

# HALMAZRENDSZEREK EXTREMÁLIS TÖMÖRSÉGŰ ELRENDEZÉSEIVEL KAPCSOLATOS PROBLÉMÁK, I.

Írta: BENEDIKTI ISTVÁN

*In memoriam Ottó Varga (1909—1969)*

## 1. Bevezetés

A statisztikában a szóródás mérésére különböző mérőszerszámokat használnak. Corrado GINI-tól származik a következő két mérőszám:

$$A = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1, k \neq j}^n |x_j - x_k| f_j f_k,$$

illetve

$$A' = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |x_j - x_k| f_j f_k,$$

ahol az  $x_i$  gyakorisága  $f_i$  és  $\sum_{i=1}^n f_i = N$ .

A geometriában is felhasználhatók ezek a mérőszámok pontrendszerek lazaságának, illetve tömörségének mérésére.

**Definíció.** Egy  $P$  pontrendszer lazaságán a következő számot értjük:

$$(*) \quad g(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(P_i, P_j),$$

ahol  $P_i, P_j \in P$ ,  $f(P_i, P_j)$  egy a  $P^2$ -n értelmezett valós függvény, és  $n$  a pontok száma. Ebben a dolgozatban  $f(P_i, P_j)$  a szokásos euklideszi távolság lesz.

**Definíció.** Egy zárt  $H = \{H_i\}_{i \in I}$  halmazrendszer  $F$  lazaságán annak a  $P = \{P_i\}_{i \in I}$  pontrendszernek a  $g(P)$  lazaságát értjük, melynek elemeit egy  $H_i^* = F(H_i)$  halmaz értékű függvény határozza meg úgy, hogy  $P_i \in H_i^*$  és  $g(P) = \min_{P_i \in H_i^*} g(P')$ , és  $P' = \{P_i\}$ .

**MEGJEGYZÉS.** Természetes — egy pontrendszer lazaságának mintájára — halmazrendszer lazaságát is egy (\*) típusú formulával definiálni. Kézenfekvő továbbá  $f(P_i, P_j)$ -t távolságjellegű függvénynek választani. Az ilyen vizsgálatok, valamint affin vagy egyéb invariáns mérőszámok vizsgálata azonban már külön tanulmányt igényel.

**Definíció.** Legtömörebb elrendezésnek nevezzük a  $H$  halmazrendszernek egy olyan elrendezését, melynek lazasága minimális.

**Definíció.** Leglazább elrendezésnek nevezzük a  $H$  halmazrendszernek egy olyan elrendezését, melynek lazasága maximális.

**1. Probléma.** Legyen  $H = \{H_i\}_{i \in I}$  halmazrendszer és  $T = \{T_k\}_{k \in K}$  a  $H$  halmazrendszeren értelmezett tulajdonságok egy halmaza, ahol  $I$  és  $K$  tetszőleges indexhalmaz. Határozzuk meg adott  $F(H)$  függvény mellett  $H$  halmazrendszernek a leg-

tömörebb, illetve leglazább, a  $T_j \in T$  tulajdonságoknak eleget tevő elrendezését, ahol  $j \in K' \subseteq K$ .

Ebben a dolgozatban bizonyos halmazrendszereknek csak a legtömörebb elrendezésével foglalkozunk.

**Definíció.** A  $H_i \in H$  halmazokat hordozóhalmaznak, a  $H_i^* = F(H_i)$  halmazokat mérőhalmazoknak, a  $P_i \in P$  pontokat mérőpontoknak nevezzük.

A dolgozatban hordozóhalmazként először zárt egységsugarú körlemez, majd zárt egységnyi oldalhosszúságú szabályos háromszöglemez, végül zárt egységnyi oldalhosszúságú négyzetlemez szerepeltetünk, és ezeket a rövidség kedvéért körnek, háromszögnek, négyzetnek fogjuk nevezni. Mérőhalmaz pedig először a halmaz maga, majd a halmaz súlypontja, végül határának egy pontja lesz.

**Definíció.** Lebegő mérőpontról beszélünk, ha  $M_i$  mérőpontot a  $H_i$  halmaz tetszőleges pontjának választhatjuk, ez tehát nincs a halmazban rögzítve.

**Definíció.** Rögzített mérőpontról beszélünk, ha az  $M_i$  mérőpont a  $H_i$  halmazhoz rögzített pont (pl. súlypont, csúcspont stb.).

Vizsgálataink során a következőkben kikötjük, hogy a hordozóhalmazok nem rendelkezhetnek majd páronként közös belső ponttal. Feltevéseink mellett  $g(P)$  értéke az elrendezéstől,  $F(H)$  függvénytől és az  $I$  indexhalmaztól függ. A továbbiakban  $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  lesz. Használni fogjuk a

$$\gamma(n) = \min g(P)$$

jelölést.

Dolgozatunkban az 1. probléma következő speciális eseteivel foglalkozunk.

**1. 1. 1. probléma.** Határozzuk meg a páronként közös belső ponttal nem rendelkező, zárt egységsugarú körökből álló  $H = \{H_i\}$  ( $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ) halmazrendszer legtömörebb lebegő mérőpontos elrendezését.

**1. 1. 2. probléma.** Határozzuk meg a páronként közös belső ponttal nem rendelkező, zárt egységsugarú körökből álló  $H = \{H_i\}_{i \in I}$  halmaz legtömörebb elrendezését, ha a mérőpontot

- a) a súlypontba,
- b) egy belső pontba,
- c) a kerület egy pontjába rögzítjük.

**1. 2. probléma.** Határozzuk meg a páronként közös belső ponttal nem rendelkező, zárt egységnyi oldalú szabályos háromszögekből álló  $H = \{H_i\}_{i \in I}$  halmaz legtömörebb elrendezését, ha a mérőpontot

- a) a súlypontba,
- b) egy oldalfelezőpontba,
- c) egy csúcspontba rögzítjük.

**1. 3. probléma.** Határozzuk meg a páronként közös belső ponttal nem rendelkező, zárt egységoldalú négyzetekből álló  $H = \{H_i\}_{i \in I}$  halmaz legtömörebb elrendezését, ha a mérőpontot

- a) a súlypontba,
- b) egy oldalfelezőpontba,
- c) egy csúcspontba rögzítjük.

**Definíció.** Legtömörebben továbbépített elrendezésnek nevezzük  $H = \{H_i\}$   $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  olyan elrendezését, melyben  $H = \{H_i\}$   $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  legtömörebben továbbépített elrendezését egy  $H_n$  halmaz úgy egészíti ki, hogy a halmazrendszer lazasága minimálisan növekszik. Két halmaz esetén a legtömörebb elrendezést nevezzük legtömörebben továbbépített elrendezésnek.

**2. probléma.** Határozzuk meg egy  $H = \{H_i\}_{i \in I}$  halmazrendszer legtömörebben továbbépített elrendezéseit.

**MEGJEGYZÉS.** Ha egy elrendezésben egy mérőpontot egyszerre több hordozóhalmazhoz rögzíthetjük hozzá, akkor a legtömörebb továbbépítésnél — ebben a dolgozatban — abból az elrendezésből indulunk ki, melyben a legtöbb hordozóhalmazt rendelhetjük a mérőponthoz. Ezek után rátérünk az 1. problémák tárgyalására, bemutatva néhány egyszerű eredményt, közben további problémákra hívjuk fel a figyelmet.

## 2. Néhány speciális halmazrendszer-elrendezés

Az 1. 1., 1. 2. és 1. 3. problémákkal analóg problémákhoz jutunk, ha legtömörebb elrendezés helyett legtömörebben továbbépített elrendezéseket keresünk.

### 1. 2. Egységkörök elrendezése

E témakörben csak kis  $n$ -ekre és csak triviális esetekben vannak eredményeink, így ezek ismertetésétől eltekintünk. Ezekből az eredményekből is látható azonban, hogy a legtömörebben továbbépített elrendezés általában nem lesz egyúttal legtömörebb elrendezés is. (Pl. lebegő mérőpontos elrendezéseknél.) Megadható azonban olyan  $F(H)$  függvény, amely esetén egyes  $n$ -eknél a két elrendezés azonos lesz. Természetesen vetődik fel a következő probléma:

**3. probléma.** Milyen  $F(H)$  függvény, illetve feltételhalmaz esetén lesz minden legtömörebben továbbépített elrendezés egyben a legtömörebb elrendezés?

**MEGJEGYZÉS.** Körök esetén pl. a súlypontban rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített elrendezés  $n=4$  esetén már nem azonos a súlypontban rögzített mérőpontos legtömörebb elrendezéssel.

### 2. 2. Szabályos háromszögek néhány elrendezése

Ez a fejezet a 1. 2. problémával, illetve a legtömörebben továbbépített elrendezések hasonlóan megfogalmazható kérdéseivel foglalkozik. A hordozóhalmazok tehát szabályos háromszögek, és a mérőpontokat

- a) a súlypontba,
- b) egy oldalfelezőpontba,
- c) egy csúcspontba rögzítjük.

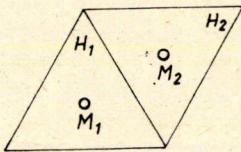
A továbbiakban  $\gamma_a(n)$  a súlypontba,  $\gamma_b(n)$  egy oldalfelezőpontba,  $\gamma_c(n)$  egy csúcspontba rögzített mérőpontos legtömörebb elrendezés tömörségét jelöli.

Legtömörebb elrendezések  $n=2$  esetén

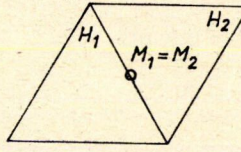
A súlypontba rögzített mérőpontos legtömörebb elrendezésben a két háromszögnek egy közös oldala van (1. ábra).

Tekintsük ugyanis egy, a mérőponthoz legközelebbi határpont és a mérőpont távolságát, mely  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ . Ezért  $\gamma_a(2) \cong \frac{\sqrt{3}}{3}$  adódik, amiből állításunk következik, hiszen

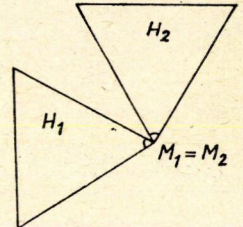
az elrendezésben  $\gamma_a(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos legtömörebb elrendezésben a két háromszög egy oldala közös, és a mérőpont a közös oldal felezőpontja, tehát  $\gamma_b(2) = 0$  (2. ábra). A csúcspontra rögzített mérőpontos leg-



1. ábra



2. ábra



3. ábra

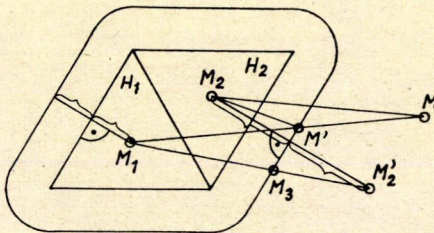
tömörebb elrendezésben a két háromszögnek egy csúcsa közös, és ez a mérőpont is, tehát  $\gamma_c(2) = 0$  (3. ábra).

A fenti elrendezések legtömörebb továbbépítésével kapjuk a következő elrendezéseket, melyekben  $H_n$  jelöli az  $n-1$  darab halmaz adott elrendezését kiegészítő hordozóhalmazt, és  $M_n$  ennek mérőpontját.

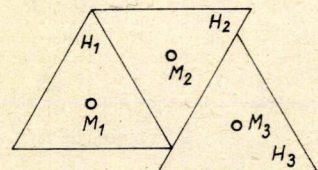
A súlypontba rögzített legtömörebben továbbépített elrendezésben  $n=3$  esetén  $H_3$  egy oldalegyenesére megegyezik  $H_2$  egy oldalegyenesével, mely tartalmazza  $H_1$  és  $H_2$  egyik közös csúcsát. Az  $M_3$  mérőpont illeszkedik az  $M_1M_2$  szakaszra, ahol  $M_2$  a  $H_2, H_3$  oldalegyenesére nem illeszkedő csúcspontjának a szemközti oldalra vonatkozó tükörképe (4. ábra).

Ezt az állításunkat két lépésben igazoljuk.

1. Belátjuk, hogy  $M_3$  mérőpont  $H_1 \cup H_2$  halmaz  $\frac{\sqrt{3}}{6}$  sugarú paraleltartományának határán van. Tekintsünk egy tetszőleges  $M$  mérőpontot. Ez a paralel-



4a. ábra



4b. ábra



tartomány belső pontja nem lehet, hiszen akkor két hordozóhalmaznak lenne közös belső pontja. Ha  $M$  külső pont (4a. ábra), akkor az  $M_1MM_2$  háromszög belsejében tartalmazza a határ egy  $M'$  pontját. Ha most  $M$  helyett  $M'$  mérőpontot választjuk, a lazaság csökken, ami 1. állításunkat igazolja.

2. A legtömörebb elrendezést szolgáló mérőpont a paraleltartomány határának egyenes szakaszán van. Tekintsük a paraleltartományt határoló ívekhez tartozó húrokat. Az ív bármely pontjához találhatunk a húron egy olyan pontot, melynek  $M_1$  és  $M_2$ -től mért távolságösszege kisebb. Egyszerű számításokkal igazolható, hogy a húrok felezőpontjai, melyekre a lazaság a húr pontjai között minimális, nagyobb távolságösszegeket adnak, mint a fenti  $M_3$  pont.  $M_3$  a paraleltartományt határoló egyenes szakaszt érintő,  $M_1$  és  $M_2$ -t összekötő legrövidebb töröttvonal „érintési” pontja. Ennek meghatározásakor  $M_2$ -t tükröztük a határoló szakaszra, s a tükrökép  $M'_2$ . Ez állításunkat igazolja.

Használni fogjuk a legtömörebben továbbépített elrendezések  $F$  lazaságának jelölésére  $g(n)$ -t, illetve  $g_a(n)$ -t egy a súlypontba,  $g_b(n)$ -t egy oldalfelezőpontba,  $g_c(n)$ -t egy csúcspontba rögzített mérőpontos elrendezések esetén, ahol  $n$  a hordozóhalmazok száma. Ekkor

$$\text{az adódik, hogy } g_a(3) = \frac{\sqrt{3}}{6} (\sqrt{7} + 1).$$

Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített elrendezésben  $n=3$  esetén a harmadik mérőpont  $M_1$ -ből  $H_1$  vagy  $H_2$  egyik  $M_1$ -t nem tartalmazó oldalára bocsátott merőleges talppontja (5. ábra).

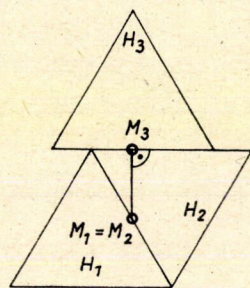
Állításunk igazsága abból adódik, hogy  $H_1 \cup H_2$  halmaz  $M_1 = M_2$ -höz legközelebbi határpontja  $M_3$ .

$$\text{Tehát } g_b(3) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

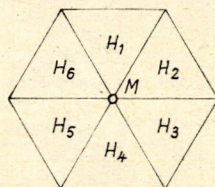
A csúcspontba rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített elrendezésben  $n < 7$  esetén a háromszögek egy csúcspontja közös, s ez egyben a mérőpont is (6a. ábra). Tehát  $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6$ , és  $g_c(n) = 0$ , ha  $n < 7$ .  $6 < n < 10$  esetén

a legtömörebben továbbépített elrendezésben hat háromszög szabályos hatszöget alkot — ennek középpontja a mérőpont —, melynek egyik oldalfelezőpontja a további háromszögek csúcspontja és mérőpontja (6b. ábra). Így  $M_7 = M_8 = M_9$  és  $g_c(7) = 3\sqrt{3}$ ,  $g_c(8) = 6\sqrt{3}$ ,  $g_c(9) = 9\sqrt{3}$  adódik.

MEGJEGYZÉS. A csúcspontba rögzített mérőpontos elrendezések  $n=6$  és  $n=9$ , esetében (egy-egybevágóság erejéig) egyértelműen meghatározott elrendezések.

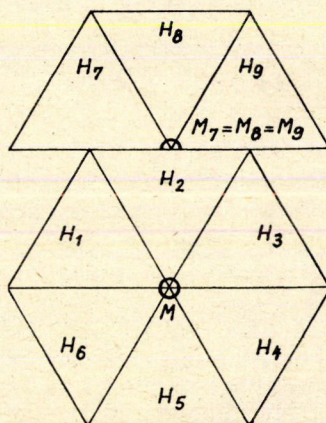


5. ábra



$$M = M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6$$

6a. ábra



$$M = M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6$$

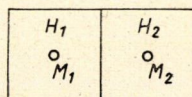
6b. ábra



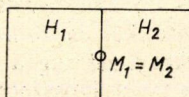
### 2. 3. Egybevágó négyzetek néhány elrendezése

Ez a fejezet az 1. 3. problémával, illetve az előbbiekhöz analóg módon megfogalmazható legtömörebben továbbépített elrendezések vizsgálatával foglalkozik. Most tehát a hordozóhalmaz zárt egységnyi oldalhosszúságú négyzet.

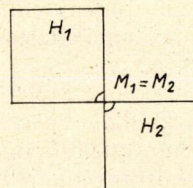
A súlypontba rögzített legtömörebb elrendezésben  $n=2$  esetén a két négyzet egy közös oldallal rendelkezik, így  $\gamma_a(2)=1$  (7a. ábra).



7a. ábra



7b. ábra



7c. ábra

Állításunkat a 2. 2. fejezetben ismertetett módon igazolhatjuk.

Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos legtömörebb elrendezésben  $n=2$  esetén a két négyzetnek van egy közös oldala, s ennek felezőpontja a mérőpont, így  $\gamma_b(2)=0$ , és  $M_1=M_2$  (7b. ábra).

A csúcspontba rögzített mérőpontos legtömörebb elrendezésben  $n=2$  esetén a négyzetek egy csúcsa közös, és ez a mérőpont. Tehát  $\gamma_c(2)=0$  és  $M_1=M_2$  (7c. ábra).

#### Legtömörebben továbbépített elrendezések $n=3$ esetén

A súlypontba rögzített mérőpontos elrendezésben  $M_3$  illeszkedik  $H_1$  és  $H_2$  közös oldalának egyenesére, és a három négyzetnek van egy közös oldalegyenese (8a. ábra).

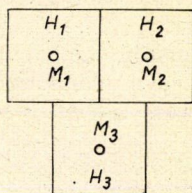
Állításunkat a 2. 2. fejezetben ismertetett bizonyításhoz hasonló módon igazolhatjuk.

Az elrendezésből az adódik, hogy  $g_a(3) = 1 + \sqrt{5}$ .

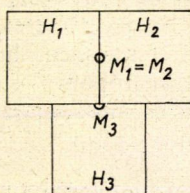
Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos elrendezésben a harmadik mérőpont  $H_1$  és  $H_2$  egy közös csúcsa, tehát  $g_b(3)=1$  (8b. ábra).

Állításunk abból következik, hogy a fenti  $M_3$  a  $H_1 \cup H_2$  halmaz  $M_1$ -hez legközelebbi határpontja.

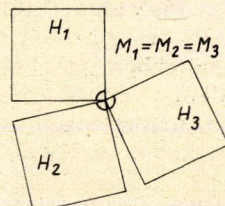
A csúcspontba rögzített mérőpontos elrendezésben a négyzetek egy csúcsa közös, és ez a mérőpont, tehát  $\gamma_c(3)=g_c(3)=0$ , és  $M_1=M_2=M_3$  (8c. ábra).



8a. ábra



8b. ábra



8c. ábra

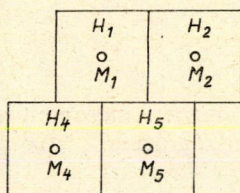


*Legtömörebben továbbépített elrendezések  $n=4$  esetén*

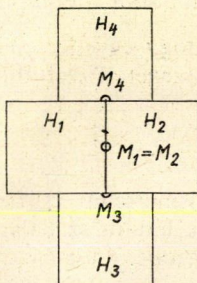
A súlypontba rögzített mérőpontos elrendezésben  $H_3$  és  $H_4$  oldala közös, és a négyzetek egyik oldala egybeesik (9a. ábra).

Állításunk igazolásánál feltehetjük, hogy  $M_4$  a  $H_1 \cup H_2 \cup H_3$  halmaz  $1/2$  távolságú paraleltartományának határán van. Ellenkező esetben a mérőpontokat összekötő szakaszok egyikén választhatunk olyan határpontot, melyre a távolságösszeg csökken. A paraleltartomány határán történő mozgattással és számolással könnyen belátható, hogy az itt leírt elrendezés valóban legtömörebben továbbépített elrendezés. Ebből következik, hogy  $g_a(4) = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$ .

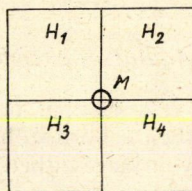
Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos elrendezésben az  $M_4$  mérőpont a  $H_1$  és  $H_2$  közös oldalának csúcspontja (9b. ábra).



9a. ábra



9b. ábra



9c. ábra

Állításunk igazolásakor feltehetjük, hogy  $M_4$  mérőpont vagy  $H_1 \cup H_2$  halmaz  $H_3$  pontját nem tartalmazó oldalán van, vagy  $H_3$  határán, illetve  $H_4$  olyan oldal-egyenesén, mely egyik végpontja  $H_3$  határpontját is tartalmazó oldalán van. Ellenkező esetben két halmaznak van közös belső pontja, vagy a 2. 2. pontban ismertett módon fel tudunk venni olyan mérőpontot, melyre a távolságösszeg csökken, és a fent leírt pontok egyike. Egyszerűen igazolható, hogy ezek közül  $M_4$  szolgáltatja a legtömörebb elrendezést, melyből adódik, hogy  $g_b(4) = 2$ .

A csúcspontba rögzített mérőpontos elrendezésben a négyzetek egy csúcspontja közös, s a közös csúcs a mérőpont. Tehát  $g_c(4) = \gamma_c(4) = 0$ , és  $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M$  (9c. ábra).

**MEGJEGYZÉS.** A súlyponthoz rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített elrendezés nem a legtömörebb elrendezés, ugyanis az egy közös csúcsponttal rendelkező négyzetek lazasága kisebb (14a. ábra).

A következőkben néhány általános eredményt mutatunk be.

**TÉTEL.** *A legtömörebben továbbépített elrendezések tömörségét leíró  $g(n)$  függvény monoton növekvő, és alulról konvex függvény.*

*Bizonyítás.* A monotonitás triviális, hiszen új halmaz hozzávételével a mérőpontok távolságösszege nem csökkenhet (ha  $g(n-1) > 0$ , akkor  $g(n) > g(n-1)$ ).

a) A  $g(n)$  függvény konkávitása a

$$g(n) \leq \frac{g(n-1) + g(n+1)}{2}$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens. Ebből

$$g(n) - g(n-1) \leq g(n+1) - g(n)$$

adódik, és fordítva. Ez definíció szerint

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(M_i, M_n) \leq \sum_{i=1}^n f(M_i, M_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} f(M_i, M_{n+1}) + f(M_n, M_{n+1}).$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség viszont abból adódik, hogy  $\sum_{i=1}^{n-1} f(M_i, M_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(M_i, M_{n+1})$ , mivel  $M_n$ -t úgy választottuk, hogy egyetlen más — pl.  $M_{n+1}$  — mérőpont esetén sem kapunk kisebb távolságösszeget. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

#### 2.4. Rácsos elrendezések

A 2.2. és 2.3. pontban ismertetett csúcspontba rögzített mérőpontos elrendezésekben a hordozóhalmazok határa szabályos háromszögrácsá, illetve négyzet-rácsá volt kiegészíthető (2. 2-ben  $n=6$  esetén, 2. 3-ban  $n=4$  esetén).

*Definíció.* Rácsos elrendezésnek nevezzük azokat az elrendezéseket, amelyekben a hordozóhalmazok határa rácsot alkot, vagy azzá egészíthető ki. (Hasonlóan, körök esetén a középpontoktól követeljük, hogy háromszögrács vagy négyzet-rács pontjai legyenek.)

A bemutatott elrendezések többsége nem rácsos elrendezés, de egy ilyenből két rácsegyenes által határolt sáv, határoló egyenes mentén való eltolásával származtatható.

*Definíció.* Sávnak vagy szalagnak nevezzük a síknak párhuzamos (egyenként legalább két rácspontot tartalmazó) egyenespár által határolt részét.

*Definíció.* Sávos elrendezésnek nevezzük azokat az elrendezéseket, melyek egy vagy több párhuzamos sávnak a határoló egyenesé mentén való eltolásával (esetleg helybenhagyásával) rácsos elrendezésbe vihető. Ebben a dolgozatban még azzal a további megszorítással is élünk, hogy a sávot határoló egyenesek egy koordinátatengellyel legyenek párhuzamosak. Ebből kiindulva természetesen vetődnek fel a következő problémák.

*4. probléma.* A  $H = \{H_i\}_{i \in I}$  halmazrendszer mely elrendezése legtömörebben továbbépített sávós elrendezés, adott  $I$  indexhalmaz és  $F(H)$  függvény esetén?

*5. probléma.* A  $H = \{H_i\}_{i \in I}$  halmazrendszer mely elrendezése legtömörebben továbbépített rácsos, illetve legtömörebb rácsos elrendezés, ha adott az  $I$  indexhalmaz és  $F(H)$  függvény?



MEGJEGYZÉS. Analóg fogalmak vezethetők be a térben is. Ott rácsos, réteges és vonalás elrendezések vizsgálatáról tudunk. Egyszerűen beláthatók a következő egyenlőtlenségek a síkban:

$$\gamma(n) \equiv \gamma_{\text{sávos}}(n) \equiv \gamma_{\text{rácsos}}(n).$$

Látni fogjuk, hogy  $g(n)$  függvényre nem mondhatjuk el ugyanezt.

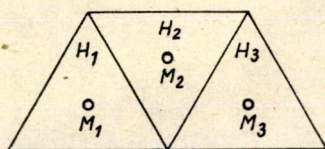
### 2. 5. Szabályos háromszögek rácsos elrendezései

Ebben a fejezetben az 5. problémával foglalkozunk. A mérőpontokat rögzítjük a már ismert módon, s keressük a legtömörebben továbbépített elrendezéseket. Már láttuk a 2. 2-ben, hogy  $n=2$  esetén a legtömörebb elrendezések rácsos elrendezések, illetve van köztük ilyen is, ezért ezután is ezekből indulunk ki: A súlypontba rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített rácsos elrendezésekben,  $n=3$  esetén a háromszögeknek egy közös csúcspontjuk van (10a. ábra).

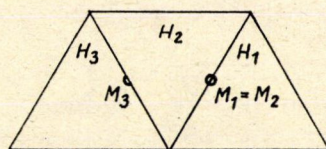
Állításunkat egyszerűen igazolhatjuk az  $M_1, M_2$  fókuszú ellipszisek segítségével.

Az elrendezésből  $g_a(3) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$  adódik.

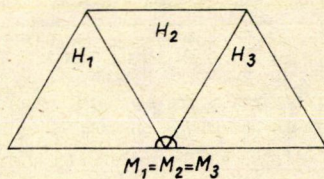
Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített rácsos elrendezésben  $n=3$  esetén  $H_3$ -nak közös oldala van  $H_2$ -vel (vagy  $H_1$ -gyel), és ezen van  $M_3$  (10b. ábra), így  $g_b(3) = 1$  adódik.



10a. ábra



10b. ábra



10c. ábra

A csúcspontba rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített rácsos elrendezés  $n \leq 6$  esetén megegyezik a már ismertetett legtömörebb elrendezéssel (10c. és 11c. ábra).

A súlypontba rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített rácsos elrendezésben  $n=4$  esetén a háromszögek egy két egységnyi oldalú szabályos háromszöget alkotnak, így  $g_a(4) = 3 + \sqrt{3}$  (11a. ábra).

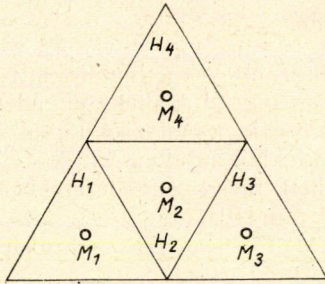
Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos legtömörebb rácsos elrendezésben  $n=4$  esetén a háromszögek egy két egységnyi szabályos háromszöget alkotnak.



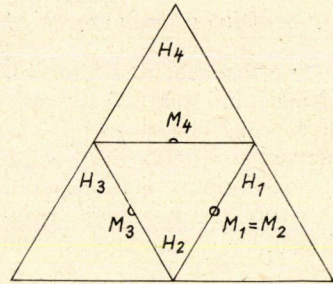
A mérőpontok a közös oldalakon vannak, így  $g_b(4) = 2,5$  (11b. ábra). Állításaink abból adódnak, hogy

$$f(M_1, M_4) + f(M_2, M_4) = f(M_1, M_3) + f(M_2, M_3),$$

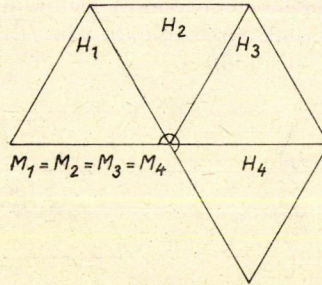
valamint  $M_3$   $f(M_4, M_3)$  sugarú környezetében nincs  $M_4$ -től különböző mérőpont, illetve a súlypontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben csak  $M_4$ -nél nagyobb távolságösszeget adó mérőpont található.



11a. ábra



11b. ábra



11c. ábra

További vizsgálataink során felhasználjuk a következő lemmát:

**LEMMA.** *A síkban  $n-1$  számú zárt halmaz egy legtömörebben továbbépített elrendezését tartalmazó legszűkebb téglalpnak, és az elrendezést  $n$  számú hordozó-halmazt tartalmazó legtömörebben továbbépített elrendezéssé kiegészítő  $H_n$  halmaznak van közös pontja.*

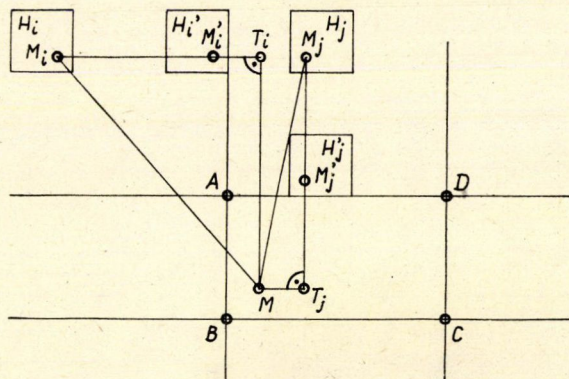
Állításunk egy speciális esetét bizonyítjuk, de a bizonyítás változtatás nélkül alkalmazható a lemma teljes bizonyítására is.

A legtömörebben továbbépített rácsos elrendezés  $H_n$  hordozóhalmaznak és a legszűkebb, rácsegyenesekkel határolt téglalpnak, mely az  $n-1$  darab hordozó-halmaz esetén legtömörebben továbbépített rácsos elrendezést tartalmazza, van közös pontja.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy a  $H_n$  hordozóhalmazt valamely rácsegyenes elválasztja az összes  $H_i (i < n)$  halmaztól (12. ábrán pl.  $AD$  egyenes,  $H_j$  halmaz). Ekkor tekintsük az  $MT_jM_j$  derékszögű háromszöget, ahol  $M$  egy tetszőleges  $M_i (i < n)$



mérőpont.  $H_j$  egy  $M_j T_j$  szakasz mentén történő eltolással  $H'_j$ -be vihető, melynek egy oldala  $AD$  rács egyenesen van. Mivel  $M_j$  elválasztja  $M_j$ -t és az  $M_j M'_j$  egyenesre  $M$ -ből bocsátott merőleges  $T_j$  talppontját, így  $f(M, M_j) = f(M, M'_j)$  adódik. Ha  $H_j$  halmaznak és  $ABCD$  téglalapnak még nincs közös pontja, akkor azt egy újabb eltolással — a távolság további csökkentése mellett — elérhetjük.



12. ábra

**MEGJEGYZÉS.** Hasonló állítást megfogalmazhatunk szabályos háromszögek rácsos elrendezésére is.

Természetesen vetődik fel a következő kérdés:

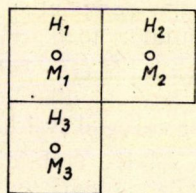
**6. probléma.** A legtömörebb elrendezés konvex burkán belül hány újabb hordozóhalmazt helyezhetünk el, az elrendezés megváltoztatása nélkül?

### 2.6. Négyzetek rácsos elrendezései

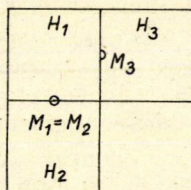
Ez a fejezet egységnyi oldalú négyzetek legtömörebben továbbépített rácsos elrendezéseivel foglalkozik. A bemutatásra kerülő elrendezések a 2.4. fejezet állítása alapján egyszerű számításokkal igazolhatók. 2.3-ban  $n=2$  esetén bemutatott legtömörebb elrendezések rácsos elrendezések. Ezek továbbépítésével kapjuk a következő elrendezéseket.

Egységnégyzetek legtömörebben továbbépített elrendezései  $n=3$  esetén:

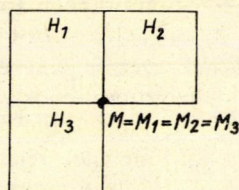
A súlypontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben a három négyzet közös csúcsponttal rendelkezik (13a. ábra), így  $g_a(3) = 2 + \sqrt{2}$ .



13a. ábra



13b. ábra



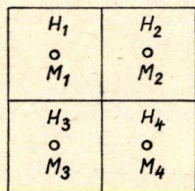
13c. ábra



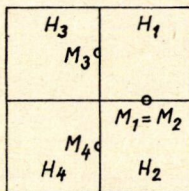
Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos elrendezésben a három négyzetnek egy közös csúcsa van. A harmadik mérőpont  $H_3$  és  $H_1$  (vagy  $H_2$ ) közös oldalán van, így  $g_b(3) = \sqrt{2}$  (13b. ábra).

A csúcspontra rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben a három négyzetnek egy közös csúcsa van, amely a mérőpont. Tehát  $g_c(3) = 0$  (13c. ábra).

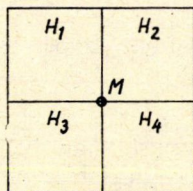
A legtömörebben továbbépített elrendezések  $n=4$  esetén: A súlypontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben a négyzeteknek egy közös csúcspontja van, így  $g_a(4) = 4 + 2\sqrt{2}$  (14a. ábra).



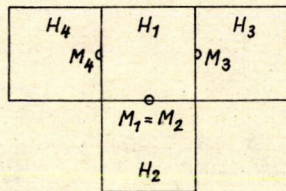
14a. ábra



14b. ábra



14c. ábra



14d. ábra

Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezés nem egyértelmű, két elrendezés adódik:

1. A négyzeteknek egy közös csúcspontja van, és a mérőpontok  $H_1$  és  $H_2$  négyzet közös vonalain helyezkednek el (14b. ábra).

2.  $H_4$  négyzet a  $H_1M_3$  mérőpontos oldalára illeszkedik, és  $M_4$  a közös oldal felezőpontja (14d. ábra). Mindkét elrendezésben  $g_b(4) = 1 + 2\sqrt{2}$ .

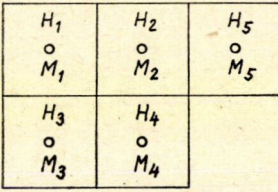
A csúcspontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben a négyzeteknek egy közös csúcspontjuk van, és ez a mérőpont így  $g_c(4) = 0$  (14c. ábra). Azonos a 2. 3. pontban  $n=4$  esetén megismert elrendezéssel.

A legtömörebben továbbépített elrendezések  $n=5$  esetén: A súlypontba rögzített rácsos elrendezésben négy négyzet egy közös csúcsponttal rendelkezik, az ötödiknek ezek egyikével van közös oldala;  $g_b(5) = 7 + 3\sqrt{2} + \sqrt{5}$  (15a. ábra). Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpont esetén két rácsos elrendezés adódik:

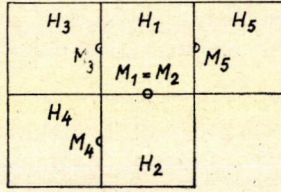
1. Négy négyzetnek egy közös csúcspontja, az ötödiknek ezek egyikével közös oldala van, melynek felezőpontja a mérőpont. Ekkor  $g_b(5) = 2 + 4\sqrt{2}$  (15b. ábra).

2. A  $H_1$  négyzetnek mind a négy másik négyzettel van közös oldala, melyek felezőpontja a mérőpont. Most  $g_b(5) = 3 + 3\sqrt{2}$  (15d. ábra).

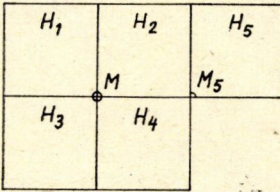




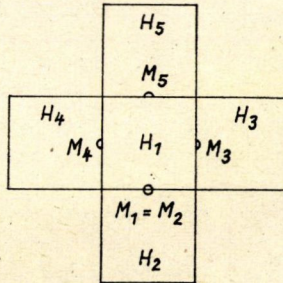
15a. ábra



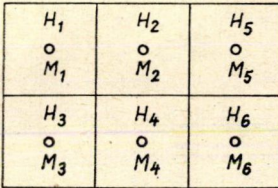
15b. ábra



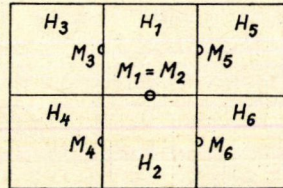
15c. ábra



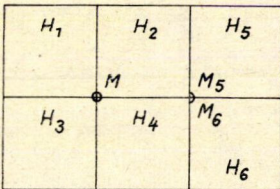
15d. ábra



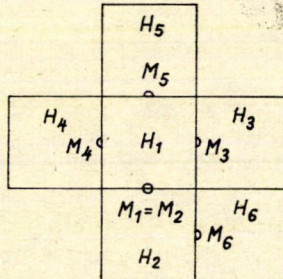
16a. ábra



16b. ábra



16c. ábra



16d. ábra



A csúcspontba rögzített mérőpontos elrendezésben négy négyzetnek egy közös csúcsa, az ötödiknek ezek egyikével közös oldala van.  $M_5$  mérőpont a  $H_5$  azon csúcsa, mely másik két négyzetnek is csúcsa. Így  $g_c(5) = 4$  (15c. ábra).

A legtömörebben továbbépített elrendezések  $n = 6$  esetén:

A súlypontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben a négyzetek egy 3 és 2 egységnyi oldalú téglalapot alkotnak, így  $g_a(6) = 11 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$  (16a. ábra).

Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontok esetén két elrendezés adódik:

1. A négyzetek egy téglalapot alkotnak, melynek oldalai 3 és 2 egységnyi hosszúak. A mérőpontok  $H_1$  és  $H_2$  oldalain helyezkednek el, így  $g_b(6) = 4 + 6\sqrt{2}$  (16b. ábra).

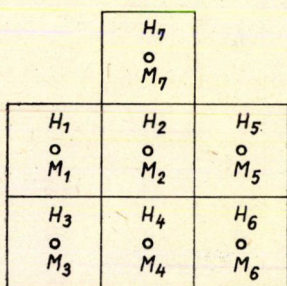
2. A  $H_2$  négyzet  $M_2$ -vel szomszédos oldala a  $H_6$ -nak is oldala, s az  $M_6$  mérőpont a közös oldalon helyezkedik el. Most  $g_b(6) = 4 + 5\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{10}$  (16d. ábra).

A csúcspontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben a négyzetek egy téglalapot alkotnak, melynek oldalai 3 és 2 egységnyiek.  $M_5 = M_6$  és így  $g_c(6) = 8$  (16c. ábra).

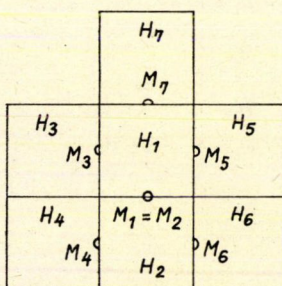
A legtömörebben továbbépített elrendezések  $n = 7$  esetén:

A súlypontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben hat négyzet egy téglalapot alkot, melynek három egységnyi hosszúságú oldalához szimmetrikusan illeszkedik a  $H_7$  négyzet.  $g_a(7) = 14 + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$  (17a. ábra).

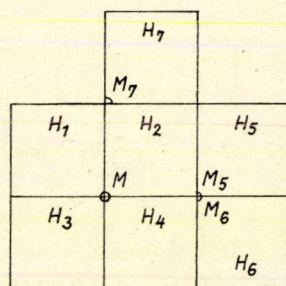
Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben hat négyzet egy téglalapot alkot, melynek 3 egységnyi hosszúságú oldalára szimmetrikusan illeszkedik  $H_7$ . A mérőpontok  $H_1$  és  $H_2$  négyzet oldalfelező pontjai (az egyiken csak 3), így  $g_b(7) = 6 + 7\sqrt{2} + \sqrt{10}$  (17b. ábra).



17a. ábra



17b. ábra



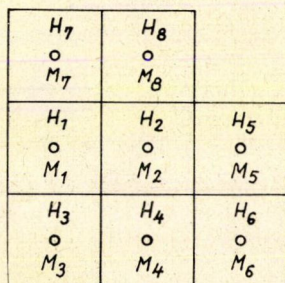
17c. ábra

A csúcspontba illesztett mérőpontos rácsos elrendezésben hat négyzet egy téglalapot alkot, melynek 3 egységnyi hosszúságú oldalán az  $M$ -hez közelebbi csúcspont  $M_7$  mérőpont, és  $g_c(7) = 12 + 2\sqrt{2}$  (17c. ábra).

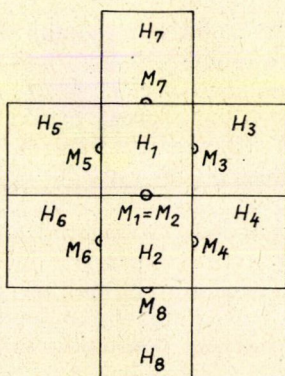
A legtömörebben továbbépített elrendezések  $n = 8$  esetén:

A súlypontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben hat négyzet egy téglalapot alkot, melynek 3 egységnyi hosszúságú oldalára két négyzet illeszkedik, így  $g_a(8) = 18 + 10\sqrt{2} + 6\sqrt{5}$  (18a. ábra).

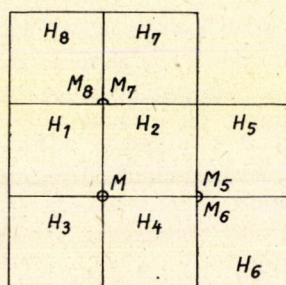




18a. ábra



18b. ábra



18c. ábra

Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben a négyzetek  $H_1$  és  $H_2$  oldalaihoz illeszkednek. A mérőpontok  $H_1$  és  $H_2$  oldalfelezőpontjai, és  $g(8) = 10 + 9\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$  (18b. ábra).

A csúcspontra rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben  $H_8$  egyik csúcsa  $M_7$  mérőpont, így  $M_7 = M_8$  és  $g_c(8) = 16 + 4\sqrt{2}$  (18c. ábra).

### 3. További problémák

Ebben a fejezetben vizsgálatainkkal kapcsolatos rokon problémákat ismer-tetünk.

7. probléma. Milyen  $F(H)$  függvény esetén fog a rögzített mérőpontos leg-tömörebben továbbépített (illetve legtömörebb) elrendezés és a lebegő mérőpontos legtömörebben továbbépített (illetve legtömörebb) elrendezés megegyezni?

8. probléma. Megadható-e olyan  $F_1(H)$  és  $F_2(H)$  függvény, hogy a legtömö-rebben továbbépített (illetve legtömörebb) elrendezés megegyezzen?

9. probléma. Melyek azok az  $F(H)$  függvények, melyek esetén a legtömörebben továbbépített elrendezés és a legtömörebb elrendezés azonos?

10. probléma. Állíthatjuk-e, hogy legtömörebb elrendezések hordozóhalmazai egyesített halmazának konvex burka körhöz konvergál, ha  $n \rightarrow \infty$ ?

11. probléma. Megadható-e olyan  $F_1(H)$  és  $F_2(H)$  függvény, melyekkel a két legtömörebb továbbépített (illetve legtömörebb) elrendezés mérőpontjainak halmaza megegyezik?

12. probléma. Ha egy legtömörebben továbbépített elrendezés nem egyértelmű, akkor a különböző elrendezésekből kiindulva szükségszerű-e bizonyos számú lépés után ugyanahhoz az elrendezéshez jutni (mint pl. a 2. 6. fejezetben)?

13. probléma. Állíthatjuk-e, hogy legtömörebb elrendezés hordozóhalmazai egyesített halmaza konvex burkának minimális az átmérője? Azaz  $n$  számú halmaz-nak van-e olyan legtömörebb elrendezése, mely konvex burkának átmérője nem nagyobb egyetlen más elrendezés konvex burka átmérőjénél?

14. probléma. Mely feltétel mellett igaz az, hogy egy legtömörebb  $n$  elemű

elrendezést magába foglaló legszűkebb kör (gömb) sugara csak akkor növekszik  $n$ -ről  $n + 1$ -re térve, ha a körben (gömbben) nincs már helye több halmaznak?

15. *probléma.* Mit lehet mondani az előző problémák megoldásáról, ha egy-egy hordozóhalmazban több rögzített vagy lebegő mérőpont is szerepel?

16. *probléma.* Mit lehet mondani az előző feladatok megoldásáról, ha iteráljuk a feladat feltételeit: hordozóhalmazon egy újabb hordozóhalmaz és azon a mérőpont stb. ...?

17. *probléma.* Halmazrendszerek lazaságát definiálva úgy is el lehet járni, hogy nem a  $g(P)$  minimális, hanem maximális értékét vesszük számításba. Mit lehet ekkor mondani az egyes itt felmerülő problémák megoldásáról?

18. *probléma.* Mi az összefüggés a különböző módon definiált lazasági mérőszámú extrémális elrendezések és ezek lazaságai és tömörségei között?

Fenti problémák ismertetésénél nem volt célunk egymástól független problémák felsorolása, úgy szerepeltettük őket, ahogy felmerültek.

A dolgozat problémakörére POGÁNY CSABA hívta fel a szerző figyelmét. Ugyancsak ő hívta fel a figyelmet a lebegő mérőpont, a sávós és rácsos, valamint a réteges és vonalas elrendezés vizsgálatára és a 14—18. problémákra, valamint a 10. problémával kapcsolatban a legtömörebb elrendezés körhöz (gömbhöz) való konvergenciájának vizsgálatára.

Az 1.1.2. a probléma azonos FEJES TÓTH LÁSZLÓ [2] egy *másképp megfogalmazott* problémájával, amellyel kapcsolatban HORVÁTH JENŐ [3] ért el eredményeket.

Térbeli rokon problémákat oldottak meg BALÁZS ERZSÉBET [1] és LAJOS JÓZSEF [4], lebegő mérőpontos problémákat old meg TÖLGYESI LÁSZLÓ [5]-ben.

Dolgozatunk következő részében extrémális tömörségű elrendezésekkel kapcsolatos olyan eredményekkel foglalkozunk, amelyekben majd az itt ismertetett konstrukcióknak lényeges szerep jut.

#### IRODALOM

- [1] BALÁZS ERZSÉBET: *publikálatlan eredmény*
- [2] FEJES TÓTH LÁSZLÓ: *szóbeli közlés*
- [3] HORVÁTH JENŐ: Távolságok összegére vonatkozó egy minimum problémáról. Mat. Lapok 1969 1—2 20.
- [4] LAJOS JÓZSEF: *publikálatlan eredmény.*
- [5] TÖLGYESI LÁSZLÓ: Egy elhelyezési problémaköréről, I., MTA III. Oszt. Közl. 19, (1969).

(Beérkezett: 1969. VI. 25.)

#### PROBLEMS CONCERNING EXTREMAL MASSIVENESS OF POINT SET SYSTEMS

by

ISTVÁN BENEDIKTI

This paper is concerned with the research of the packing of several plane domains under restrictions for example let the value of the function (\*) be minimal, where  $f(P_i, P_j)$  is the Eukclidean distance between points  $P_i$  and  $P_j$  ( $P_i \in H_i$ ,  $P_j \in H_j$ ,  $H_i \cap H_j = \emptyset$   $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $i \neq j$ ).