. 1. 16) feladatot vizsgálva [9] arra az alternatív eredményre jut, hogy amennyiben a $\mathbf{w}(\mathbf{z})$ leképezés *Jacobi*-mátrixa pozitív definit $\mathbf{z}$-ben, akkor a tétel a *Kuhn—Tucker*-féle feltételminősítés premisszája nélkül is érvényes marad. A bizonyítás során egy JOHNtól eredő tételre [34] hivatkoznak, amely tétel a *Lagrange*-féle feltételes szélsőértékre vonatkozó tételnek egy a *Kuhn—Tucker*-tételtől kissé eltérő általánosítása.

Visszatérve ezután a (2. 1. 15) programozási feladathoz, láthatjuk, hogy a hozzá tartozó *Jacobi*-mátrix

$$\left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x}^2} & -\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{y}\, \partial \mathbf{x}} \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x}\, \partial \mathbf{y}} & -\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{y}^2} \end{bmatrix}$$

és tetszőleges $(m \times n)$-dimenziós $\mathbf{v}$ vektor és minden $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ esetén

$$\mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x}^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{y}^2} \end{bmatrix} \mathbf{v} \geqq 0.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ konvexitásából, ill. konkavitásából következik. A *Jacobi*-mátrix pozitív szemidefinitsége alapján a fentiek szerint a (2. 1. 15) feladat helyett elég a belőle származtatott (2. 1. 17) feladatot vizsgálni, feltéve természetesen, hogy a meglehetősen nehezen megfogható feltételminősítés teljesül.

A nemlineáris programozási feladatok dualitáselméletét több szerző is továbbfejlesztette, közülük elsősorban MOND [51] és ROCKAFELLAR [55], [56] érdemel említést. Az általánosítás iránya a premisszák gyengítése. Ennek arányában mind erősebb eszközökre van szükség. Mindenesetre pillanatnyilag úgy néz ki, hogy ezek az általánosabb jellegű tételek nem mondanak lényegesen újat a mi tárgyunk szempontjából.

Említést érdemel még, hogy ha a (2. 1. 14) alatt értelmezett $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvényben a P, ill. a P és Q mátrixokat zérusmatrixnak választjuk, akkor speciális esetként visszanyerjük az előzőleg vizsgált feladatokat. Fontos további alkalmazásokként említsük még meg a

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^T A\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

és a

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^T \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

eseteket, amelyekből a konvex programozás lineáris feltételekkel, illetőleg a konvex programozás általános konvex feltételekkel feladatok származtathatók.

2.2. A (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feltételrendszernek a

$$G=\begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}=\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

speciális választás melletti megoldására az első javaslat FRANK és WOLFEtől származik [21]. Megoldási eljárásuk lineáris programozási feladatok véges sorozatából áll, legalábbis abban az esetben, ha Q pozitív szemidefinit.

Ugyancsak a pozitív szemidefinit kvadratikus programozási feladatból nyert (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feladat esetére ad megoldó algoritmust WOLFE [66], akinek módszere már egyetlen — bizonyos mértékig módosított — lineáris programozási szimplex algoritmusból áll. Ennek gondolatmenetét röviden vázoljuk. Felfogásmódját abban lehetne összegezni, hogy keressünk olyan, a (2. 1. 1)—(2. 1. 3) feltételeket kielégítő megoldást, amely még a (2. 1. 4)-et is kielégíti.

Lineáris egyenletrendszer nem-negatív megoldásának a keresésére szolgáló eljárás a lineáris programozás elméletében ismeretes [6]. Ez egyrészt azon a tényen nyugszik, hogy ha egy lineáris egyenletrendszernek van nem-negatív megoldása, akkor nem-negatív bázismegoldása is van, másrészről pedig azon, hogy mesterséges változók bevezetésével mindig lehet nem-negatív bázismegoldást találni. E nemnegatívnak feltételezett mesterséges változókat a következő fogással lehet kiküszöbölni: célfüggvényként bevezetjük ezek összegét és megkíséreljük ezt a célfüggvényt minimalizálni. Akkor és csak akkor érjük el a zérus célfüggvény-értéket, ha a vizsgált egyenletrendszernek van nem-negatív megoldása. A minimalizáció a szimplex módszer felhasználásával történik. Minthogy a szimplex módszer alkalmazása során a bázisba bevonandó vektor felől általában bizonyos szabadsággal dönthetünk, azért a bevonandó vektort kiválasztó szabályt jogunk van egy további feltétellel kiegészíteni. Eszerint sohasem szabad olyan vektort bevonnunk a bázisba, amelynek a kiegészítő párja[1] már benne van.[2]

Az induló bázismegoldás csupa mesterséges változót tartalmaz, így eo ipso kiegészítő megoldás. A belépésre kiválasztott vektor ezt a tulajdonságot sohasem rontja el. A kérdés csak az, hogy a többletszabállyal nem kötjük-e meg túlságosan a kezünket, van-e minden iterációnál olyan vektor, amelynek jogában áll a bázisbelépés.

WOLFE bebizonyította, hogy amennyiben a Q mátrix pozitív definit, akkor a módszer mindig szolgáltat megoldást, ha egyáltalán van.

Az általános pozitív definit, ill. szemidefinit G matrix esetével foglalkozik DANTZIG és COTTLE [8], [9], továbbá TUCKER [62] és GRAVES [24]. Mindannyian ugyanazzal az algoritmussal, pontosabban ugyanazzal a két algoritmussal foglalkoznak, csak különböző nézőpontokból. Matematikai elegancia és szabatosság szempontjából legszebb TUCKER munkája, míg a gondolatok háttere inkább a többi dolgozatból látszik.

DANTZIG és COTTLE algoritmusának alapgondolata a következő: A (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feladathoz kiegészítő, de nem szükségképpen megengedett megoldást mindig lehet találni, hisz $\mathbf{z}=\mathbf{0}$, $\mathbf{w}=\mathbf{g}$ ilyen. Ez más szóval azt jelenti, hogy a kielégítendő feltételek közül a (2. 1. 2) feltételt ideiglenesen elvetjük. Ha $\mathbf{w}=\mathbf{g}$-nek

[1] A megfelelő értelmezést a következő fejezetben adjuk meg.

[2] A valóságos feltétel ennél valamivel kevesebbet követel, itt azonban nem célunk ennek a taglalása.

nincs negatív komponense, akkor a feladatot megoldottuk. Ha van, akkor megkíséreljük ezek számát fogyasztani. Ha a G mátrix pozitív definit, akkor a főátlójában csupa pozitív elem áll, s így egy negatív w_i komponens kiegészítő párjának a zérus értékéről pozitív irányban történő elmozdítása révén remélhető, hogy w_i zérussá válik, z_i pozitívvá. Ha közben egyetlen olyan változó sem válik negatívvá, amely addig pozitív volt, akkor újabb kiegészítő megoldáshoz jutottunk, amely az előzőnél jobb abban az értelemben, hogy kevesebb a negatív komponense. Ha valamelyik, előzőleg nem-negatív változó értéke közben negatívvá válik, akkor bizonyos közbülső intézkedésekkel ez a nehézség elkerülhető és a célt akkor is elérjük. Nagyon lényeges, hogy ha a kapott új bázis segítségével ezután kifejezzük a nembázis-vektorokat, és a nyert mátrix elemeit „helyes" sorrendben helyezzük el, akkor a kapott mátrix újra pozitív definit, s így az új helyzetre az előző gondolat újra alkalmazható. Véges számú iteráció után a negatív komponensek száma elfogy.

Ha a G mátrix pozitív szemidefinit, akkor a közbülső nehézségek megnövekednek, hiszen már csak a főátló elemeinek a pozitivitása sem teljesül feltétlenül. Mindenesetre némi fáradsággal el lehet őket hárítani, s egy finomított algoritmus ebben az esetben is szolgáltat megoldást, ez esetben persze azzal a feltétellel, hogy az létezik.

A továbbiakban Lemke [38], [39], [41] foglalkozott a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feladattal. Az előző négy szerző algebrai szemléletmódjával szemben ő geometriai eszközökkel közelít a problémához. Az új nézőpont új ötletekkel gazdagítja a kérdés irodalmát, a kapott eljárásokat alaposabban megvizsgálva azonban kiderül, hogy lényegükben ezek is algebrai, sőt kombinatorikus természetűek.

3. Kiegészítő változó módszer kopozitív-plusz mátrixú feladat megoldására

3. 1. A (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feladat megoldására szolgáló algoritmus alapgondolatához a következőképpen juthatunk el: a kielégítendő feltételek száma túlságosan sok, így a feladat ideiglenes gyengítése révén próbálunk a feltételeket „majdnem" kielégítő megoldást keresni. Ebből mint indulómegoldásból elindulva, egyik megoldásról a másikra haladunk és közben vigyázunk arra, hogy az újabb megoldások a kielégített feltételek kielégítésének a „mértékében" ne romoljanak. Reméljük, hogy bizonyos körülmények között határozott javulás áll be, s így megoldáshoz jutunk.

A feltételek gyengítésének egyik lehetséges módja a Dantzig és Cottle féle, amelynél a (2. 1. 2) nem-negativitási követelménytől tekintünk el, s egy megoldás „jóságának" a mértéke éppen a kielégített (2. 1. 2) nem-negativitási feltételek száma. E módszert a második fejezetben már vázoltuk.

Másik lehetséges gyengítési mód a (2. 1. 1) egyenletrendszer „elrontása" például azáltal, hogy a G mátrixhoz hozzáfüggesztünk egy további „mesterséges" oszlopot, s a változókat ennek megfelelően kiegészítjük egy további „mesterséges" változóval mégpedig úgy, hogy az így kapott segédegyenletrendszernek legyen a (2. 1. 2)—(2. 1. 4) feltételeket kielégítő megoldása. Az így kapott segédfeladatban azután vigyázva arra, hogy a (2. 1. 2)—(2. 1. 4) feltételek változatlanul érvényben maradjanak, egyik megoldásról a másikra haladva arra törekszünk, hogy a bevezetett mesterséges változó zérus szintre kerüljön, s így az eredeti feladat megoldásához jussunk; látni fogjuk, hogy az eljárás egy, a pozitív szemidefinit matrixok osztályát tartalmazó, de annál lényegesen bővebb mátrixosztály esetén — melyet a kopozitív mátrixok osztályának fogunk nevezni — mindig pozitív eredménnyel zárul; azaz vagy elvezet egy megoldáshoz, vagy pedig megmutatja, hogy nincs megoldás. A módszernek nagy előnye, hogy egyszerűsége miatt könnyen programozható elektronikus számológépre.

3. 2. Definíciók és jelölések. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért újra megfogalmazzuk a megoldandó feladatot:

Legyen

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} \cdots g_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_{m1} \cdots g_{mm} \end{bmatrix} = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m)$$

valós elemekből alkotott mátrix,

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}$$

valós komponensű vektor. Keressünk olyan

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

valós komponensű vektorokat, amelyekre fennállnak a következő feltételek:

(3. 2. 1) $$\mathbf{w} = G\mathbf{z} + \mathbf{g}$$

(3. 2. 2) $$\mathbf{w} \geqq \mathbf{0}$$

(3. 2. 3) $$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$$

(3. 2. 4) $$\mathbf{z}^T\mathbf{w} = 0.$$

A (3. 2. 4) ortogonalitási feltétel, továbbá a (3. 2. 2), (3. 2. 3) nem-negativitási feltételek egyidejű teljesítése azt jelenti, hogy

(3. 2. 5) $$z_i w_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Eszerint a z_i és w_i változók „kiegészítik" egymást. Innen ered a módszer elnevezése.

Nevezzük a (3. 2. 1) feltételt kielégítő $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ párokat megoldásoknak, a (3. 2. 2), (3. 2. 3) feltételeket kielégítő megoldásokat megengedett megoldásoknak, a (3. 2. 4) feltételt kielégítő megengedett megoldásokat pedig kiegészítő megoldásoknak.

Jelöljük az i-dik egységvektort $\mathbf{e}_i$-vel, $i = 1, \ldots, m$, azaz $\mathbf{e}_i$ legyen az az m komponensű vektor, amelynek az i-edik komponense 1, a többi zérus.

Legyen

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i .$$

Tekintsük a következő segédfeladatot:

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} + G\mathbf{z} + \mathbf{e}t \tag{3. 2. 6}$$

$$\mathbf{w} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \geqq \mathbf{0}, \quad t \geqq 0 \tag{3. 2. 7}$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{z} = 0. \tag{3. 2. 8}$$

Itt t valós számot jelöl. A fentiekkel analóg módon beszélünk a (3. 2. 6)—(3. 2. 8) segédfeladat megoldásairól, megengedett megoldásairól és kiegészítő megoldásairól.

Közvetlenül látszik, hogy a segédfeladatoknak van kiegészítő megoldása. Ilyen például a következő:

$$\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

$$t = \max(0, -\min_i g_i),$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} + \mathbf{e}t.$$

A $\mathbf{w}$ és $\mathbf{z}$ vektorok megfelelő, tehát azonos indexű komponenseit kiegészítő változópároknak, s ennek megfelelően az

$$A = (E, -\mathbf{e}, -G)$$

mátrixban az $\mathbf{e}_i$, $-\mathbf{g}_i$, $i = 1, \ldots, m$ párokat kiegészítő vektorpároknak fogjuk hívni. Az A mátrix oszlopait a kényelem kedvéért egységes jellel is ellátjuk:

$$A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+2}, \ldots, \mathbf{a}_{2m+1}).$$

Eszerint

$$\mathbf{a}_p = \begin{cases} \mathbf{e}_p & p = 1, \ldots, m \\ -\mathbf{e} & \text{ha } p = m+1 \\ -\mathbf{g}_{p-(m+1)} & p = m+2, \ldots, 2m+1. \end{cases} \tag{3. 2. 9}$$

Bevezetve az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ t \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{g}$$

jelöléseket, a (3. 2. 6), (3. 2. 7) feltételrendszer a következő alakot ölti:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}_0 \tag{3. 2. 10}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}.$$

Az A mátrix rangja nyilván m, így oszlopvektorterének tetszőleges bázisa m-elemű. A továbbiakban B-vel (esetleg indexszel ellátva) az A oszlopaiból alkotott bázist jelölünk.

Ha

$$B = (\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_m}),$$

akkor legyen

$$I = \{i_1, \ldots, i_m\}.$$

Tetszőleges B bázishoz egyértelműen tartozik egy

$$D = (\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{2m+1}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{i_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{i_m} \end{bmatrix} = (d_{i,p})$$

mátrix, amelyet a

$$BD = (\mathbf{a}_0, A)$$

összefüggés értelmez. A továbbiakban, ha B-t indexszel látjuk el, akkor valamennyi, B-től függő szimbólumot is B-vel azonos indexszel fogjuk ellátni.

A (3. 2. 10) egyenletrendszernek a B bázishoz tartozó bázismegoldását a következőképpen értelmezzük:

$$x_p = \begin{cases} d_{p,0} & \text{ha} \quad p \in I \\ 0 & \phantom{\text{ha}} \quad p \notin I. \end{cases}$$

A B bázist kiegészítő bázisnak nevezzük, ha nem szerepelnek benne kiegészítő vektorpárok.

Egy $\boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}$ sorvektorról azt mondjuk, hogy lexikografikusan pozitív,

$$\boldsymbol{\delta} \succ \mathbf{0},$$

ha balról jobbra haladva az első zérustól különböző komponense pozitív. Azt mondjuk, hogy egy $\boldsymbol{\delta}_1$ vektor lexikografikusan nagyobb egy $\boldsymbol{\delta}_2$ vektornál,

$$\delta_1 \succ \delta_2,$$

ha a $\boldsymbol{\delta}_1 - \boldsymbol{\delta}_2$ különbség lexikografikusan pozitív. Természetesen azt is mondhatjuk, hogy $\boldsymbol{\delta}_2$ lexikografikusan kisebb $\boldsymbol{\delta}_1$-nél.

A most bevezetett reláció rendezi egy vektortér vektorait, így egy vektortérből kiválasztott véges sok vektor esetén mindig értelmes ezek közül a lexikografikus értelemben legkisebbről és legnagyobbról beszélni. Ezeket rendre az l-min és l-max szimbólumokkal fogjuk jelölni.

A D mátrixról akkor mondjuk, hogy lexikografikusan pozitív, ha minden sora lexikografikusan pozitív. Világos, hogy ilyen esetben $\mathbf{d}_0 \geqq \mathbf{0}$, s így a B bázishoz tartozó bázismegoldás megengedett megoldás. Indokolt tehát a következő értelmezés:

Egy B bázist akkor fogunk l-megengedettnek nevezni, ha a hozzá tartozó D mátrix lexikografikusan pozitív.

3. 3. Az algoritmus. Feladatként tűzzük ki a (3. 2. 1)—(3. 2. 4) feladathoz legalább egy kiegészítő megoldás találását, illetőleg annak megmutatását, hogy ilyen nincs.

Ha $\mathbf{g} \geqq \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{w} = \mathbf{g}$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

kiegészítő megoldás, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $\mathbf{g} \ngeqq \mathbf{0}$.

Világos, hogy feladatunk ekvivalens a következővel:

Keresendő a (3. 2. 6)—(3. 2. 8) segédfeladatnak olyan kiegészítő megoldása, amelyben $t=0$, illetőleg megmutatandó, hogy ilyen nincs. A továbbiakban a problémával ebben az alakban foglalkozunk.

Előkészületként tegyük fel, hogy $B^{(1)}$ 1-megengedett bázis. Válasszunk ki az $\mathbf{a}_P$ $P\in\{1, 2, \ldots, 2m+1\} -I^{(1)}$ vektorok közül egyet, mondjuk $\mathbf{a}_k$-t. Kíséreljük meg $B^{(1)}$-ből egy új 1-megengedett bázist készíteni úgy, hogy $\mathbf{a}_k$-t bevonjuk a bázisba, s ennek valamely $\mathbf{a}_j$ $j\in I^{(1)}$ vektorát elhagyjuk. Ha ez lehetséges, akkor az így nyert $B^{(2)}$ bázist $B^{(1)}$ szomszédjának nevezzük.

3. 1. TÉTEL. *Egy $B^{(1)}$ 1-megengedett bázisnak akkor és csak akkor van olyan szomszédja, amely $\mathbf{a}_k$ bevonásával jön létre, ha $\mathbf{d}_k^{(1)}$-nek van pozitív komponense. Ez esetben a szomszéd egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Vonjuk be $\mathbf{a}_k$-t $B^{(1)}$-be és hagyjuk el belőle $\mathbf{a}_j$-t, ahol a j index egyelőre határozatlan. Minthogy $B^{(2)}$ is bázis, szükségképpen $d_{j,k}^{(1)}\neq 0$. Ezt feltételezve vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett lesz a $B^{(2)}$ bázis 1-megengedett.

Ismeretes, hogy $D^{(2)}$ és $D^{(1)}$ között a következő transzformációs formulák érvényesek:

$$\delta_k^{(2)} = \frac{1}{d_{j,k}^{(1)}}\,\delta_j^{(1)}, \tag{3. 3. 1}$$

$$\delta_i^{(2)} = \delta_i^{(1)} - \frac{d_{i,k}^{(1)}}{d_{j,k}^{(1)}}\,\delta_j^{(1)} \qquad i\in I^{(2)}-\{k\}. \tag{3. 3. 2}$$

A (3. 3. 1) egyenletből látjuk, hogy szükségképpen $d_{j,k}^{(1)}>0$. Ezt feltételezve vizsgáljuk meg a (3. 3. 2) egyenlőségeket.

Ha ezekben $d_{i,k}^{(1)}\leqq 0$, akkor $\delta_i^{(2)}\succ\mathbf{0}$, ezért elég azokat az i indexeket vizsgálni, amelyekre $d_{i,k}^{(1)}>0$. Ilyen van, hisz j is ilyen. Ezeknél az i indexeknél a $\delta_i^{(2)}$ akkor és csak akkor lexikografikusan pozitív, ha

$$\frac{1}{d_{i,k}^{(1)}}\,\delta_i^{(1)} \succ \frac{1}{d_{j,k}^{(1)}}\,\delta_j^{(1)}.$$

Eszerint a $j\in I^{(1)}$ indexet a következő összefüggés értelmezi:

$$\frac{1}{d_{j,k}^{(1)}}\,\delta_j^{(1)} = 1-\min\frac{1}{d_{i,k}^{(1)}}\,\delta_i^{(1)} \qquad \{i\,|\,i\in I^{(1)},\ d_{i,k}^{(1)}>0\}. \tag{3. 3. 3}$$

A j indexet a (3. 3. 3) összefüggés egyértelműen határozza meg, hisz ellenkező esetben a $D^{(1)}$ mátrixnak két sora arányos volna, ami viszont lehetetlen, mivel $D^{(1)}$ tartalmaz egységmátrixot.

Vegyük észre, hogy e tétel kimondása és bizonyítása során sehol nem támaszkodtunk az A mátrix speciális szerkezetére, ezért ez tetszőleges $A\neq 0$ mátrix esetén igaz.

Legyen $B^{(0)}=(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$. Minthogy $D^{(0)}=(\mathbf{a}_0, A)$, azért $B^{(0)}$ nem megengedett bázis.

Értelmezzük a $B^{(1)}$ bázist a következőképpen: legyen $k=m+1$ és vonjuk be a bázisba az $\mathbf{a}_k$ vektort. A $B^{(0)}$-ból elhagyandó vektor h indexét a következő összefüggésből határozzuk meg:

$$\frac{1}{d_{h,k}^{(0)}}\delta_h^{(0)} = \underset{i \in I^{(0)}}{1-\max} \frac{1}{d_{i,k}^{(0)}}\delta_i^{(0)} \tag{3. 3. 4}$$

Minthogy $D^{(0)}$-nak nincsenek arányos sorai, azért (3. 3. 4) a h-t egyértelműen értelmezi.

A transzformációs formulákat megvizsgálva, látjuk, hogy $B^{(1)}$ 1-megengedett bázis. Minthogy — miként az könnyen belátható — $\mathbf{d}_h^{(1)} < \mathbf{0}$, azért a 3. 1. Tétel szerint a $B^{(1)}$-nek nincs olyan szomszédja, amelyet $\mathbf{a}_h$ bevonásával kaphatunk. Az is világos, hogy $\mathbf{a}_{m+1}$ pozitív szinten lépett $B^{(1)}$-be.

A $B^{(1)}$-ből kiindulva alkossuk meg a

$$B^{(0)};\, B^{(1)},\, B^{(2)},\, B^{(3)}, \ldots \tag{3. 3. 5}$$

szomszédos bázisokból álló sorozatot a következőképpen:

Ha $B^{(q)}$ megalkotása során $\mathbf{a}_j$ hagyta el $B^{(q-1)}$-et, akkor $\mathbf{a}_k$-val jelölve az $\mathbf{a}_j$ kiegészítő párját, $B^{(q+1)}$ úgy jön létre $B^{(q)}$-ból, hogy abba $\mathbf{a}_k$-t vonjuk be. $q=1$ esetén $j=k$, s így a sorozatot a 3. 1. Tétel szerint egyértelműen értelmeztük.

Az értelmezésből világos, hogy $q=1$-től kezdve a sorozat minden bázisa 1-megengedett kiegészítő bázis.

A sorozat képzését két esetben fejeztük be:

I. $\mathbf{a}_{m+1}$ kilép a bázisból, vagy benne marad ugyan, de zérus szintre kerül.

II. $\mathbf{a}_{m+1}$ pozitív szinten szerepel a bázisban, de a sorozat következő eleme a 3. 1. Tételben szereplő feltétel nem teljesülése miatt nem képezhető.

3. 2. TÉTEL. *A* (3. 3. 5) *bázissorozat véges: azaz véges számú lépés után vagy az I., vagy a II. esetre jutunk.*

Bizonyítás. Minthogy az A-ból kiválasztható bázisok száma véges, elegendő azt bizonyítani, hogy a sorozatban nem lép fel ismétlődés.

Ha volna olyan bázis, amely a sorozatban kétszer is előfordul, akkor volna egy első ilyen bázis. Legyen ez $B^{(q)}$. Természetesen $q \geqq 1$, minthogy $B^{(0)}$ kivételével, amelynek egyébként csak az indulás lehetővé tétele volt a szerepe, valamennyi bázis 1-megengedett.

A sorozat elemeit úgy értelmeztük, hogy minden bázis esetén pontosan egy kiegészítő pár szerepel bázison kívül, s az adott bázis szomszédai ezek bevonása útján jönnek létre. A 3. 1. Tételből azonban ekkor az következik, hogy minden bázisnak legfeljebb két szomszédja van a sorozatban.

Az első ismétlődő bázist más kell, hogy megelőzze az első fellépése alkalmából, mint a második fellépésénél, különben nem ő volna az első. Ekkor azonban legalább három szomszédja volna, ami — mint láttuk — lehetetlen.

3. 3. TÉTEL. *Ha az eljárás az I. esettel ér véget, akkor az utolsó bázismegoldás kiegészítő megoldást szolgáltat a* (3. 2. 1)—(3. 2. 4) *feladathoz.*

Ha az eljárás során a II. esetre jutunk, akkor a G mátrixra tett megszorítás nélkül általában semmit sem mondhatunk a feladat megoldhatóságáról. Kijelölhető azonban egy elég tágnak tűnő mátrixosztály, amelynek esetén a feladatnak ilyen esetben nincs megoldása. A továbbiakban ezzel a kérdéssel foglalkozunk.

3.4. Kopozitív mátrix. A G mátrixot kopozitívnak nevezzük, ha minden

$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0} \quad \text{vektorra}$$

$$\mathbf{z}^T G \mathbf{z} \geqq 0.$$

A kopozitív mátrixok osztálya ezek szerint magában foglalja a pozitív szemidefinit és annál inkább a pozitív definit mátrixokat, de tartalmazza a nem-negatív elemű mátrixokat is, s így persze az olyan mátrixokat is, amelyek egy pozitív szemidefinit és egy nem-negatív mátrix összegeként állíthatók elő.

A G kopozitív mátrixot kopozitív-plusz mátrixnak nevezzük, ha

$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}^T G \mathbf{z} = 0$$

esetén érvényes, hogy

$$(G+G^T)\mathbf{z} = \mathbf{0}. \tag{3.4.1}$$

3.1. LEMMA. *A kopozitív-plusz mátrixok osztálya tartalmazza a szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrixok osztályát.*

Bizonyítás. Legyen G pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix. Ekkor G nyilván kopozitív, ezért elég a további tulajdonságot igazolni. Legyen tehát $\mathbf{z}$ olyan vektor, amelyre

$$\mathbf{z}^T G \mathbf{z} = 0.$$

Legyen $\mathbf{y}$ tetszőleges m-dimenziós vektor, λ pedig egy tetszőleges skalár. Ekkor G pozitív szemidefinit tulajdonsága miatt érvényes

$$(\mathbf{y}+\lambda\mathbf{z})^T G(\mathbf{y}+\lambda\mathbf{z}) \geqq 0.$$

A szorzást elvégezve a következőt kapjuk:

$$\mathbf{y}^T G\mathbf{y} + 2\lambda \mathbf{y}^T G\mathbf{z} \geqq 0.$$

A számolás során figyelembe vettük G szimmetriáját, továbbá azt, hogy $\mathbf{z}^T G\mathbf{z} = 0$.

Ez az egyenlőtlenség tetszőleges λ esetén csak akkor állhat, ha

$$\mathbf{y}^T G \mathbf{z} = 0.$$

Ez az egyenlőség viszont tetszőleges $\mathbf{y}$ esetén csak akkor állhat, ha

$$G\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

azaz G szimmetriája miatt $(G+G^T)\mathbf{z} = \mathbf{0}$, amit bizonyítani akartunk.

MEGJEGYZÉS: A bizonyításban valójában egy kissé többet igazoltunk a szándékoltnál, hisz az állítást tetszőleges $\mathbf{z}$ vektor esetére igazoltuk, azaz $\mathbf{z}$ nemnegativitását sehol sem használtuk fel.

3.2. LEMMA. *Legyen G olyan mátrix, amely határozottan nagyobb egy pozitív szemidefinit mátrixnál. Ekkor G kopozitív-plusz mátrix.*

Bizonyítás. A kopozitivitás ismét nyilvánvaló, ezért most is elegendő a járulékos tulajdonságot vizsgálni.

Legyen

$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{z}^T G \mathbf{z} = 0.$$

Vegyük fel a G mátrixot

$$G = Q + P$$

alakban, ahol Q pozitív szemidefinit és P pozitív elemű mátrix.

Ekkor

$$\mathbf{z}^T Q \mathbf{z} + \mathbf{z}^T P \mathbf{z} = 0.$$

Minthogy az összeg egyik tagja sem lehet negatív, azért mindkettő zérus.

$$\mathbf{z}^T Q \mathbf{z} = 0$$
$$\mathbf{z}^T P \mathbf{z} = 0.$$

P pozitivitása miatt $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, és így

$$(G + G^T)\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

Megjegyzés: Ezt az állítást sajnos, nem lehet a $P \geqq 0$ esetre kiterjeszteni, amint arról könnyen meggyőzhet a következő példa:

Legyen

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\mathbf{z}^T G \mathbf{z} = 0,$$

de

$$G\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

3. 2. LEMMA. *Legyen G olyan mátrix, amely nagyobb vagy egyenlő egy pozitív definit Q mátrixnál. Ekkor G kopozitív plusz mátrix.*

A lemma *bizonyítása* szó szerint megegyezik a 3. 2. Lemma bizonyításával, kivéve annak zárását, amely ez esetben így hangzik: Q pozitív definit tulajdonsága miatt $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, és így $(G + G^T)\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

3. 3. LEMMA. *A $G\mathbf{z} + \mathbf{g} \geqq \mathbf{0}$ egyenlőtlenségrendszernek akkor és csak akkor van $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ megoldása, ha nincs olyan $\mathbf{d}$ vektor, amelyre*

$$\mathbf{d} \geqq \mathbf{0},$$
$$G^T \mathbf{d} \leqq 0, \qquad (3.4.2)$$
$$\mathbf{g}^T \mathbf{d} < 0.$$

Bizonyítás. Ha van a (3. 4. 2) feltételeket kielégítő $\mathbf{d}$ vektor, akkor tetszőleges $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ esetén

$$(\mathbf{d}^T G)\mathbf{z} \leqq 0,$$

ahonnan

$$\mathbf{d}^T(G\mathbf{z}+\mathbf{g}) < 0,$$

s így a második tényezőnek biztosan van negatív komponense.

Ha nincs ilyen $\mathbf{d}$ vektor, akkor a

$$\mathbf{d} \geqq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{d}^T(-G) \geqq \mathbf{0}$$

egyenlőtlenségrendszernek következménye a

$$\mathbf{d}^T\mathbf{g} \geqq 0$$

egyenlőtlenség és így FARKAS tétele szerint van olyan $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ vektorpár, hogy

$$\mathbf{g} = -G\mathbf{z}+\mathbf{u}.$$

Más szóval van olyan $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ vektor, amellyel

$$G\mathbf{z}+\mathbf{g} \geqq \mathbf{0}.$$

Ezt akartuk bizonyítani.

3. 4. TÉTEL. *Ha a* (3. 2. 1)—(3. 2. 4) *feladatban szereplő G mátrix kopozitív-plusz mátrix és az eljárás a II. esettel ér véget, akkor a feladatnak nincs megengedett megoldása s így kiegészítő megoldása sincs.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az eljárás során a II. esetre jutottunk. Jelöljük a (3. 3. 5) bázis-sorozat utolsó bázisát B-vel.

Két esetet fogunk megkülönböztetni: I. ha $B = B^{(1)}$ és II. ha $B \neq B^{(1)}$. Tekintsük először az I. esetet.

$$B = B^{(1)} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{h-1}, -\mathbf{e}, \mathbf{e}_{h+1}, \ldots, \mathbf{e}_m)$$

$$I = I^{(1)} = \{1, \ldots, h-1, m+1, h+1, \ldots, m\}$$

Ez azért igaz, mert miként azt fent leírtuk, $B^{(1)}$ úgy jött létre $B^{(0)}$-ból, hogy azt $\mathbf{a}_n = \mathbf{e}_h$ hagyta el és $\mathbf{a}_{m+1} = -\mathbf{e}$ jött a helyére. $\mathbf{e}_h$ kiegészítő párja az $\mathbf{a}_k = -\mathbf{g}_h$ vektor, így érvényes

$$B\mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_h.$$

Itt a feltételezésünk szerint

$$\mathbf{d}_k \leqq \mathbf{0}.$$

A B bázis fenti explicit alakjából kapjuk, hogy

$$-d_{m+1,k} = -g_{h,h}$$

$$d_{i,k} - d_{m+1,k} = -g_{i,h} \qquad i \in I - \{m+1\}$$

Innen a $d_{i,k}$ komponensek meghatározhatók. Mármost

$$g_{hh} = \mathbf{e}_h^T G \mathbf{e}_h \geqq 0,$$

minthogy G kopozitív, másrészről viszont láttuk, hogy

$$g_{hh} \leqq 0.$$

Eszerint érvényes az alábbi állítás

$$\mathbf{e}_h^T G \mathbf{e}_h = g_{hh} = 0,$$

és így a G kopozitív-plusz tulajdonsága miatt

$$(G+G^T)\mathbf{e}_h = \mathbf{0},$$

azaz

$$g_{ih}+g_{hi} = 0 \qquad i \in I.$$

Láttuk, hogy

$$g_{ih} = -d_{ik} \geqq 0,$$

így érvényes a

$$g_{hi} \leqq 0,$$

egyenlőtlenség, más szóval

$$G^T \mathbf{e}_h \leqq 0.$$

Végül

$$\mathbf{g}^T \mathbf{e}_h = g_h < 0,$$

hiszen $\mathbf{e}_h$ azért hagyta el a $B^{(0)}$ bázist, mert g_h volt a legkisebb komponense.

Legyen ezután

$$\mathbf{d} = \mathbf{e}_h,$$

s látjuk, hogy $\mathbf{d}$ eleget tesz a 3. 3. Lemma feltételeinek.

A II. esetben igaz az, hogy

$B \neq B^{(1)}$ és így B tartalmazza $-G$-nek legalább egy oszlopát;

B a segédfeladat kiegészítő bázisa;

B pozitív szinten tartalmazza $\mathbf{a}_{m+1}$-et, azaz

$$\mathbf{d}_{m+1,0} > 0. \tag{3. 4. 3}$$

Jelöljük $\mathbf{a}_k$-val azt a vektort, amelynek az algoritmus következő lépésében kellene a bázisba lépnie. Feltételezésünk szerint

$$\mathbf{d}_k \leqq \mathbf{0}. \tag{3. 4. 4}$$

A jelölés egyszerűsítése érdekében feltehetjük, hogy

$$B = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+r+3}, \ldots, \mathbf{a}_{2m+1})$$

és itt $0 \leqq r < m-1$. Azt is feltehetjük, hogy

$$\mathbf{a}_k = \begin{cases} \mathbf{e}_{r+1} & \text{ha} \quad k < m+1 \\ -\mathbf{g}_{r+1} & \phantom{\text{ha}} \quad k > m+1. \end{cases}$$

Fejezzük ki a B bázis segítségével $\mathbf{a}_0$-t és $\mathbf{a}_k$-t.

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{a}_i d_{i,0} + \mathbf{a}_{m+1} d_{m+1,0} + \sum_{i=m+r+3}^{2m+1} \mathbf{a}_i d_{i,0} = \mathbf{a}_0, \tag{3. 4. 5}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{a}_i d_{i,k} + \mathbf{a}_{m+1} d_{m+1,k} + \sum_{i=m+r+3}^{2m+1} \mathbf{a}_i d_{i,k} = \mathbf{a}_k. \tag{3. 4. 6}$$

A (3. 2. 9) összefüggés figyelembevételével a (3. 4. 5), (3. 4. 6) egyenletek a következő alakot öltik:

$$(3.4.7)\qquad \sum_{i=1}^{r} \mathbf{e}_i(d_{i,0}-d_{m+1,0})-\sum_{i=r+1}^{m} \mathbf{e}_i d_{m+1,0}-\sum_{i=r+2}^{m} \mathbf{g}_i d_{i+m+1,0}=\mathbf{g},$$

(3. 4. 8)

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{e}_i(d_{ik}-d_{m+1,k})-\sum_{i=r+1}^{m} \mathbf{e}_i d_{m+1,k}-\sum_{i=r+2}^{m} \mathbf{g}_i d_{i+m+1,k}=\begin{cases} \mathbf{e}_{r+1} & \text{ha} \quad k<m+1 \\ -\mathbf{g}_{r+1} & \text{ha} \quad k>m+1. \end{cases}$$

Legyen

$$(3.4.9)\qquad \mathbf{d}=\begin{cases} -\sum\limits_{i=r+2}^{m} \mathbf{e}_i d_{i+m+1,k} & \text{ha} \quad k<m+1 \\ \mathbf{e}_{r+1}-\sum\limits_{i=r+2}^{m} \mathbf{e}_i d_{i+m+1,k} & \text{ha} \quad k>m+1 \end{cases}$$

Nyilván

$$\mathbf{d}\geqq\mathbf{0}.$$

Szorozzuk meg a (3. 4. 8) egyenletrendszert balról $\mathbf{d}^T$-vel.

$$(3.4.10)\qquad -d_{m+1,k}\sum_{i=m+r+3}^{2m+1} -d_{i,k}+\mathbf{d}^T G\mathbf{d}=0 \quad \text{ha} \quad k<m+1$$

$$-d_{m+1,k}\left(1+\sum_{i=m+r+3}^{2m+1}(-d_{i,k})\right)+\mathbf{d}^T G\mathbf{d}=0 \quad \text{ha} \quad k>m+1.$$

Minthogy G kopozitív, azért a (3. 4. 10) egyenletek bal oldalának első tagja nem lehet pozitív.

Tekintettel arra, hogy (3. 4. 4) szerint ez a tag negatív sem lehet, azért zérus. Az első tag második tényezője pozitív. Ez a második egyenlet esetében közvetlenül látszik, az első egyenlet esetén viszont az ellenkező feltevés ellentmondásossá tenné a helyes (3. 4. 8) egyenletet.

Ezek szerint arra jutottunk, hogy szükségképpen

$$(3.4.11)\qquad d_{m+1,k}=0$$

és

$$\mathbf{d}^T G\mathbf{d}=0.$$

A (3. 4. 8) egyenletet a (3. 4. 11) szerint módosítva azt is látjuk, hogy

$$G\mathbf{d}\geqq\mathbf{0}.$$

Innen (3. 4. 1) figyelembevételével az adódik, hogy

$$(3.4.12)\qquad \mathbf{d}^T G\leqq\mathbf{0}.$$

Szorozzuk meg a (3. 4. 7) egyenletet balról $\mathbf{d}^T$-vel. Figyelembe véve a (3. 4. 3) egyenlőtlenséget, továbbá a (3. 4. 4) és (3. 4. 12) egyenlőtlenségrendszert, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{d}^T\mathbf{g}<0.$$

Ezek szerint a (3. 4. 9) alatt definiált $\mathbf{d}$ vektor eleget tesz a 3. 3. Lemma (3. 4. 2) feltételeinek, s így a 3. 4. Tétel állítása valóban igaz.

A 3. 4. Tételnek közvetlen következménye a következő:

3. 5. TÉTEL. *Legyen G $m \times m$ típusú kopozitív plusz mátrix, $\mathbf{g}$ pedig tetszőleges m-komponensű vektor. Ha van olyan $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ vektor, amelyre $\mathbf{w} = G\mathbf{z} + \mathbf{g} \geqq \mathbf{0}$, akkor az ilyen tulajdonságú vektorok között olyan is van, amelyre $\mathbf{z}^T\mathbf{w} = 0$, és e fejezet algoritmusa szolgáltat ilyet.*

3. 5. E fejezet befejezéseként vizsgáljuk meg, mit mondanak eredményeink a kvadratikus programozás elméletének a szemszögéből tekintve.

A közönséges konvex kvadratikus programozási feladat, illetőleg a COTTLE által definiált szimmetrikus duális kvadratikus programozási feladatok szempontjából tekintve újabb megoldási eljárást nyertünk, amely minden olyan esetben alkalmazható, amikor a többi ismert kvadratikus programozási eljárás. Az eljárásnak nagy előnye a rendkívüli egyszerűség — a gyakorlati programozás során felesleges a lexikográfiára tekintettel lennünk — és a szimplex módszerhez való hasonlóság. Feltehetőleg akkor működik igazán hatékonyan, ha a feladat „nagyon kvadratikus", azaz a kvadratikus forma mátrixában kevés a zérus.

Ha annak a mélyebb okát kutatjuk, hogy a G matrixra tett — viszonylag gyenge — megkötés miért nem von be további kvadratikus programozási feladatokat is a módszerrel megoldható feladatok családjába, akkor a 3. 2. Lemmára és főleg az utána tett megjegyzésre kell utalnunk. Ha ugyanis a

$$G = \begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & P \end{bmatrix}$$

mátrixban mondjuk a Q mátrixot növeljük, azáltal G nem nő meg határozottan, s az A és $-A^T$ egyidejű szereplése miatt ezt a növekedést el sem lehet érni. Ilyenformán nem sikerül biztosítani a G mátrix kopozitív-plusz tulajdonságát, bár a kopozitivitás teljesül. Természetesen ilyenkor is igaz az, hogy ha az algoritmus pozitív eredménnyel ér véget, akkor olyan pontot szolgáltat, amely eleget tesz a lokális minimum *Kuhn—Tucker*-féle feltételének. Ha azonban ilyen esetben az algoritmus negatív eredménnyel zárul, akkor a feladatról semmit sem mondhatunk. Azt láttuk a 3. 2. Tételben, hogy valamelyik lehetőség mindenképpen bekövetkezik.

A felsorolt esetektől eltérően a *Dorn*-féle (2. 1. 10) feladatban a G mátrix magának a kvadratikus alaknak a matrixa, ezért erre az esetre teljes hatékonysággal alkalmazhatók a fejezet eredményei. Ezek szerint érvényes a következő tétel, amely általánosítja COTTLE [4] tételét.

3. 6. TÉTEL. *Ha a* (2. 1. 10) *feladat G mátrixa kopozitív-plusz mátrix és a feladatnak van megengedett megoldása, akkor optimális megoldása is van és ennek értéke zérus.*

Az adott feltételek mellett ugyanis alkalmazhatjuk kiegészítő változó algoritmusunkat, és ez a 3. 3. Tétel szerint véget is ér, mégpedig a 3. 4. Tétel szerint vagy kiegészítő megoldással, vagy pedig annak a megállapításával, hogy nincs megengedett megoldás.

4. Kiegészítő változó módszer pozitív mátrixú feladat megoldására

4. 1. Tekintsük ismét a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feladatot. Mint már említettük, a feltételek ideiglenes gyengítése révén remélünk a feladat megoldásához eljutni. A harmadik fejezetben a (2. 1. 1) feltétel gyengítése révén jutottunk sikeres eljáráshoz, DANTZIG és COTTLE a nemnegativitási feltétel gyengítése révén, így remélhető, hogy hasonlóan sikeres a (2. 1. 4) ortogonalitási feltétellel kapcsolatos engedmény bevezetése is. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy ez így is van.

Az alkalmazott gondolatmenet hasonló lesz a harmadik fejezetben alkalmazottéhoz, és a formális analógia kihangsúlyozása céljából ezt lehetőleg azonos jelölés- és megfogalmazásmóddal érzékeltetjük. Fel kell hívnunk azonban a figyelmet arra, hogy az azonos szimbolika itt az előzőétől eltérő tartalmat takar. Míg a harmadik fejezetben a segédfeladat kiegészítő megoldásain keresztül törekedtünk az eredeti feladat megoldása felé, addig e fejezetben az eredeti feladat „majdnem" kiegészítő megoldásain keresztül fogunk a cél felé törekedni.

Az e fejezetben leírt algoritmus valójában az itt megköveteltnél sokkal gyengébb feltétel mellett is elindítható, és véges, azonban pillanatnyilag öncélúnak érződik ennek a részletes taglalása, s így elhagytuk.

4. 2. A harmadik fejezethez hasonlóan itt is beszélhetünk megoldásról, megengedett megoldásról és kiegészítő megoldásról.

Vezessük be az

$$A = (E, -G)$$

mátrixot, amelynek oszlopait egységesen fogjuk jelölni:

$$A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{2m}).$$

Eszerint ez esetben

$$\mathbf{a}_p = \begin{cases} \mathbf{e}_p & \text{ha} \quad p = 1, \ldots, m \\ -\mathbf{g}_{p-m} & \phantom{\text{ha}} \quad p = m+1, \ldots, 2m. \end{cases}$$

Bevezetve még az

$$x = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{g}$$

jelöléseket, a (2. 1. 1)—(2. 1.3) feltételrendszert a következő egységes alakban írhatjuk:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}_0$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}.$$

Az A mátrix rangja m, így oszlopvektorterének tetszőleges bázisa m elemű. A továbbiakban B-vel az A oszlopaiból alkotott bázist jelöljük. Ha

$$B = (\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_m}),$$

akkor legyen

$$I = (i_1, \ldots, i_m).$$

Minthogy az $Ax=\mathbf{a}_0$ lineáris egyenletrendszer nyilván konzisztens, ezért tetszőleges B bázishoz egyértelműen tartozik egy

$$D=(\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{2m})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_{i_1}\\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{i_m}\end{bmatrix}=(d_{i,p})$$

mátrix, amelyet a

$$BD=(\mathbf{a}_0, A)$$

összefüggés értelmez. A továbbiakban B-vel együtt valamennyi B-től függő szimbólumot vele azonos indexszel fogunk ellátni.

Az $Ax=\mathbf{a}_0$ egyenletrendszer B bázisához tartozó bázismegoldás, továbbá a megengedett, 1-megengedett és kiegészítő bázis definícióját szó szerint átvesszük a harmadik fejezetből.

4. 3. Tekintettel arra, hogy a 3. 1. Tétel tetszőleges $(\mathbf{a}_0, A)$ mátrix esetén érvényes, azért esetünkben is.

Az algoritmus formális leírását szó szerint átvehetjük a harmadik fejezetből, ezért azt itt nem ismételjük meg, helyette a tartalmi eltéréseket világítjuk meg.

Induló bázisként mindkét esetben a $B^{(0)}=(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ bázist választjuk. Természetesen csak akkor megyünk tovább, ha ez nem megengedett.

Az első lépés célja a megengedettség biztosítása. Ott ezt a mesterséges vektornak a bázisba való bevonásával értük el. Most a $-G$ mátrix első oszlopát, $-\mathbf{g}_1$-et vonjuk be első lépésként a bázisba. Ez biztosan sikerre vezet, ha $\mathbf{g}_1$-nek valamennyi komponense pozitív, hisz az előző fejezetben a mesterséges vektorról csak ennyit használhatunk ki. Ezen túlmenően fel fogjuk tételezni, hogy

$$G>0.$$

Mint látni fogjuk, e feltételezés rendkívül hasznos.

Az előző fejezet algoritmusában az első lépés eredményeként a segédvektor belépett a bázisba, de megengedett és ortogonális maradt a megoldás.

A jelenlegi helyzetben $-\mathbf{g}_1$ lépett a bázisba, s ezzel a megoldás megengedetté vált ugyan, de — eltekintve attól a különösen szerencsés esettől, hogy éppen $\mathbf{e}_1$ hagyja el a bázist — elromlott az ortogonalitás. Egy kiegészítő vektorpár a bázisban van.

Mindkét esetben az az elv szabja meg az algoritmus további útját, hogy az elért helyzeten nem szabad rontani. Tekintettel arra, hogy a bázison kívül mindkét esetben egyetlen kiegészítő pár tartózkodik, mindkét esetben azonos elvre jutunk a bázisba belépő vektor kiválasztását illetőleg. Ennek következtében azonban a 3. 2. Tétel is változatlanul érvényes, így csak azt kell vizsgálnunk, hogy mi történik az algoritmus végén. Erre vonatkozik a következő:

4. 1. TÉTEL. *Pozitív G mátrix esetén mindig van kiegészítő bázismegoldás, és az algoritmus mindig ilyenen ér véget.*

Bizonyítás. A bázissorozat képzését elvileg két ok miatt fejezhetjük be. Vagy kiegészítő bázismegoldásra jutunk, vagy pedig megsértjük a 3. 1. Tétel premisszáját.

Elegendő azt belátnunk, hogy az utóbbi lehetőség sohasem következik be.

Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben a második lehetőségre jutunk. Jelöljük a bázissorozat utolsó bázisát B-vel. B-ről a következőket állíthatjuk:

1. $\mathbf{e}_1$ és $-\mathbf{g}_1$ benne van B-ben;
2. $B \neq B^{(1)}$, ezért $-\mathbf{g}_1$-en kívül még legalább egy $-G$-beli vektor is benne van B-ben. Az egyszerűbb jelölés kedvéért feltehetjük, hogy ez $-\mathbf{g}_m$.
3. $d_{1,0} > 0$ és $d_{m+1,0} > 0$.

Jelöljük $\mathbf{a}_k$-val azt a vektort, amelynek az algoritmus következő lépése során a bázisba kellene lépnie. Feltételezésünk szerint

$$\mathbf{d}_k \leqq \mathbf{0}.$$

A jelölés egyszerűsége érdekében feltehetjük, hogy

$$B = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+r+2}, \dots, \mathbf{a}_{2m}).$$

A fentiek szerint

$$1 \leqq r < m-1.$$

Ezek után világos, hogy

$$\mathbf{a}_k = \begin{cases} \mathbf{e}_{r+1} & \text{ha} \quad k \leqq m \\ -\mathbf{g}_{r+1} & \phantom{\text{ha}} \quad k > m \end{cases}$$

Fejezzük ki a B bázis segítségével $\mathbf{a}_k$-t.

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{a}_i d_{i,k} + \mathbf{a}_{m+1} d_{m+1,k} + \sum_{i=m+r+2}^{2m} \mathbf{a}_i d_{i,k} = \mathbf{a}_k.$$

Az $\mathbf{a}_i$ vektorok értelmezése szerint ezt az összefüggést átírhatjuk a következőképpen:

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{e}_i d_{i,k} - \mathbf{g}_1 d_{m+1,k} - \sum_{i=r+2}^{m} \mathbf{g}_i d_{m+i,k} = \begin{cases} \mathbf{e}_{r+1}, & \text{ha} \quad k = r+1 \\ -\mathbf{g}_{r+1}, & \text{ha} \quad k = m+r+1. \end{cases}$$

Figyelembe véve, hogy valamennyi $d_{i,k} \leqq 0$, a bal oldali összeg utolsó $m-r$ (>1) komponense nem negatív, mégpedig vagy valamennyi zérus, vagy pedig valamennyi pozitív. Emiatt azonban az egyenlőség egyik esetben sem teljesülhet.

Ezzel a bizonyítást elvégeztük.

5. A bimatrix játék

5. 1. Bevezetés. A bimátrix játék, vagy másként kétszemélyes, nem kooperatív, nem zéróösszegű véges játék a kétszemélyes zéróösszegű mátrixjátéknak a természetes általánosítása.

Mint ismeretes, kétszemélyes zéróösszegű véges játék esetén a két játékos egymástól függetlenül választ a lehetőségei közül. Az első játékos m lehetőség — ún. tiszta stratégia —, a második pedig n lehetőség közül választ. Ha az első játékos az i-edik, $i = 1, \dots, m$, a második ugyanakkor a j-edik, $j = 1, \dots, n$, lehetőséget választotta, akkor az első játékos vesztesége g_{ij}, a másodiké $-g_{ij}$. A két veszteség összege zérus. Ha ezzel szemben itt a második játékos veszteségét egy, a g_{ij}-től független $\hat{g}_{ij}$ szám adja meg, akkor bimátrix játékkal állunk szemben.

Foglaljuk össze az első játékos lehetséges veszteségeit a

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} \cdots g_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{m1} \cdots g_{mn} \end{bmatrix}$$

a másodikét pedig a

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} \cdots \hat{g}_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{g}_{n1} \cdots \hat{g}_{nm} \end{bmatrix}$$

mátrixba.

Tegyük fel, hogy a játszmát sokszor megismétlik és mindkét játékos valamilyen kevert stratégiát játszik. Foglaljuk össze az első játékos stratégiáját a $\mathbf{p}$ m-dimenziós sztohasztikus vektorba[3] a másodikét pedig a $\hat{\mathbf{p}}$ n-dimenziós sztochasztikus vektorba. Ekkor az első játékos veszteségének a várható értéke

$$\mathbf{p}^T G \hat{\mathbf{p}},$$

a második pedig

$$\hat{\mathbf{p}}^T \hat{G} \mathbf{p}.$$

A probléma ezek után az, hogy létezik-e olyan $\mathbf{p}_0$, $\hat{\mathbf{p}}_0$ stratégiapár, amely bizonyos értelemben mindkét játékos számára megnyugtató, azaz az adott lehetőségek között egyensúlyi helyzetet teremt.

Az ilyen, a következő pontban még pontosan meghatározandó egyensúlyi pont létezését először NASH bizonyította egy, a valós számokon értelmezett leképezésekre vonatkozó fixponttételre támaszkodva [52]. A felhasznált eszközök természete miatt bizonyítása puszta egzisztencia-bizonyítás. Az első konstruktív bizonyítás VOROBJEVtől származik [64], akinek elegáns tárgyalásmódja ezen túlmenően az összes egyensúlypontok halmazának a jellemzésére is törekszik. VOROBJEV gondolatmenetét egyszerűsítve KUHNnak sikerült az összes egyensúlypontok halmazát bizonyos extremális egyensúlypontok konvex burkainak egyesítési halmazaként jellemezni [36]. Egyúttal VOROBJEV konstruktív gondolatmenetét is egyszerűsíti és ezt úgy rendezi, hogy az egyben megoldó algoritmust is sugall.

KUHN gondolatai nyomán elindulva MANGASARIAN és STONE úgy találja [46], [48], hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\mathbf{p}_0$, $\hat{\mathbf{p}}_0$ egyensúlypont legyen, az, hogy megoldja a következő kvadratikus programozási feladatot:

$$\max \mathbf{p}^T (G + \hat{G}^T) \hat{\mathbf{p}} - \gamma - \hat{\gamma}$$

$$\hat{G}\mathbf{p} - \hat{\gamma}\hat{\mathbf{g}} \leqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}^T \mathbf{p} = 1, \quad \mathbf{p} \geqq \mathbf{0}, \tag{5.1.1}$$

$$G\hat{\mathbf{p}} - \gamma \mathbf{g} \leqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{g}}^T \hat{\mathbf{p}} = 1, \quad \hat{\mathbf{p}} \geqq \mathbf{0}.$$

Itt $\mathbf{g}$, ill. $\hat{\mathbf{g}}$ olyan m, illetve n dimenziós vektor, amelynek minden komponense Az optimális megoldásra igaz az is, hogy

$$\mathbf{p}^T (G + \hat{G}^T) \hat{\mathbf{p}} - \gamma - \hat{\gamma} = 0.$$

[3] Sztohasztikus vektoron olyan nem-negatív komponensekkel rendelkező vektort értünk, amelynél a komponensek összege 1.

Ilyenformán, ha pusztán egyensúlypontot keresünk, akkor valamelyik kvadratikus programozási eljárást alkalmazhatjuk, ha nem is túl hatékonyan. Minthogy ezek egyike sem alkalmas valamennyi megoldás előállítására, azért MANGASARIAN [46] egy, a fenti ekvivalencián alapuló, de nem kvadratikus programozási eljárást javasol. Az (5. 1. 1) feladatnak az olyan megoldásait, melyek a feltételek halmazának csúcspontját alkotják, extremális egyensúlypontnak nevezve bebizonyítja, hogy valamennyi egyensúlypont kifejezhető bizonyos extremális egyensúlypontok konvex kombinációjaként. Gondolatmenetében meg is adja, hogy melyek a kérdéses extremális pontok. Megoldási javaslata ezek alapján a következő: Állítsuk elő az (5. 1. 1) feltételek által meghatározott konvex poliéder valamennyi csúcsát BALINSKY [1] algoritmusával, válasszuk ki közülük azokat, amelyek megoldják a feladatot, ezek lesznek az extremális egyensúlypontok. Közülük bizonyosaknak a konvex kombinációit képezve, az összes egyensúlyi pont előállítható.

A vázolt algoritmus a gyakorlatban mindjárt az elején, az összes csúcs előállítása során megbukik a méretek miatt. Mint MANGASARIAN írja, legfeljebb $m \cdot n \leqq 36$ méretig működött elfogadható időn belül egy IBM 7090/94 gépen.

A problémát MILLS kevert egészértékű feladatra vezeti vissza [50], s első kísérletként LEMKE is hasonló eredményre jut [40]. A továbbiakban LEMKE és HOWSON lemond a valamennyi egyensúlypont előállítását célzó erőfeszítésekről, s helyette olyan algoritmust keres, amely egy egyensúlypontot állít elő, de ezt hatékonyan [38], [41]. Ennek alapgondolata az előző szerzők geometriai jellegű eredményeinek a szomszédcsúcs módszerrel való egyesítése. A következőkben ezt az algoritmust vizsgáljuk, az előző fejezetek algebrai, illetőleg kombinatorikus eszközeivel. Mind a jelölés, mind pedig a tárgyalásmód hangsúlyozottan törekszik a közös vonások és analógiák kiemelésére.

5. 2. A bimátrix játék és az ekvivalens feladat. Jelöljön $\mathbf{e}_i$ $i=1, \ldots, m$ olyan m-komponensű egységvektort, amelynek az i-edik komponense 1, a többi nulla, s jelöljön $\hat{\mathbf{e}}_j$ $j=1, \ldots, n$ olyan n-komponensű egységvektort, melynek a j-edik komponense 1, a többi nulla. Legyen

$$\mathbf{g} = \mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_m$$

$$\hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{e}}_1 + \cdots + \hat{\mathbf{e}}_n.$$

Jelölje S az m-komponensű, $\hat{S}$ pedig az n-komponensű sztohasztikus vektorok halmazát:

$$S = \{\mathbf{p} | \mathbf{p} \in E^m, \ \mathbf{p} \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{g}^T \mathbf{p} = 1\},$$

$$\hat{S} = \{\mathbf{p} | \hat{\mathbf{p}} \in E^n, \ \hat{\mathbf{p}} \geqq \mathbf{0}, \ \hat{\mathbf{g}}^T \hat{\mathbf{p}} = 1\}.$$

A G és $\hat{G}$ mátrixok által definiált bimátrix játék egyensúlypontján olyan

$$\mathbf{p}_0 \in S, \quad \hat{\mathbf{p}}_0 \in \hat{S}$$

vektorpárt értünk, melyre igaz az, hogy

$$\mathbf{p}_0^T G \hat{\mathbf{p}}_0 \leqq \mathbf{p}^T G \hat{\mathbf{p}}_0 \quad \text{ha} \quad \mathbf{p} \in S$$

$$\hat{\mathbf{p}}_0^T \hat{G} \mathbf{p}_0 \leqq \hat{\mathbf{p}}^T \hat{G} \mathbf{p}_0 \quad \text{ha} \quad \hat{\mathbf{p}} \in \hat{S}. \tag{5. 2. 1}$$

Itt feltehető, hogy

$$G > 0, \quad \hat{G} > 0, \tag{5. 2. 2}$$

hiszen tetszőleges λ valós szám esetén a

$$G + \lambda \mathbf{g}\hat{\mathbf{g}}^T, \quad \hat{G} + \lambda \hat{\mathbf{g}}\mathbf{g}^T$$

mátrixok által definiált játéknak ugyanott van egyensúlypontja, ahol a G és $\hat{G}$ által definiált játéknak.

Legyen

$$\begin{aligned} \gamma &= \mathbf{p}_0^T G \mathbf{p}_0 \\ \hat{\gamma} &= \hat{\mathbf{p}}_0^T \hat{G} \hat{\mathbf{p}}_0. \end{aligned} \tag{5. 2. 3}$$

Itt (5. 2. 2) szerint $\gamma > 0$ és $\hat{\gamma} > 0$.

Világos, hogy az (5. 2. 1) feltétel teljesüléséhez a következő két egyenlőtlenségrendszer teljesülése szükséges és elégséges:

$$\begin{aligned} \gamma \mathbf{g} &\leqq G \hat{\mathbf{p}}_0 \\ \hat{\gamma} \hat{\mathbf{g}} &\leqq \hat{G} \mathbf{p}_0. \end{aligned}$$

Másként

$$\begin{aligned} G \hat{\mathbf{p}}_0 - \gamma \mathbf{g} &\geqq \mathbf{0} \\ \hat{G} \mathbf{p}_0 - \hat{\gamma} \hat{\mathbf{g}} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ha itt a bal oldali vektorok $1/\gamma$, illetve $1/\hat{\gamma}$-szorosának jelölésére bevezetjük az $\mathbf{u}$ és $\hat{\mathbf{u}}$ vektorokat, akkor a feltétel tovább alakítható:

$$\begin{aligned} G \hat{\mathbf{p}}_0 - \gamma \mathbf{g} &= \gamma \mathbf{u} \\ \hat{G} \mathbf{p}_0 - \hat{\gamma} \hat{\mathbf{g}} &= \hat{\gamma} \hat{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Az (5. 2. 3) definíciót a következő, céljainknak jobban megfelelő alakba írhatjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0^T (G \hat{\mathbf{p}}_0 - \gamma \mathbf{g}) &= 0 \\ \hat{\mathbf{p}}_0^T (\hat{G} \mathbf{p}_0 - \hat{\gamma} \hat{\mathbf{g}}) &= 0. \end{aligned}$$

Végül a

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \frac{1}{\hat{\gamma}} \mathbf{p}_0 \\ \hat{\mathbf{z}} &= \frac{1}{\gamma} \hat{\mathbf{p}}_0 \end{aligned} \tag{5. 2. 4}$$

jelölésekkel élve az egyensúly feltétele a következő alakot ölti:

$$\mathbf{u} - G \hat{\mathbf{z}} = -\mathbf{g} \tag{5. 2. 5a}$$

$$\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{z}} \geqq \mathbf{0}; \tag{5. 2. 5b}$$

$$\hat{\mathbf{u}} - \hat{G} \mathbf{z} = -\hat{\mathbf{g}} \tag{5. 2. 6a}$$

$$\hat{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \geqq \mathbf{0}; \tag{5. 2. 6b}$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{z} = 0, \quad \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{z}} = 0. \tag{5. 2. 7}$$

Tegyük fel, hogy ez a rendszer megoldható és $\mathbf{u}$, $\hat{\mathbf{u}}$, $\mathbf{z}$, $\hat{\mathbf{z}}$ megoldást jelöl. Bevezetve a

(5.2.8) $$\gamma = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_j}, \quad \hat{\gamma} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} z_i}$$

jelöléseket, visszafelé haladhatunk a fenti képletsoron, s azt tapasztalhatjuk, hogy a

(5.2.9) $$\mathbf{p}_0 = \hat{\gamma}\mathbf{z}$$
$$\mathbf{p}_0 = \gamma\mathbf{z}$$

vektorpár egyensúlypontot alkot. Ezzel bebizonyítottuk, hogy érvényes a következő:

5. 1. TÉTEL. *Az* (5. 2. 3), (5. 2. 4), (5. 2. 8), (5.2. 9) *összefüggések egy-egy értelmű hozzárendelést létesítenek a* $G > 0$, $\hat{G} > 0$ *mátrixpár által definiált bimátrix játéknak az* (5. 2. 1) *egyenlőtlenségekkel értelmezett egyensúlypontjai és az* (5. 2. 5a)—(5. 2. 7) *feltételrendszer megoldásai között.*

MEGJEGYZÉS. Világos, hogy az (5. 2. 5a)—(5. 2. 7) feltételeket a velük ekvivalens

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \hat{\mathbf{u}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & G\\ \hat{G} & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \hat{\mathbf{z}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\mathbf{g}\\ -\hat{\mathbf{g}}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \hat{\mathbf{u}}\end{bmatrix} \geqq \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \hat{\mathbf{z}}\end{bmatrix} \geqq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \hat{\mathbf{z}}\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \hat{\mathbf{u}}\end{bmatrix} \doteq 0$$

alakra hozhatjuk, ami nyilvánvalóan ekvivalens a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) alapfeladattal. A $\begin{bmatrix}0 & G\\ \hat{G} & 0\end{bmatrix}$ mátrix azonban feleslegesen nagyméretű, és noha kopozitív, de mint könnyen ellenőrizhető, nem kopozitív-plusz mátrix. Ezenkívül látni fogjuk, hogy az (5.2.5a)—(5.2.7) alakok különösen előnyösek, minthogy a bennük szereplő mátrixok pozitívak, s így természetesen kínálkoznak a 4. fejezetben leírt algoritmus alkalmazására. Tekintettel azonban arra, hogy az itt található (5. 2. 7) ortogonalitási feltételek eltérnek a (2. 1. 4) feltételektől, a 4. fejezet gondolatmenete közvetlenül nem alkalmazható.

5. 3. L-megengedett bázispárok. Nevezzük az (5. 2. 5a) és (5. 2. 6a) feltételeknek eleget tevő $\mathbf{u}$, $\hat{\mathbf{z}}$, és $\hat{\mathbf{u}}$, $\mathbf{z}$ vektorokat megoldásoknak, az olyan megoldásokat, amelyek az (5. 2. 5b) és (5. 2. 6b) feltételeket kielégítik, megengedett megoldásoknak, végül az (5. 2. 7) feltételeket kielégítő megengedett megoldásokat kiegészítő megoldásoknak.

Az $\mathbf{u}$, $\mathbf{z}$, illetve $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ megfelelő — azonos indexű — komponenseit kiegészítő változópároknak, az

$$A = (E, -G)$$

$$\hat{A} = (\hat{E}, -\hat{G})$$

mátrixokban a megfelelő $\mathbf{e}_i$, $-\hat{\mathbf{g}}_i$ $i=1, \ldots, m$, illetve $\hat{\mathbf{e}}_{\hat{i}}$, $-\mathbf{g}_{\hat{i}}$ $\hat{i}=1, \ldots, n$ párokat kiegészítő vektorpároknak fogjuk hívni.

Lássuk el a kényelem kedvéért az A és $\hat{A}$ matrixok oszlopait egységes jelöléssel:

$$A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{m+n})$$

$$\hat{A} = (\hat{\mathbf{a}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{a}}_{n+m}).$$

Eszerint

$$\mathbf{a}_p = \begin{cases} \mathbf{e}_p & \text{ha } p = 1, \ldots, m \\ -\mathbf{g}_{p-m} & \text{ha } p = m+1, \ldots, m+n, \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{a}}_p = \begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_p & \text{ha } p = 1, \ldots; n \\ -\hat{\mathbf{g}}_{p-n} & \text{ha } p = n+1, \ldots, n+m. \end{cases}$$

Bevezetve még az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_0 = -\mathbf{g}, \quad \hat{\mathbf{a}}_0 = -\hat{\mathbf{g}}$$

jelöléseket, az (5. 2. 5a), (5. 2. 5b), (5. 2. 6a), (5. 2. 6b) feltételrendszer a következő alakot ölti:

(5. 3. 1)
$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}_0$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

(5. 3. 2)
$$\hat{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{a}}_0$$
$$\hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}.$$

Az A mátrix rangja m, az $\hat{A}$ mátrixé n, így oszlopvektoraik tetszőleges bázisa m, illetve n elemű. A továbbiakban B-vel ill. $\hat{B}$-vel — esetleg indexszel ellátva — az A, ill. $\hat{A}$ oszlopaiból alkotott bázist jelölünk. Ha

$$B = (\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_m}),$$

$$\hat{B} = (\hat{\mathbf{a}}_{\hat{i}_1}, \ldots, \hat{\mathbf{a}}_{\hat{i}_n}),$$

akkor legyen

$$I = (i_1, \ldots, i_m),$$

$$\hat{I} = (\hat{i}_1, \ldots, \hat{i}_n).$$

Tetszőleges B, $\hat{B}$ bázispárhoz egyértelműen tartozik egy

$$D = (\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{m+n}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{i_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{i_m} \end{bmatrix} = (d_{i,p}).$$

$$\hat{D} = (\hat{\mathbf{d}}_0, \hat{\mathbf{d}}_1, \ldots, \mathbf{d}_{n+m}) = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\delta}}_{\hat{i}_1} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_{\hat{i}_n} \end{bmatrix} = (\hat{d}_{\hat{i},p})$$

mátrixpár, amelyet a

$$BD = (\mathbf{a}_0, A)$$
$$\hat{B}\hat{D} = (\hat{\mathbf{a}}_0, \hat{A})$$

összefüggések értelmezik. A továbbiakban, ha B, illetve $\hat{B}$ indexet kap, akkor valamennyi tőlük függő szimbólumot is azonos indexszel fogjuk ellátni.

A B, $\hat{B}$ bázispárt kiegészítő bázispárnak hívjuk, ha nem szerepelnek benne kiegészítő vektorok.

Egy B, $\hat{B}$ bázispárt akkor mondunk l-megengedettnek, ha mind B, mind pedig $\hat{B}$ l-megengedett.

Egy B, $\hat{B}$ l-megengedett bázispár szomszédján olyan $B^{(1)}$, $\hat{B}^{(1)}$ l-megengedett bázispárt fogunk érteni, amelyre

vagy $B^{(1)}=B$ és $\hat{B}^{(1)}$ a $\hat{B}$ szomszédja,

vagy $B^{(1)}$ a B szomszédja és $\hat{B}^{(1)}=\hat{B}$.

A 3. 1. Tételnek közvetlen következménye a következő:

5. 2. TÉTEL. *Egy B, $\hat{B}$ l-megengedett bázispárnak akkor és csak akkor van olyan szomszédja, amely egy $\mathbf{a}_k$ (ill. $\hat{\mathbf{a}}_k$) vektor bevonásával jön létre, ha $\mathbf{d}_k$-nak (ill. $\hat{\mathbf{d}}_k$-nak) van pozitív komponense. Ez esetben a szomszéd egyértelműen meghatározott.*

5. 4. Az algoritmus. Legyen $B^{(-2)}=(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$, $\hat{B}^{(-2)}=(\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n)$. Minthogy $D^{(-2)}=(\mathbf{a}_0, A)$, $\hat{D}^{(-2)}=(\hat{\mathbf{a}}_0, \hat{A})$, azért a $B^{(-2)}$, $\hat{B}^{(-2)}$ bázispár nem megengedett.

Értelmezzük a $B^{(-1)}$, $\hat{B}^{(-1)}$ bázispárt a következőképpen: legyen $k=m+1$ és vonjuk be a $B^{(-2)}$ bázisba az $\mathbf{a}_k$ vektort.[4] A $B^{(-2)}$-ből elhagyandó vektor h indexét a következő összefüggésből határozzuk meg:

$$(5.4.1) \qquad \frac{1}{d_{h,k}^{(-2)}}\,\delta_h^{(-2)} = 1-\max\frac{1}{d_{i,k}^{(-2)}}\,\delta_i^{(-2)} \qquad i\in I^{(2)}.$$

Minthogy $D^{(-2)}$-nek nincsenek arányos sorai, azért az (5. 4. 1) összefüggés egyértelműen határozza meg a h indexet. Legyen $\hat{B}^{(-1)}=\hat{B}^{(-2)}$.

Következő lépésként a $B^{(0)}$, $\hat{B}^{(0)}$ bázispárt alkotjuk meg. Legyen $B^{(0)}=B^{(-1)}$, és $\hat{k}=n+h$. Vonjuk be a $\hat{B}^{(-1)}$ bázisba az $\hat{\mathbf{a}}_{\hat{k}}$ vektort. A $\hat{B}^{(-1)}$-ből elhagyandó vektor j indexét a következő összefüggésből határozzuk meg:

$$(5.4.2) \qquad \frac{1}{\hat{d}_{j,\hat{k}}^{(-1)}}\,\hat{\delta}_j^{(-1)} = 1-\max\frac{1}{\hat{d}_{i,\hat{k}}^{(-1)}}\,\hat{\delta}_i^{(-1)} \qquad i\in \hat{I}^{(-1)}.$$

Minthogy $\hat{D}^{(-1)}$-nek nincsenek arányos sorai, azért az (5. 4. 2) összefüggés egyértelműen definiálja a j indexet.

A transzformációs formulák megvizsgálása után látjuk, hogy $B^{(0)}$, $\hat{B}^{(0)}$ l-megengedett bázispár. Valóban, az (5. 4. 1) és (5. 4. 2) éppen ebből a követelményből született. A már hangsúlyozott egyértelműségre a továbbiakban még támaszkodni fogunk a következő alakban:

Pontosan egy olyan l-megengedett B bázis van, amely $m-1$ darab $\mathbf{e}_i$ vektorból és $-\mathbf{g}_1$-ből áll, ez $\hat{B}^{(0)}$.

[4] Az első lépésben a $-G$ mátrix tetszőleges oszlopát vonhatjuk a bázisba, az egyszerűség kedvéért az elsőt választjuk.

Pontosan egy olyan l-megengedett $\hat{B}$ bázis van, amely $n-1$ darab $\hat{\mathbf{e}}_i$ vektorból és $-\hat{\mathbf{g}}_h$-ból áll, ez $\hat{B}^{(0)}$.

A transzformációs formulák megvizsgálása után látjuk, hogy $B^{(0)}$, $\hat{B}^{(0)}$ l-megengedett bázispár. Minthogy — miként az könnyen látható — $\hat{\mathbf{d}}_j^{(0)} < \mathbf{0}$, azért az 5. 2. Tétel szerint a $B^{(0)}$, $\hat{B}^{(0)}$ bázispárnak nincs olyan szomszédja, amelyet $\hat{\mathbf{a}}_j$ bevonásával kaphatnánk.

A $B^{(0)}$, $\hat{B}^{(0)}$ párból kiindulva alkossuk meg a

$$B^{(0)}, \hat{B}^{(0)};\quad B^{(1)}, \hat{B}^{(1)};\quad B^{(2)}, \hat{B}^{(2)}; \ldots \tag{5.4.3}$$

szomszédos bázispárokból álló sorozatot a következőképpen:

ha a $B^{(q)}$, $\hat{B}^{(q)}$ megalkotása során $\mathbf{a}_j$ hagyta el $B^{(q-1)}$-et és $\hat{B}^{(q)} = \hat{B}^{(q-1)}$, akkor legyen $B^{(q+1)} = B^{(q)}$ és $\hat{\mathbf{a}}_k$-val jelölve az $\mathbf{a}_j$ kiegészítő párját, a $\hat{B}^{(q+1)}$ úgy jön létre $\hat{B}^{(q)}$-ból, hogy abba $\hat{\mathbf{a}}_k$-t vonjuk be;

ha a $B^{(q)}$, $\hat{B}^{(q)}$ megalkotása során $B^{(q)} = B^{(q-1)}$, és $\hat{\mathbf{a}}_j$ hagyta el $\hat{B}^{(q-1)}$-et, akkor $\mathbf{a}_k$-val jelölve az $\hat{\mathbf{a}}_j$ kiegészítő párját, $B^{(q+1)}$ úgy jön létre $B^{(q)}$-ból, hogy abba $\mathbf{a}_k$-t vonjuk be és legyen $\hat{B}^{(q+1)} = \hat{B}^{(q)}$.

A $B^{(0)}$, $\hat{B}^{(0)}$ párról elindulva az (5. 4. 2) alatt értelmezett $\hat{\mathbf{a}}_j$ játssza a definícióban leírt szerepet és így a sorozatot az 5. 2. Tétel szerint egyértelműen meghatároztuk.

Az értelmezésből világos, hogy a sorozat minden elempárja l-megengedett bázispár.

A sorozat képzését akkor fejezzük be, ha vagy $\mathbf{a}_{m+1} = -\mathbf{g}_1$, vagy pedig $\hat{\mathbf{a}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_1$ elhagyja a megfelelő bázist.

5. 3. TÉTEL. *A* (4. 3) *bázissorozat véges.*

Bizonyítás. Minthogy az A, $\hat{A}$-ból kiválasztható bázispárok száma véges, elég azt bizonyítani, hogy a sorozatban egyetlen pár sem ismétlődik.

Ha volna olyan pár a sorozatban, amely kétszer is fellép, akkor volna egy első ilyen pár. A sorozat elemeit úgy értelmeztük, hogy minden bázispár esetén pontosan egy kiegészítő pár, nevezetesen $\mathbf{a}_{m+1}$, $\hat{\mathbf{a}}_1$ szerepel bázisban, pontosan egy kiegészítő pár van bázison kívül, s az adott bázispár szomszédai ezek bevonásával jönnek létre. Az 5. 2. Tételből eszerint az következik, hogy minden bázispárnak legfeljebb két szomszédja van.

Az első ismétlődő pár nem lehet $B^{(0)}$, $\hat{B}^{(0)}$, minthogy — mint már megjegyeztük — nincs olyan szomszédjuk, amely $\hat{\mathbf{a}}_j$ bevonásával jönne létre.

Az első ismétlődő párt más kell, hogy megelőzze az első fellépés alkalmából, mint a másodiknál, különben nem ő volna az első. Ekkor azonban legalább három szomszédja volna, ami — mint láttuk — lehetetlen.

5. 4. TÉTEL. *A* (4. 3) *sorozat utolsó eleme kiegészítő megoldást szolgáltat az* (5. 2. 5a)—(5. 2. 7) *feladathoz.*

Bizonyítás. Az 5. 3. Tétel szerint van utolsó bázispár. Ez elvileg két kategóriába tartozhat.

I. A bázispár kiegészítő bázispár.

II. A bázispár nem kiegészítő, de a sorozat következő elemét nem tudjuk képezni az 5. 2. Tételben szereplő premissza megsértése miatt.

Elég azt megmutatnunk, hogy a II. eset nem léphet fel. Indirekt úton fogunk bizonyítani. Tegyük fel, hogy az utolsó $B, \hat{B}$ bázispár a II. Kategóriába tartozik; vizsgáljuk meg, milyen lehet a B, ill. $\hat{B}$ bázisok szerkezete.

Minthogy a $B, \hat{B}$ pár különbözik a $B^{(0)}, \hat{B}^{(0)}$ pártól, azért legalább az egyikük különbözik.

A II. esetben a bázispár azért nem kiegészítő, mert $-\mathbf{g}_1$ benne van B-ben, $\hat{\mathbf{e}}_1$ pedig $\hat{B}$-ben. A B bázis a $-\mathbf{g}_1$-en kívül tartalmaz bizonyos számú $\mathbf{e}_i$ vektort is. A jelölés egyszerűsítése érdekében tegyük fel, hogy éppen $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ $0 \leqq r < m$ van B-ben. Ugyancsak a jelölés egyszerűsége kedvéért tegyük fel, hogy $\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_s$ $1 \leqq s < n$ szerepel a $\hat{B}$-ben. Minthogy a bázispárok csak egy kiegészítő párt tartalmaznak, azért a B további vektorai $-\mathbf{g}_{s+1}, \ldots, -\mathbf{g}_n$-ből, a $\hat{B}$ további vektorai $-\hat{\mathbf{g}}_{r+1}, \ldots, \ldots, -\hat{\mathbf{g}}_m$-ből kerülnek ki. A felsorolt vektorok összes száma $m+n+1$, így pontosan egy felesleges van közöttük. Feltehetjük, hogy ez vagy $-\mathbf{g}_{s+1}$, vagy pedig $-\hat{\mathbf{g}}_{r+1}$. Az első esetben tehát

$$B = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, -\mathbf{g}_1, -\mathbf{g}_{s+2}, \ldots, -\mathbf{g}_n)$$
$$\hat{B} = (\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_s, -\hat{\mathbf{g}}_{r+1}, \ldots, -\hat{\mathbf{g}}_m), \tag{5.4.4}$$

a másodikban pedig

$$B = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, -\mathbf{g}_1, -\mathbf{g}_{s+1}, \ldots, -\mathbf{g}_n)$$
$$\hat{B} = (\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_s, -\hat{\mathbf{g}}_{r+2}, \ldots, -\hat{\mathbf{g}}_m). \tag{5.4.5}$$

Mindkét eset elképzelhető, hisz az

$$r+n-s = m, \quad 0 \leqq r < m,$$
$$s+m-r = n, \quad 0 < s < n;$$

továbbá az

$$r+n-s+1 = m, \quad 0 \leqq r < m,$$
$$s+m-r-1 = n, \quad 0 < s < n;$$

rendszerek konzisztensek.

Az első esetben a bázison kívüli kiegészítő vektorpár $-\mathbf{g}_{s+1}, \hat{\mathbf{e}}_{s+1}$, a másodikban $\mathbf{e}_{r+1}, -\hat{\mathbf{g}}_{r+1}$.

Feltételezésünk szerint ezek valamelyike a neki megfelelő bázisban csupa nem-pozitív együtthatóval állítható elő.

Vizsgáljuk sorra a lehetőségeket. Az első esetben vagy

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{e}_i d_{i,m+s+1} - \mathbf{g}_1 d_{m+1,m+s+1} - \sum_{i=m+s+2}^{m+n} \mathbf{g}_i d_{i,m+s+1} = -\mathbf{g}_{s+1}, \tag{5.4.6}$$

vagy pedig

$$\sum_{i=1}^{s} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{d}_{i,s+1} - \sum_{i=n+r+1}^{n+m} \hat{\mathbf{g}}_i \hat{d}_{i,s+1} = \hat{\mathbf{e}}_{s+1}. \tag{5.4.7}$$

E képletekben valamennyi $d_{i,k}$ együttható nem pozitív. Ezt figyelembe véve az (5.4.6) egyenlet csak akkor lehet konzisztens, ha $r=m$, hisz (5.2.2) szerint a jobb oldal minden komponense negatív, a bal oldalon pedig az első összeg kivételével csupa nem-negatív vektorból áll. Ez viszont lehetetlen.

Az (5. 4. 7) egyenlet csak úgy lehet konzisztens — ismét a benne szereplő együtthatók nempozitivitása, továbbá (5. 2. 2) miatt —, ha $s = n-1$. Ekkor azonban (5. 4. 5)-ből láthatjuk, hogy $B = B^{(0)}$. Minthogy a $-\mathbf{g}_1, \hat{\mathbf{e}}_1$ páron kívül további kiegészítő pár nem lehet bázisban, ezért $-\hat{\mathbf{g}}_h$ szükségképpen benne van $\hat{B}$-ben, s így egy korábbi megjegyzésünk szerint $\hat{B} = \hat{B}^{(0)}$, ami lehetetlen.

Vizsgáljuk ezután a második esetet. Ekkor vagy

$$(5.4.8)\qquad \sum_{i=1}^{r} \mathbf{e}_i d_{i,r+1} - \mathbf{g}_1 d_{m+1,r+1} - \sum_{i=m+s+1}^{m+n} \mathbf{g}_i d_{i,r+1} = \mathbf{e}_{r+1}$$

vagy pedig

$$(5.4.9)\qquad \sum_{i=1}^{s} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{d}_{i,n+r+1} - \sum_{i=n+r+2}^{n+m} \hat{\mathbf{g}}_i \hat{d}_{i,n+r+1} = -\hat{\mathbf{g}}_{r+1}$$

Az (5. 4. 8) egyenletrendszer csak $r = m-1$ esetén lehet konzisztens, ekkor azonban, mint már láttuk $B = B^{(0)}$ s így a $\hat{\mathbf{g}}_i$ vektorok közül legfeljebb $\mathbf{g}_h$ szerepelhet $\hat{B}$-ben, s így vagy $\hat{B} = \hat{B}^{(0)}$, vagy pedig $\hat{B} = \hat{B}^{(-1)}$. Mindkét lehetőség ellentmond valamelyik feltételünknek.

Végül az (5. 4. 9) egyenletrendszer csak $s = n$ esetén lehet konzisztens, ami ismét lehetetlen.

Minthogy valamennyi lehetőség ellentmondásra vezetett, azért az 5. 4. Tétel állítása helyes.

Az 5. 4. Tétel közvetlen következménye a következő:

5. 5. TÉTEL. *A bimátrix játéknak mindig van egyensúlypontja.*

Kedves kötelességemnek teszek eleget, amikor ez úton is köszönetet mondok PRÉKOPA ANDRÁSnak azért a segítségért, amelyet munkám során tőle kaptam.

IRODALOM

[1] BALINSKI, M. L., An Algorithm for Finding all Vertices of Convex Polyhodral sets, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* **9**, (1961), pp. 72—88.

[2] CHARNES, A., Optimality and Degeneracy in Linear Programming, *Econometrica*, **20**, (1952), pp. 160—170.

[3] CHARNES, A. and W. W. COOPER, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, Vols. I. and II., John Wiley, New York, 1961.

[4] COTTLE, R. W., Note on a Fundamental Theorem in Quadratic Programming, *J. Soc. Ind. Appl. Math. Vol.* 12. No. 3. September 1964.

[5] COTTLE, R. W., Symmetric Dual Quadratic Programs, *Quart, Appl. Math.* **21**, (1963), pp. 237—243.

[6] DANTZIG, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1963.

[7] DANTZIG, G. B., Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities, *Activity Analysis of Production and Allocation* (T. C. *Koopmans*, ed), John Wiley, New York, 1951, pp. 339—347.

[8] DANTZIG, G. B. and R. W. COTTLE, *Positive (Semi) Definite Matrices and Mathematical Programming*, Operations Research Center, University of California, Berkeley, ORC 63—18 (RR), May 1963.

[9] DANTZIG, G. B. and R. W. COTTLE, *Positive* (Semi) *Definite Programming, in Nonlinear Programming*, ed J. Abadie, Nort-Holland, 1967.

[10] DANTZIG, G. B., E. EISENBERG and R. W. COTTLE, *Symmetric Dual Nonlinear Programs*, Operations Research Center, Univ. of. Calif. Berkeley, RR 30, December 1962.

[11] DANTZIG, G. B., A. ORDEN and P. WOLFE, The Generalized Simplex method for Minimizing a Linear Form under Inequality Restraints, *Pac. J. Math.*, **5** (1955), pp. 183—195.
[12] DENNIS, J. B., *Mathematical Programming and Electrical Networks*, Technology Press and John Wiley and Sons, New York, 1959.
[13] DORN, W. S., A Duality Theorem for Convex Programs, *IBM J. Res. Develop.* **4**, (1960), 407.
[14] DORN, W. S., A Symmetric Dual Theorem for Quadratic Programs, *J. Op. Res. Soc. of Japan* **2**, (1960), 93.
[15] DORN, W. S., Duality in Quadratic Programming, *Quart. Appl. Math.* **18**, (1960), pp. 155—162.
[16] DORN, W. S., Self Dual Quadratic Programs, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* **9**, (1961), pp. 51—54.
[17] DUFFIN, R. J., *Infinite Programs, in Linear Inequalities and Related Systems,* ed. Kuhn-Tucker, Princeton 1956. pp. 157—170.
[18] EISENBERG, E., Duality in Homogeneous Programming, *Proc. Amer. Math. Soc.* **12**, (1961), pp. 783—787.
[19] FARKAS, J., Über die Theorie der einfachen Ungleichungen, *J. Reine Angew. Math.*, **124**, (1902), pp. 1—24.
[20] FRANK, M. and P. WOLFE, An Algorithm for Quadratic Programming, *Nav. Res. Log. Qu.* **3**, (1956), pp. 95—110.
[21] GALE, D., *The Theory of Linear Economic Models*, Mc. Graw-Hill, New York, 1960.
[22] GASS, S. I., *Linear Programming*, Mc. Graw Hill, New York, 1958.
[23] GOLDMANN, A. J. and A. W. TUCKER, *Theory of Linear Programming*, *Linear Inequalities and Related Systems* (H. W. KUHN and A. W. TUCKER ed s.) Ann. of Math. Study 38., Princeton University Press, Princeton, pp. 53—97.
[24] GRAVES, R. L., A Principal Pivoting Simplex Algorithm for Linear and Quadratic Programming, *Op. Res.* **15**, (1967), No. 3., pp. 482—494.
[25] GRIESMER, J. H., A. J. HOFFMAN, and A. ROBINSON, On Symmetric Bimatrix Games, *IBM Research Report, June*, 1963.
[26] HAAR, A., A lineáris egyenlőtlenségekről, *Matematikai és Természettudományi Értesítő*, **36**, (1918), pp. 279—296.
[27] HAAR, A., Über lineare Ungleichungen, *Acta Sci. Math.*, **2**, (1924), pp. 1—24.
[28] HADLEY, G., *Linear Programming*, Addison-Wesley, 1963.
[29] HADLEY, G., *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley, 1964.
[30] HANSON, M. A., A Duality Theorem in Nonlinear Programming with Nonlinear Constraints, *Austr. J. Stat.* **3**, (1961), 64.
[31] HANSON, M. A., Duality and Self-Duality in Mathematical Programming. *J. Soc. Ind. Appl. Math. Vol.* **12**, (1964), No. 2, June.
[32] HANSON, M. A. and B. MOND, Quadratic Programming in Complex Space, *J. Math. Anal. Appl.*, **20**, (1967), 507—514.
[33] HUARD, P., Dual Programs, *IBM J. Res. Develop.*, **6**, 137 (1962).
[34] JOHN, F., *Extremum Problems with Inequalities and Subsidiary Conditions*, *Studies and Essays*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York, 1948.
[35] KARAMARDIAN, S., Strictly Quasi-Convex (Concave) Functions and Duality in Mathematical Programming, *J. of. Math. An. and Appl.* **20**, (1967), 344—358.
[36] KUHN, H. W., An Algorithm for Equilibrium Points in Bimatrix Games, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **47**, (1961), pp. 1657—1662.
[37] KUHN, H. W., and A. W. TUCKER, "Nonlinear Programming", in *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Univ. of California Press, 1951. pp. 481—492.
[38] LEMKE, C. E., Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming, *Man. Sci.* **11**, (1965), 7.
[39] LEMKE, C. E., On Complementary Pivot Theory *RPI Math. Report* No. 75., July 1967.
[40] LEMKE, C. E., Orthogonality, Duality and Quadratictype Programming Problems in Mathematical Programming, AROSR, *RPI Math. Rep.* No. 56, June 1962.
[41] LEMKE, C. E. and F. T. HOWSON, Equilibrium Points of Bimatrix Games, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **12**, (1964), pp. 413—423.
[42] LEVINSTON, N., Linear Programming in Complex Space, *J. Math. Anal. Appl.* **14**, (1966), 44—62.
[43] MAJTHAY, A., On Complementary Pivot Theory, *Studia Sci. Math. Hung.* IV. (1969), pp. 213—224.
[44] MAJTHAY, A., On Basis Optimality in Linear Programming *Studia Sci. Math. Hung* IV. (1969), pp. 207—212,
[45] MANGASARIAN, O. L., Duality in Nonlinear Programming, *Quart. Appl. Math.* **20**, (1962), 300.

[46] MANGASARIAN, O. L., Equilibrium Points of Bimatrix Games, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **12**, (1964), pp. 778—780.
[47] MANGASARIAN, O. L. and J. PONSTEIN, Minmax and Duality in Nonlinear Programming, *J. Math. Anal. Appl.* **11**, (1965), 504—518.
[48] MANGASARIAN, O. L. and H. STONE, *Two Person Nonzero-Sum Games and Quadratic Programming*, Shell Development Company, Emeryville, California, Paper 1186.
[49] MEHNDIRATTA, S. L., General Symmetric Dual Programs. *Op. Res.* **14**, (1966), No. 1., pp. 164—172.
[50] MILLS, H., Equilibrium Points in Finite Games, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **8**, (1960), pp. 397—402.
[51] MOND, B., A Symmetric Dual Theory for Non-Linear Programs, *Quart. Appl. Math.*, **23**, (1965), No. 3., pp. 265—269.
[52] NASH, J., Non Cooperative Games, *Ann. of Math.*, **54** (1951), pp. 286—295.
[53] NEUMANN, J. and D. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 3d Edition, Princeton, 1953.
[54] PRÉKOPA, A., *Lineáris programozás*, a Bolyai János Matematikai Társulat Kiadványa 1968.
[55] ROCKAFELLAR, R. T., Duality and Stability in Extremum Problems Involving Convex Functions, *Pacific J. Math.*, **21**, (1967), 167—187.
[56] ROCKAFELLAR, R. T., Duality Theorems for Convex Functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70**, (1964), 189—192.
[57] ROSEN, J. B., The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **8**, (1960), pp. 181—207.
[58] SIMONNARD, M., *Programmation linéaire*, Dunod, Paris, 1962.
[59] STOER, J., On a Duality Theorem in Nonlinear Programming. *Numer. Math.*, **6**, (1964), 55—58.
[60] TUCKER, A. W., *Combinatorial Theory Underlying Linear Programs*, Recent Advances in Mathematical Programming (L. *Graves* and *P. Wolfe*, eds.), Mc. Graw-Hill, New York, 1963.
[61] TUCKER, A. W., *Dual Systems of Homogeneous Linear Relations*, (*H. W. Kuhn* and *A. W. Tucker* eds.), Ann. of Math. Study 38., Princeton University Press, Princeton, pp. 53—97. pp. 3—18.
[62] TUCKER, A. W., *Pivotal Algebra*, Seminar Notes by Torrence D. Parsons, Princeton University, 1967.
[63] TUCKER, A. M., Solving a Matrix Game by Linear Programming, *IBM J. Res. Devel*, **4**, (1960), pp. 507—517.
[64] VOROBJEV, N. N., Szituacii ravnoveszija v bimatricsnüh igrah, *Teorija verojatnosztej i ee primenenija*, **3**, (1958), Vüpuszk 3, 318—331.
[65] WOLFE, PH., A Duality Theorem for Nonlinear Programming, *Quart. Appl. Math.*, **19**, (1961), 239.
[66] WOLFE, PH., The Simplex Method for Quadratic Programming, *Econometrica* **27**, (1959), No. 3. 382—398.

(Beérkezett: 1969. V. 5.)

COMPLEMENTARY PIVOT THEORY

by

A. MAJTHAY

Summary

The complementary pivot algorithms were recently developed by DANTZIG, COTTLE, LEMKE and GRAVES. They deal with the solution of the following problem: Find nonnegative m-component vectors $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$, which satisfy the system (2.1.1)—(2.1.4).

This problem can be treated as a quadratic programming problem, but it seems more advantageous to seek for special algorithms which are based on the special structure of the problem.

The problem is closely related to the quadratic programming problem, to the pair of dual quadratic programs defined by DORN, to the symmetric dual pair of quadratic programs of COTTLE, to the self-dual quadratic programs, and to bymatrix games.

In the paper we are investigating three complementary pivot algorithms for the solution of the problem. They are treated combinatorially, are proved to be finite and to solve the problem for special stuctured matrices G. The algorithms are uniquely determined procedures, lexicographic rules guarantee the uniqueness of them. They consist essentially of a series of almost complementary, lexicographically feasible bases to the matrix $(G, -I)$ each one differing in exactly one vector from the previous one.

The first algorithm works for the class of co-positive-plus matrices which includes the class of semidefinit matrices which are not supposed to be necessarily symmetric, all matrices greater than a semidefinit matirx and all matrices not less than a positive definit matrix. A co-positive-plus matrix is a matrix G with the following properties: $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ implies $\mathbf{z}^T G \mathbf{z} = 0$, and $\mathbf{z}^T G \mathbf{z} = 0$ implies $(G + G^T)\mathbf{z} = \mathbf{0}$. As the convex quadratic minimumproblem (concave quadratic maximumproblem) can be reduced to our problem with a positive semi-definit matrix, the first algorithm solves it or shows that it has no solution.

As an interesting corollary we mention the following theorem: if for a co-positive-plus matrix G the system $\mathbf{w} = G\mathbf{z} + \mathbf{g}$, $\mathbf{w} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ has a solution, then among its solutions there always exists at least one for that $\mathbf{z}^T \mathbf{w} = 0$.

The second algorithm is mainly a preparation to the third one, which is intended to solve a bymatrix games. It gives a solution for the bymatrix game in a finite number of steps and thus it gives a constructive proof for the existence of a NASH equilibrium point.