ELLENTMONDÓ FELTÉTELRENDSZEREK KEZELÉSÉRŐL, I.*

Írta: POGÁNY CSABA

Varga Ottó akadémikus emlékére

1. Bevezetés

A gyakorlatban sokszor merül fel olyan probléma, amelynél bizonyos feltételrendszer pontos kielégítése nem lehetséges, ennek ellentmondó (vagy a mérési pontatlanság miatt ellentmondóvá vált vagy „túlhatározott") volta miatt, mégis meg kell határozni olyan „megoldást", ami (valamilyen értelemben) „legkevésbé mond ellene" a feltételrendszernek. (Ilyen jellegű problémák merülnek fel pl. a kiegyenlítő számítások feladatkörében is.)

E témakörben — magától értetődően — fontos szerepe van a „legkevésbé ellentmondó megoldás" definíciójának. Egy ilyen definíció megadása után a probléma egy szélsőérték-meghatározási feladattá válik.

Megoldásra vár azonban az a kérdés, hogy egyes legkevésbé ellentmondósági kritériumok alkalmazása konkrét esetekben mennyire jogosult. Közismert, hogy ilyen kritériumok nemegyszer *csupán* annak köszönhetik létüket, hogy könnyen kezelhető szélsőérték-feladatra vezetnek, nem pedig annak, hogy a kritérium, melynek szempontjából a megoldás legkevésbé lesz ellentmondó, valóban a gyakorlatilag is legjobbhoz vezet.

Ezekből leszűrhető az a következtetés, hogy jogosult a vizsgálatoknak egy olyan iránya is, amely olyan eljárások megoldását tűzi ki célul, amelyek a nem ellentmondó esetekben az egzakt megoldásokhoz vezetnek, az ellentmondó esetekben pedig az általuk szolgáltatott „megoldások" olyanok, hogy mennél inkább „közeledik" egy ellentmondó rendszer egy ellentmondástalanhoz, annál inkább „közeledik" a „megoldás" is az ellentmondástalan rendszer megoldásához. (Ezeknél a módszereknél tehát azt, hogy mi az a szempont, amelyből nézve az eljárások legkevésbé ellentmondó megoldásokat adnak, utólag kell meghatározni, ha erre szükség vagy lehetőség van. Ezektől függetlenül azonban a gyakorlat teljesen tapasztalati úton is kimondhat olyan ítéletet, hogy adott megoldás adott célra jobb, mint egy másik.)

E kérdéskörben a következő típusú problémák merülnek fel.

a) Adott a legkevésbé ellentmondóság egy kritériuma. Mely eljárásokkal határozhatók meg a legkevésbé ellentmondó megoldások?

b) Adott egy eljárás, amely „folytonos" olyan értelemben, hogy ha egy rendszer nem ellentmondó, akkor egzakt megoldást, egymáshoz „közeli" rendszerek esetében pedig egymáshoz közeli megoldást ad úgy, hogy ha egy rendszer közelebb van egy másikhoz egy harmadiknál, akkor ennek megoldása is közelebb van a másikéhoz, mint a harmadiknak a megoldása. Hogyan lehet megadni egy ilyen eljáráshoz legkevésbé ellentmondásossági kritériumot úgy, hogy a szóban forgó eljárás minden rendszer esetében a legkevésbé ellentmondó megoldást adja meg?

* Ez a dolgozat a szerzőnek „*A számítástechnika alkalmazásai új tudományterületeken*" című kollokviumon 1969. június 5-én tartott előadásának részletesebb változata.

c) A megoldási eljárások segítségével, egybevetve az ellentmondástalan és az ellentmondó esetekben fellépő jelenségeket, vagy akár eljárásoktól függetlenül is, hogyan lehet rendszerek ellentmondásosságát mérni?

Ennek a dolgozatnak témája főleg a b) alatt leírt tulajdonságú eljárásokkal kapcsolatos, de szerepelni fognak az a) és c) típusba tartozó kérdések is, különös tekintettel a lineáris egyenletrendszerek esetére. Mielőtt azonban erre sor kerülhet, néhány elnevezés értelmét kell tisztázni.

2. Néhány terminológiai probléma

A következőkben n valós változós függvényekről lesz szó. Ezek értelmezési tartománya az n dimenziós euklideszi tér, E^n egy részhalmazaként fogható fel.

Legyen adva egy feltételrendszer pl. az alábbi formában

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x) &= f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x) &= f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ha van olyan $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$, hogy

$$\begin{aligned} f_1(x^*) &= 0, \\ f_2(x^*) &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ f_m(x^*) &= 0, \end{aligned}$$

akkor az (1) rendszer per definitionem kielégíthető, és x^* (1)-nek egy megoldása.

Kézenfekvő volna az

$$\inf_{x \in E^n} \left(f_1^2(x) + f_2^2(x) + \cdots + f_m^2(x)\right)$$

számmal jellemezni (1) kielégíthetetlenségét, megoldhatatlanságát, ellentmondásosságát. Igen ám, de (1)-gyel ekvivalens az alábbi

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) &= 0, \\ c_2 f_2(x) &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ c_m f_m(x) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

rendszer, ahol $c_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$, és ennél az

$$\inf_{x \in E^n} \left(c_1^2 f_1^2(x) + c_2^2 f_2^2(x) + \cdots + c_m^2 f_m^2(x)\right)$$

egészen más lehet, mint az előbb. Ebből is látható, hogy az ekvivalenciáról mindig csak bizonyos szempont szerint lehet beszélni (célszerű erre az esetre a *gyökhely-*

halmaz ekvivalencia elnevezést használni). Általánosságban bevezethető a következő.

Definíció. *Legyen adva egy E eljárás (egyenletrendszerekre). Két objektum (egyenletrendszer) E ekvivalens, ha az E eljárás mindkettőnél ugyanarra az eredményre vezet.*

(Érdekes példa az E eljárás fontos szerepére a definícióban az, hogy a legtöbb numerikus eljárás szempontjából $|f(x)|+|g(x)|=0$ és $10|f(x)|+|g(x)|=0$ nem ekvivalens egyenlet.)

Az előbbi nehézségek nem lépnek fel akkor, ha (1) helyett annak geometriai interpretációja szerepel. Az $f_i(x)=0$ segítségével definiálható az

$$F(f_i)=\{x|f_i(x)=0,\ x\in E^n\}$$

ponthalmaz. Ekkor nyilván

$$F(f_i)=F(c_if_i).$$

Az (1) megoldásának feladata a $\bigcap\limits_{i=1}^{m} F(f_i)$ halmaz meghatározásává válik. (1) ellentmondásossága $\bigcap\limits_{i=1}^{m} F(f_i)$ üres voltával egyenértékű. Az ellentmondó esetekben azonban itt más nehézség lép fel. Ha van egy eljárás, amely az $F(f_i)$ $(i=1,2,\dots,m)$ geometriai rendszerhez hozzárendel valamit, biztos, hogy ugyanazt rendeli az $F(c_if_i)$ $(c_i\neq 0,\ i=1,2,\dots,m)$ rendszerhez, de nem biztos, hogy ugyanezt rendeli az $F(f_i^2)$ $(i=1,2,\dots,m)$ rendszerhez, amely gyökhelyhalmaz szempontjából az előzővel ekvivalens, ugyanis az $\{F(f_i)\}$ és az $\{F(f_i^2)\}$ ponthalmazrendszer nem szükségképpen azonos. Egyszerű példa erre a következő: legyen

$$f_1(x)=0,$$
$$f_2(x)=0,$$
$$f_3(x)=0$$

három felület egyenlete E^n-ben. Ezt megoldandó egyenletrendszernek fogva fel ekvivalens az

$$f_1(x)=0,$$
$$f_2^2(x)+f_3^2(x)=0$$

rendszerrel, amelyet geometriailag interpretálva biztos, hogy nem „három" felület lesz (sokszor pl. egy felület és egy térgörbe).

A következőkben az a tény, hogy egy-egy ponthalmaznak mi „az egyenlete" közömbös lesz (a ponthalmazok megadását szolgáló eljárások, azaz pl. ezek egyenletei többfélék lehetnek, ezért hiba is egy ponthalmaznak „*az* egyenletéről" beszélni „*egy* egyenlete" helyett); a ponthalmazoktól mint geometriai objektumoktól és csak ezektől függő eljárások keresése lesz a cél. Hogy ez a módszer egyes rendszerek esetében mennyire jogos, arra matematikailag felelni lehetetlen. Figyelembe kell venni azt, hogy a „valóság leírására" felállított modellek milyen átalakítási eljárásokkal szemben tartják meg „valósághűségüket". Elképzelhető olyan eset, hogy egy modell „híven írja le a valóságot" úgy mint hipersíkrendszer, illetve e rendszer elemeinek közös része, de mint lineáris egyenletrendszer, illetve ennek megoldása már olyan lesz, hogy az ellentmondó esetben „valósághűsége" függeni fog a hipersíkok egyenlete felírásmódjától (ami tulajdonképpen egy eljárási utasítás).

Ezeken túlmenően csupán az elnevezésbeli ellentmondás elkerülése végett célszerű az alábbi fogalmat definiálni.

Definíció. *Legyen adva egy $K(x)$ kijelentés, amely E^n elemeire értelmes; a $H = \{x | K(x) = \uparrow\}$ halmaznak ekkor K egy indikátora.*

Az indikátor fogalmával el lehet kerülni az olyan ellentmondásokat, mint pl. „a felső félsík *egyenlete* a következő *egyenlőtlenség* $y > 0$". (Megjegyezhető azonban, hogy a felső félsíknak is vannak „egyenletei" pl. $\operatorname{sg}(y) - 1 = 0$ vagy $|y| - y = 0$, vagy $\sqrt{y^2} - y = 0$ stb., ahol az utóbbi kettő zárt félsíkot definiál.)

A cél tehát a következőkben bizonyos ponthalmazok közös részének nem létezése esetén, a ponthalmazok indikációjától, indikálásának módjától amennyire lehet független, a bevezetés b) pontjában felsorolt tulajdonságú eljárások megadása lesz.

(Beérkezett: 1969. VI. 26.)