

EGY ELHELYEZÉSI PROBLÉMAKÖRÖRŐL, I.

Írta: TÖLGYESI LÁSZLÓ

Varga Ottó akadémikus emlékére

1. Bevezetés

Legyen A egy halmaz, $B = \{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ pedig egy, az A részhalmazzaiból álló halmazrendszer, ahol Γ tetszőleges indexhalmaz. Legyen továbbá $K = K(A, B')$ egy A -ra és B' -re értelmes kijelentés, ahol B' a B -nek tetszőleges részrendszere. Legyen adva végül minden (A, B') párra értelmezett $f(A, B')$ valós függvény.

1. probléma. Mely (A, B') párok esetén lesz az $f(A, B')$ függvénynek (lokális vagy globális) szélsőértéke, azzal a feltétellel, hogy $K(A, B')$ logikai értéke igaz?

1. MEGJEGYZÉS. POGÁNY Csaba hívta fel a szerző figyelmét az 1. és 1. 1. problémákra, valamint a 2. problémával való kapcsolatra, miután a szerző az 1. 1. 1. és 1. 1. 2. problémákkal foglalkozni kezdett. Ennek megfelelően, ahol lehetett, az eredményeket a 2. probléma szempontjából is részleteztük, és néhány kezdő n -re megadtuk a választ egy korlátozó feltevés mellett.

Specializáljuk a problémát a következő módon: Legyen $i(B_j)$ a B_j halmaz belső pontjainak a halmaza, $|B'|$ a B' halmazrendszer számossága, A az euklideszi sík, B pedig az euklideszi síkon levő zárt halmazoknak egy olyan rendszere, amely minden E elemével együtt ennek összes egybevágó képét is tartalmazza. Legyen K a következőképpen értelmezve:

$$K = (|B'| = n) \ \& \ (i(B_k) \cap i(B_l)) = \emptyset, \quad k \neq l.$$

Legyen végül

$$f(A, B') = \sum_{i,j=1}^n \varrho(b_i, b_j),$$

ahol $b_i \in B_i$ és $b_j \in B_j$, és $\varrho(b_i, b_j)$ a b_i és b_j elem távolsága. Más szavakkal:

1. 1. probléma. Határozzuk meg a

$$\min_{\substack{B' \subset B \\ K = \dagger}} f(A, B') = \min_{\substack{B' \subset B \\ K = \dagger}} \sum_{i,j=1}^n \varrho(b_i, b_j)$$

szélsőértéket.

2. MEGJEGYZÉS. Érdekes problémákhoz juthatunk az előbbi egybevágóság helyett más transzformációk és megkötések bevezetésével.

Ha az 1. 1. problémát tovább specializáljuk úgy, hogy B az A sík egyetlen egyenlő oldalú háromszögének, illetve egyetlen négyzetének összes egybevágó képeiből álljon, ekkor kapjuk az alábbi 1. 1. 1. és 1. 1. 2. problémát.

1. 1. 1. probléma. Hogyan kell elhelyezni a síkon n darab egybevágó szabályos háromszöget a *legtömörebben*, azaz úgy, hogy $\sum_{i,j=1}^n \varrho(h_i, h_j)$ minimális legyen,

azzal a feltétellel, hogy $h_i \in H_i$, $h_j \in H_j$ ($i \neq j$), H_1, H_2, \dots, H_n a sík egybevágó szabályos háromszögei, és

$$i(H_j) \cap i(H_k) = \emptyset, \quad j \neq k.$$

Általánosságban is bevezethetjük a következő fogalmat:

Definíció. Az olyan elrendezéseket, amelyekben a fenti távolságösszeg minimális, *legtömörebb* elrendezéseknek nevezzük.

1. 1. 2. probléma. Hogyan kell elhelyezni a síkon n darab egybevágó négyzetet a *legtömörebben*, azaz úgy, hogy $\sum_{i,j=1}^n (b_i, b_j)$ minimális legyen, ahol $b_i \in N_i$, $b_j \in N_j$ ($i \neq j$), N_1, N_2, \dots, N_n a sík egybevágó négyzetei, és

$$i(N_j) \cap i(N_k) = \emptyset, \quad j \neq k.$$

3. MEGJEGYZÉS. Egybevágó körökre BENEDIKTI István vizsgálta az 1. 1. problémát. Rokon problémákkal foglalkozik az [1] cikk.

Definíció. A B' halmazrendszer B_i elemeit a következőkben *hordozóhalmazoknak* nevezzük, a B_i hordozóhalmazhoz hozzárendelt b_i pontot ($b_i \in B_i$) pedig *mérőpontnak*.

Ennek alapján mondhatjuk, hogy [1]-ben a mérőpontok a hordozóhalmazokban rögzítve vannak, míg ebben a dolgozatban olyan problémákat vizsgálunk, ahol a mérőpontok a hordozóhalmazokon belül szabadon mozoghatnak.

Az előbb már említett 2. probléma a következő:

2. probléma. a) Legyen adva egy B halmazrendszer E_n -ben. E halmazrendszer egyes részszerzeit alkotó halmazok bizonyos elemeinek egyesítése* útján hány egymással nem homeomorf halmazt lehet előállítani?

b) Adott B halmazrendszerhez az előbbi módon tartozik egy másik, csupa topologikusan különböző halmazból álló B^* rendszer. Kérdés: Adott B^* halmazrendszert mely B halmazok állítják elő? Egyéb megkötések mellett mi a legbővebb, illetve legszűkebb B adott B^* -hoz?

c) A B halmazrendszer és az azt alkotó elemek tulajdonságai hogyan befolyásolják a B^* -ot és az őt alkotó elemek tulajdonságait?

d) E problémáknak egy olyan általánosítása is érdekes, amikor több B , pl. B_1 és B_2 van megadva, és úgy vetjük fel az analóg a), b) és c) kérdéseket, hogy a homeomorfhiát B_1 , valamint B_2 vonatkozásban külön-külön vagy együttesen is vizsgáljuk.

4. MEGJEGYZÉS. Ismeretes FÁRY István tétele ([2]), mely szerint minden síkba rajzolható gráf realizálható a síkon oly módon, hogy csúcsainak pontok, éleinek zárt egyenesszakaszok felelnek meg úgy, hogy két szakasz közös pontja mindig csúcsnak megfelelő pont. Ez a tétel felfogható arra a kérdésre adott válaszként is, hogy mely síkra rajzolható gráfok építhetők fel egyenesszakaszokból? A 2. probléma ily módon gráfok geometriai realizációjának elméletével is kapcsolatos. Az itt szereplő vizsgálatoknál néhány legtömörebb elrendezésű esetben megadjuk azokat a gráfokat, amelyek egybevágó egyenlő oldalú háromszögekből és egybevágó négyzetekből építhetők fel úgy, hogy a szóban forgó sokszögek csúcsait eleve gráf csúcspontoknak tekintettük.

* Metszése, szimmetrikus különbség képzése vagy más (halmazelméleti) művelet végzése.

2. Általános megjegyzések

1. TÉTEL. *Tetszőleges* B_1, B_2, \dots, B_s ($s > 1$, egész) síkbeli zárt ponthalmazrendszerre igaz, hogy

$$\sum_{i,j=1}^s \varrho(b_i, b_j) = 0, \quad b_i \in B_i, \quad b_j \in B_j,$$

akkor és csak akkor, ha $\bigcap_{i=1}^s B_i \neq \emptyset$.

Bizonyítás:

a) Tegyük fel, hogy

$$\bigcap_{i=1}^s B_i = \tilde{B} \neq \emptyset.$$

A feltétel alapján létezik legalább egy olyan \tilde{b} pont a síkban, amelyre

$$\tilde{b} \in \tilde{B}.$$

Mivel \tilde{b} a B_i ($i = 1, 2, \dots, s$) halmazok mindegyikének eleme, ezt a pontot választva közös mérőpontnak,

$$\sum_{j,i=1}^s \varrho_{ji}(\tilde{b}, \tilde{b}) = 0.$$

b) Ha $\sum_{i,j=1}^s \varrho(b_i, b_j) = 0$, akkor a $\varrho(b_i, b_j)$ távolságok mind 0-val egyenlők, valamilyen b_1, b_2, \dots, b_s -re ($b_i \in B_i, i = 1, 2, \dots, s$). Ekkor viszont van olyan \tilde{b} , amelyre $\tilde{b} \in B_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$), például $\tilde{b} = b_1$. Mivel ϱ metrika — azaz, ha $\varrho(x, y) = 0$, akkor $x = y$ — ezért $b_1 = b_i$ ($i = 1, \dots, s$).

2. TÉTEL. *Adott a* B_1, B_2, \dots, B_n ($n > 1$, egész) zárt síkbeli halmazrendszer; legyen

$$\gamma(n) = \min \sum_{i,j=1}^n \varrho(b_i, b_j); \quad b_i \in B_i, \quad b_j \in B_j,$$

és $i(B_j) \cap i(B_k) = \emptyset, (j \neq k)$. Akkor $\gamma(n)$ az n monoton növekvő függvénye.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy van olyan n , hogy

$$\gamma(n+1) < \gamma(n).$$

Ekkor az $(n+1)$ elemből álló halmazból elvéve egy elemet, a megmaradt n elemű rendszer távolságösszege nem növekedett, mivel $\varrho(b_i, b_j) \geq 0$. Tehát a megmaradt n elemű halmazrendszerre: $\gamma'(n) \leq \gamma(n+1)$, azaz $\gamma'(n) < \gamma(n)$ lenne, ami ellentmond $\gamma(n)$ minimális voltának.

3. Egybevágó egyenlő oldalú háromszögek legtömörebb elrendezése

Legyen H_1, H_2, \dots, H_n n darab egybevágó szabályos háromszög a síkban.

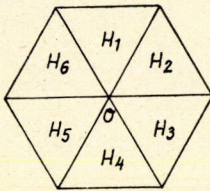
3. TÉTEL. Ha $2 \leq n \leq 6$, létezik H_1, H_2, \dots, H_n -nek olyan elrendezése, hogy

$$\sum_{i,j=1}^n \varrho(h_i, h_j) = 0; \quad h_i \in H_i, \quad h_j \in H_j,$$

és

$$i(H_j) \cap i(H_k) = \emptyset, \quad j \neq k.$$

Bizonyítás:



1. ábra

a) Először $n=6$ esetben látjuk be az állítást. Ebből egyszerűen következik a $2 \leq n < 6$ esetekre vonatkozó állítás.

Tekintsünk a síkban egy szabályos hatszöget, ezt O középpontjából a csúcsokba húzott szakaszokkal bontsuk 6 egybevágó szabályos háromszögre, ezeket jelöljük H_1, H_2, \dots, H_6 -tal (1. ábra).

Ezekre nyilván

$$(1) \quad i(H_j) \cap i(H_k) = \emptyset, \quad (j, k = 1, 2, \dots, 6; i \neq j).$$

Mivel $O \in H_i$ ($i=1, 2, \dots, 6$), legyen $h_i = O$ ($i=1, 2, \dots, 6$), akkor nyilván

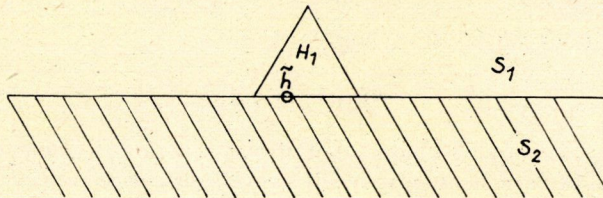
$$\sum_{i,j=1}^n \varrho(h_i, h_j) = 0.$$

5. MEGJEGYZÉS. Az 1. ábra szerinti elrendezésben a szabályos háromszögek O csúccsal szemközti oldalai szabályos hatszöget határoznak meg, hiszen abból indultunk ki. Bebizonyítjuk, hogy ez az egyetlen elrendezés, amelynél

$$\bigcap_{i=1}^6 H_i = \tilde{H} \neq \emptyset, \quad \text{és (1) is fennáll,}$$

azonkívül \tilde{H} -nak egyetlen eleme van, így az extrémumot adó mérőpontok is egyértelműen választhatók meg.

Tegyük fel ugyanis, hogy létezik a fentitől különböző elrendezés, ahol $\tilde{H} \neq \emptyset$, és (1) teljesül. Legyen $\tilde{h} \in \tilde{H}$. Nyilvánvaló, hogy \tilde{h} csak határpont lehet, és nem lehet mind-egyik háromszögben csúcspont. Ekkor H_i -k között van legalább egy, mondjuk H_1 , amelynek \tilde{h} nem csúcspontja, következésképpen valamely oldalának belső pontja (2. ábra).



2. ábra

A \tilde{h} ponton átmenő oldalegyenes a síkot két 180° -os, \tilde{h} csúcspontú szögtartományra bontja (S_1 és S_2). Az ábrából nyilvánvaló, hogy H_2, H_3, H_4, H_5 és H_6 szabályos háromszögek csak S_2 -ben helyezkedhetnek el, ami lehetetlen oly módon, hogy

$$\bigcap_{i=1}^6 H_i = \tilde{h} \text{ legyen.}$$

b) Ha $2 \leq n < 6$, akkor (az 1. ábrán látható) hat szabályos háromszögünk közül hagyjunk el $(6 - n)$ darabot. O ez esetben is a megmaradó n szabályos háromszög közös mérőpontjának vehető, tehát

$$\sum_{i,j=1}^n \varrho(h_i, h_j) = 0,$$

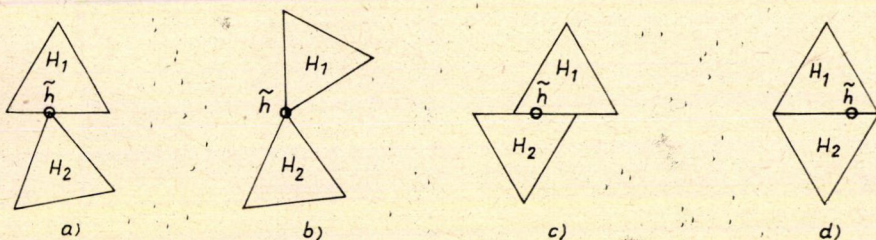
amivel a 3. tétel bizonyítását befejeztük.

Az elrendezés egyértelműségét $n=6$ esetben az 5. MEGJEGYZÉSben beláttuk. Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy ha $2 \leq n < 6$, mely esetekben lesz

$$\sum_{i,j=1}^n \varrho(h_i, h_j) = 0.$$

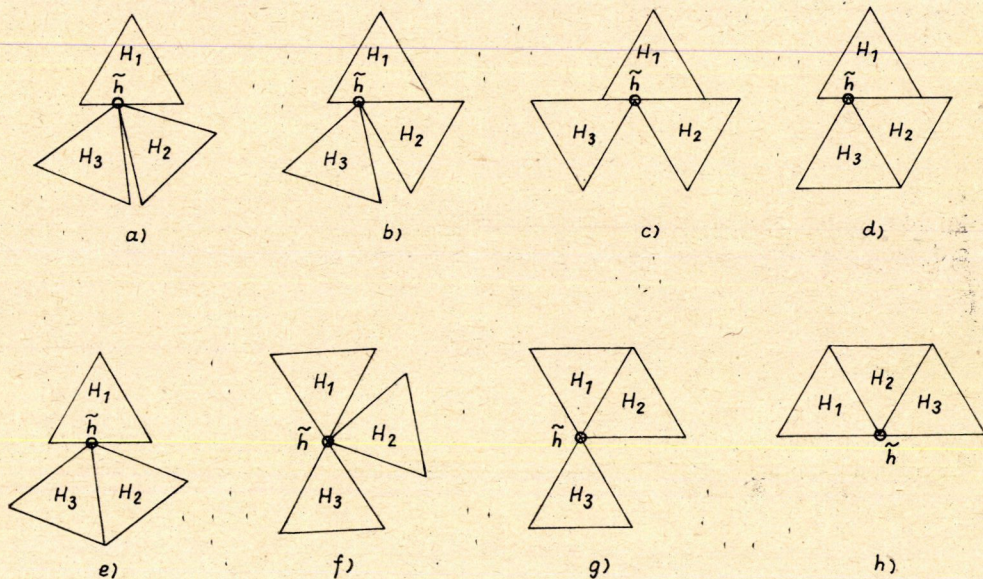
Nyilvánvalóan elégséges és szükséges is, hogy a mérőpontokat a határpontok halmazán mozgassuk. Adott n esetén egy ábrasorozattal adjuk meg a „topologikusan különböző”, azaz *nem homeomorf* elrendezéseket, választ adva a 2. problémára ezekben a speciális esetekben.

1. Szabályos háromszögek nem homeomorf elrendezései $n=2$ esetén:



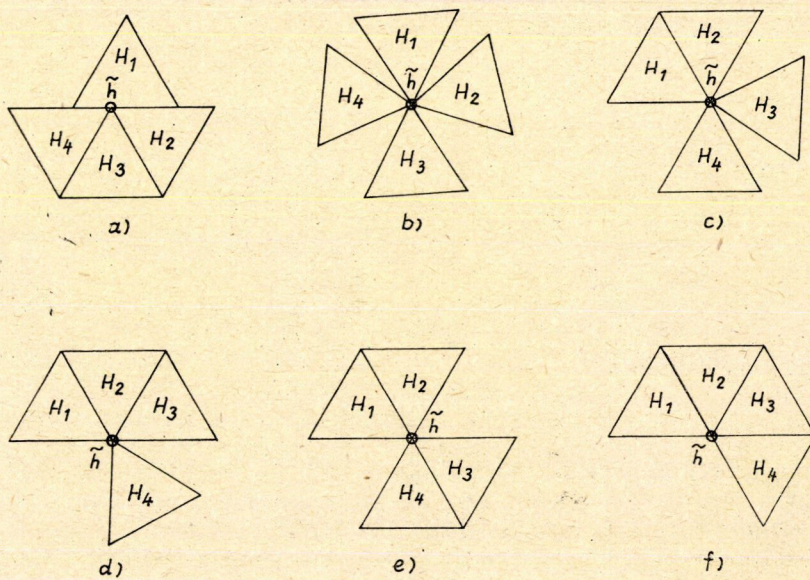
3. ábra

Könnyű belátni, hogy a 3. ábra a), b), c) és d) típusú elrendezésén kívül nincs több nem homeomorf elrendezés. Az is világos, hogy mind a négy esetben végtelen sok homeomorf elrendezés van, ahol $\tilde{h} \in \tilde{H} = H_1 \cap H_2$. A c) és d) típusú elrendezésekben \tilde{H} végtelen sok elemű halmaz, melynek bármely pontja választható közös mérőpontnak.

2. A nem homeomorf elrendezések az $n=3$ esetben:

4. ábra

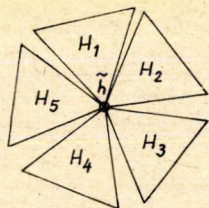
Könnyű belátni, hogy a h) eset kivételével bármelyik végtelen sok homeomorf elrendezést enged meg.

3. A nem homeomorf elrendezések $n=4$ esetén:

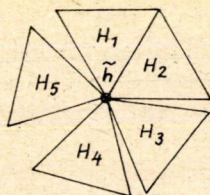
5. ábra

Ez esetben is könnyű belátni, hogy az f)-et kivéve mindegyik eset végtelen sok homeomorf elrendezést enged meg.

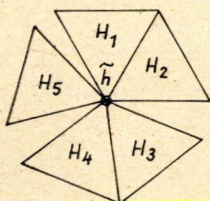
4. A nem homeomorf elrendezések $n=5$ esetén:



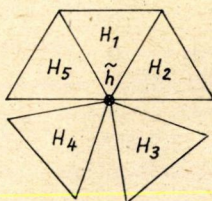
a)



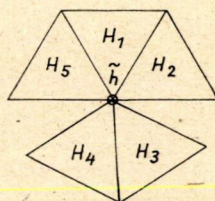
b)



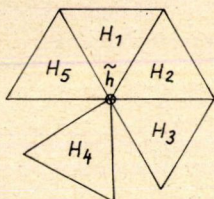
c)



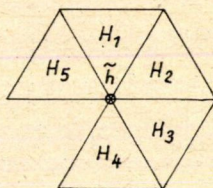
d)



e)



f)



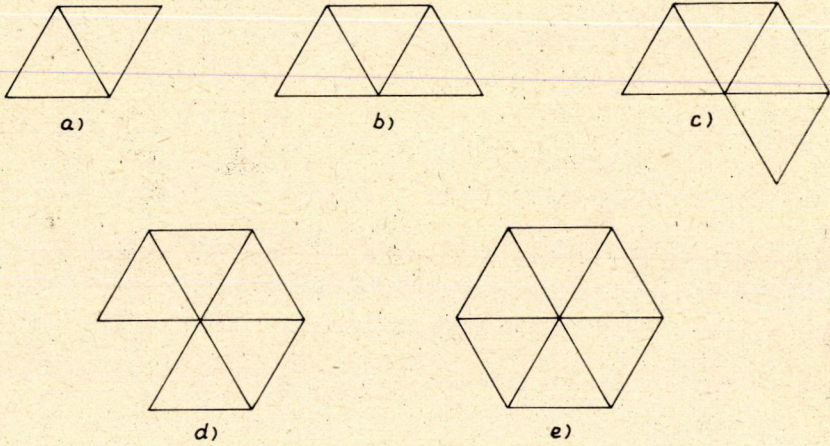
g)

6. ábra

g) kivételével mindegyik nem homeomorf eset végtelen sok homeomorf elrendezést enged meg.

6. MEGJEGYZÉS. A fent bemutatott extrémális elrendezések minden eddig tárgyalt n -nél lehetővé tették a háromszögek rácisos elrendezését, mint azt a 7. ábra sorozata mutatja.

Ez azt sejteti, hogy az extrémális elrendezések rácisosak lennének. Nagyobb n esetén a sejtett extrémális elrendezések azonban nem lesznek mindig rácisosak (l. az Összefoglalást, $n=7, 8, 9$).



7. ábra

7. MEGJEGYZÉS. A bevezetésben utaltunk rá, hogy az egybevágóság helyett más síkbeli transzformációt is tekintetbe vehetünk az 1.1.1. problémánál. Így újabb problémákat kapunk, ha pl. a szabályos háromszögekről nem kötjük ki, hogy egybevágók legyenek. Ekkor, ha $2 \leq n \leq 6$, szabályos (de nem szükségképpen egybevágó) háromszögek esetén egyszerűen megmutatható, hogy

$$\gamma(n) = \min_{i,j=1}^n \varrho(h_i, h_j) = 0,$$

azonban az egymással nem homeomorf esetek száma növekedni fog.

4. Egybevágó négyzetek legtömörebb elrendezése

Hasonló gondolatmenetet követünk, mint a szabályos háromszögek vizsgálatánál.

Legyenek N_1, N_2, \dots, N_n a sík egybevágó négyzetei ($n > 1$, egész).

4. TÉTEL. Ha $2 \leq n \leq 4$, létezik olyan elrendezés, hogy

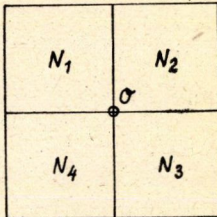
$$\sum_{i,j=1}^n \varrho(b_i, b_j) = 0; \quad b_i \in N_i, \quad b_j \in N_j,$$

$$\text{és} \quad i(N_j) \cap i(N_k) = \emptyset, \quad j, k = 1, 2, \dots, 4, \quad j \neq k.$$

Bizonyítás:

a) Tekintsük a sík egy négyzetét, és kössük össze a szemközti oldalfelező pontjait. Ily módon 4, egy közös csúcsponttal (O) rendelkező egybevágó négyzetet kapunk (8. ábra).

Mivel $O \in \tilde{N} = \bigcap_{i=1}^4 N_i$, az 1. tétel értelmében O -t közös mérfőpontnak választva, az állítás teljesül.



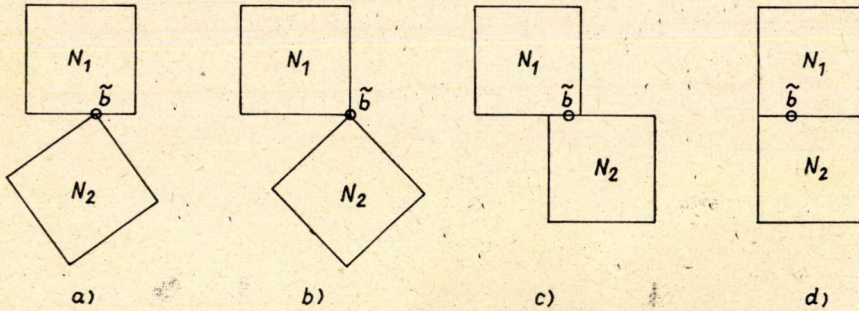
8. ábra

8. MEGJEGYZÉS. A 8. ábra szerinti elrendezés egyértelműsége hasonlóan bizonyítható, mint a szabályos háromszögeknél.

b) Ha $2 \leq n < 4$, akkor a 8. ábra elrendezéséből hagyjunk el $(4-n)$ négyzetet, és O ismét a megmaradó négyzetek közös mérőpontjának választható.

Az alábbiakban megvizsgáljuk n darab egybevágó négyzet nem homeomorf elrendezéseit, ha $2 \leq n < 4$.

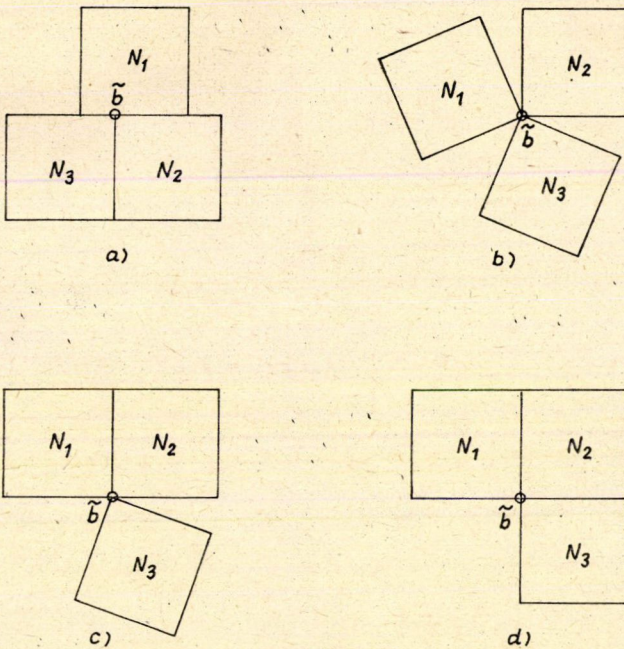
1. A nem homeomorf elrendezések $n=2$ esetén:



9. ábra

Könnyen belátható, hogy mind a 4 eset végtelen sok homeomorf elrendezést enged meg.

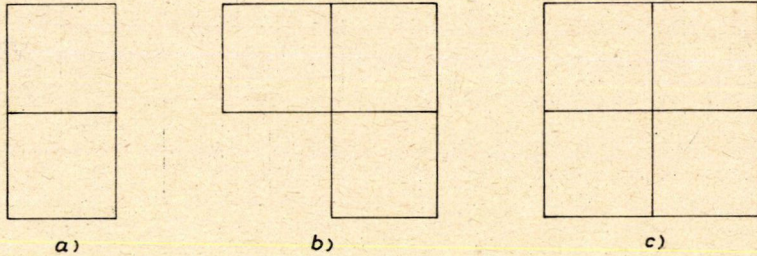
2. A nem homeomorf elrendezések $n=3$ esetén:



10. ábra

d) kivételével mindegyik eset végtelen sok homeomorf elrendezést enged meg.

9. MEGJEGYZÉS. A fenti elrendezések között minden n -re van rácsos elrendezés (11. ábra). A sejtetően extrémális elrendezések $n=5$ és $n=6$ -ra még igazolni látszanak ezt, nagyobb n -re azonban a sejtett extrémális elrendezések nem rácsosak. (L. az Összefoglalásban: $n=7$ -nél.)

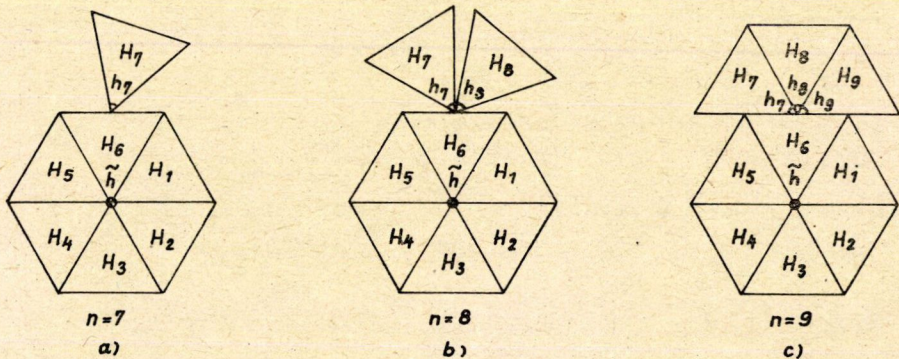


11. ábra

5. Összefoglalás

A cikk két speciális probléma kezdeti lépéseivel foglalkozik, szabályos háromszögeknél $n=6$ -ig, négyzeteknél pedig $n=4$ -ig ér el egyszerű eredményeket. Az ezeknél nagyobb n -re egzakt választ még nem sikerült adni, mivel a számolási nehézségek nagyobb n -ek esetén jelentősen megnövekednek. Az alábbiakban azonban felvázolunk még néhány sejtetően extrémális vagy extrémálisához közel álló elrendezést.

Az 1. 1. 1. problémával kapcsolatban az alábbiak sejtetően extrémális elrendezések:



12. ábra

a) esetben $\gamma(7) \cong \sum_{i,j=1}^7 \varrho(h_i, h_j) = 6 \cdot \sqrt{3} \cdot a = a \cdot 10,3920 \dots$

b) esetben $\gamma(8) \cong \sum_{i,j=1}^8 \varrho(h_i, h_j) = 12 \cdot \sqrt{3} \cdot a = a \cdot 20,7840 \dots$

c) esetben $\gamma(9) \cong \sum_{i,j=1}^9 \varrho(h_i, h_j) = 18 \cdot \sqrt{3} \cdot a = a \cdot 31,1760 \dots$

ahol a a szabályos háromszög oldalának hossza.

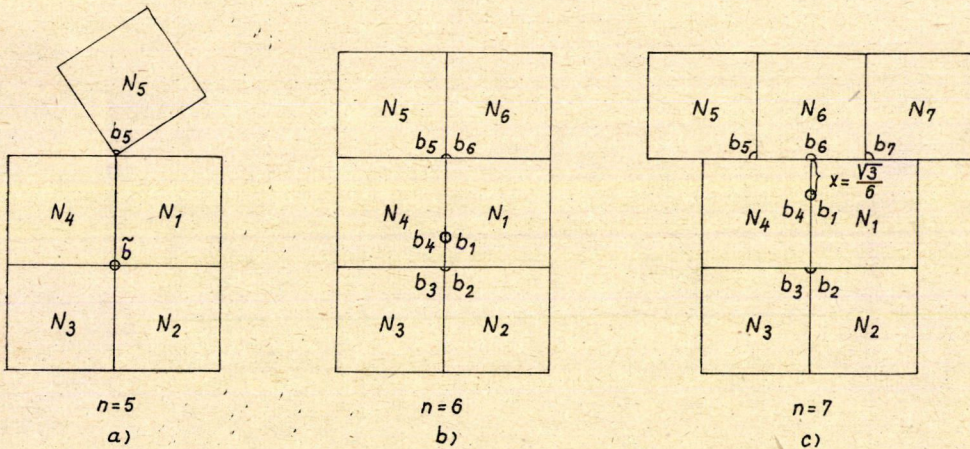
Az 1. 1. 2. problémával kapcsolatban a sejthetően extrémális vagy extrémálisához közel álló elrendezések:

Ha a a négyzet oldalhosszúsága, akkor

a) esetben $\gamma(5) \cong \sum_{i,j=1}^5 \varrho(b_i, b_j) = 8 \cdot a$

b) esetben $\gamma(6) \cong \sum_{i,j=1}^6 \varrho(b_i, b_j) = 16 \cdot a;$

b_1 és b_4 az N_1 és N_4 közös oldalán bárhol felvehető.



13. ábra

c) esetben $\gamma(7) \cong \sum_{i,j=1}^7 \varrho(b_i, b_j) = a \cdot 28,4076\dots$

Az alábbi táblázatban összefoglaljuk a 2. problémával kapcsolatos eredményeket:

n	Egybevágó szabá- lyos háromszögek	Egybevágó négyzetek
	A nem homeomorf gráfok száma	A nem homeomorf gráfok száma
1	1	1
2	4	4
3	8	4
4	6	1
5	7	
6	1	

A dolgozat jelen első részében fő célunk a témakör problematikájának vázolása volt. Az itt szerepeltetett triviális konstrukciók tárgyalását az indokolja, hogy ezeknek a továbbiakban jelentős szerepük lesz.

IRODALOM

- [1] BENEDEKTI ISTVÁN: Halmazrendszerek extrémális tömörségű elrendezéseivel kapcsolatos problémák, I. *MTA III. Oszt. Közl.* **19** (1969), 3—4.
 [2] FÁRY ISTVÁN: On straight line representation of planar graphs, *Acta Sci. Math.* **11**, (4), (1948), 229—233.

(Beérkezett: 1969. VI. 9.)