FEJES TÓTH LÁSZLÓ EGY SEJTÉSÉRŐL

Írta: RUDA MIHÁLY

In memoriam Varga Ottó (1909—1969)

Bevezetés

Egy adott konvex n-szög minden oldalát kettéosztjuk $k/(1-k)$ arányban ($0<k<1$), a következő módon: Legyenek a sokszög csúcsai rendre $A_0, A_1, A_2, \ldots,$ $\ldots, A_n=A_0$, az osztópontok pedig $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n=B_0$. Ekkor $A_0B_0:B_0A_1=$ $=A_1B_1:B_1A_2=\ldots=A_{n-1}B_{n-1}:B_{n-1}A_n=k:(1-k)$. Az osztópontok mint csúcspontok által meghatározott $B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots B_n$ sokszögre ugyanilyen $k/(1-k)$ felosztási arány mellett és ugyanolyan körüljárással ismételjük az eljárást. Így eljutunk egy harmadik $C_1C_2 \ldots C_n$ sokszöghöz úgy, hogy $B_1C_1:C_1B_2=B_2C_2:C_2B_3=\ldots$ $\ldots=B_nC_n:C_nB_1=k:(1-k)$. FEJES TÓTH LÁSZLÓ sejtése az, hogy *az iteráció által nyert sokszögek egy-egy affinitással mindig olyan sokszögekbe vihetők, amelyek egy szabályos sokszöghöz tartanak.*

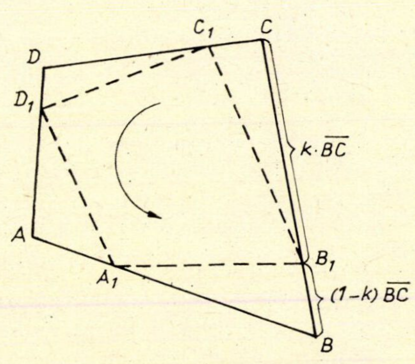
A sejtés bizonyítása a $k=1/2$ értékre, öt- és hatszögre ismeretes [1, 2]. Négyszögre a $k=1/2$ érték mellett a sejtés helyessége triviális, hiszen már az első lépésben paralelogrammához jutunk.

Négyszög esetén sem adható ilyen egyszerűen válasz, ha $k \neq 1/2$. A következőkben ezt a problémát vizsgáljuk.

A sejtés bizonyítása négyszögre

Adott egy tetszőleges $ABCD$ négyszög. Ennek oldalait felosztjuk $k/(1-k)$ arányban úgy, hogy ha az osztópontok $A_1B_1C_1D_1$, akkor $\overline{AA_1}:\overline{A_1B}=\overline{BB_1}:\overline{B_1C}=$ $=\overline{CC_1}:\overline{C_1D}=\overline{DD_1}:\overline{D_1A}=(1-k)/k$. Legyen $1/2<k<1$ (1. ábra).

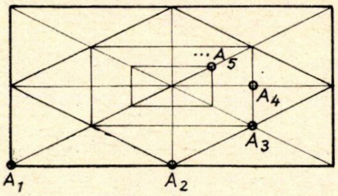
Az eljárást folytatva az i-edik lépésben egy $A_iB_iC_iD_i$ négyszöghöz jutunk. Bebizonyítjuk, hogy miközben i végtelenhez tart, a négyszögek sorozata durván kifejezve, paralelogrammához konvergál.



1. ábra

Az eljárás folyamán a négyszögek tulajdonképpen egy ponttá zsugorodnak, s így minden négyszögre egy-egy megfelelő mértékű nagyítást kell alkalmaznunk. Fontos figyelembe venni azt a tényt is, hogy a négyszögsorozat, melyet az iteráció során kapunk, általában nem egyetlen paralelogrammához tart. Legegyszerűbb példa erre a téglalap $k=1/2$ érték mellett. Ekkor az eljárás közben váltakozva rombusz, illetve téglalap lesz a négyszög, és így határhelyzetként is ezt a két különböző típusú paralelogrammát kapjuk (2. ábra).

A következőkben tehát, ha azt mondjuk, hogy az eljárás által adott négyszögsorozat paralelogrammához tart, akkor nem egyetlen paralelogrammára gondolunk, hanem csupán arra, hogy az egyes négyszögek típusát tekintve konvergál a sorozat a paralelogramma típushoz. Mindenestre problémát jelent az, hogy milyen tulajdonság alapján döntjük el az iteráció által kapott négyszögsorozatról, hogy paralelogrammához konvergál-e vagy sem.



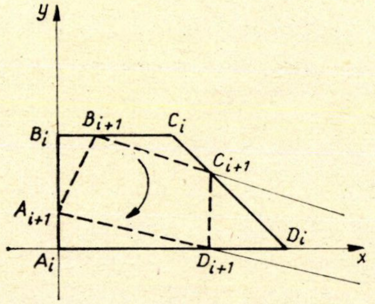
2. ábra

A kérdés megválaszolására több lehetőség is adódik, a paralelogramma különböző lehetséges definícióit alapul véve.

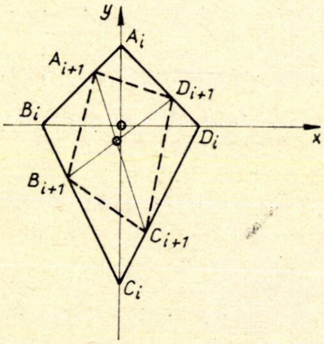
Egy lehetséges definíció például a következő: egy négyszögsorozat paralelogrammához tart, ha a szemköztes oldalegyenesek szöge nullához tart.

E definíció alkalmazásánál az a kényelmetlenség merül fel, hogy az eljárás közben a tekintett két szög közül nem feltétlenül tart mindkettő monoton nullához. Legyenek például az $A_iB_iC_iD_i$ négyszög csúcsai rendre a (0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 0) koordinátájú pontok a síkban, és legyen $k=2/3$ (3. ábra).
Ekkor a következő lépésben adódó $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}D_{i+1}$ négyszögben már nincsen párhuzamos oldalpár, míg az előző négyszög egy trapéz volt.

Hasonlóképpen nem mondható el az sem, hogy az eljárás közben a négyszög mindkét átlójának felezőpontja monoton közeledik az átlók metszéspontjához. (Ez is paralelogrammához való közeledést jelentene.) Tekintsük például azt az $A_iB_iC_iD_i$ deltoidot, amelynek csúcsai rendre a sík (0, 3), $(-3, 0)$, $(0, -6)$, (3, 0) koordinátájú pontjai. Ha például $k=2/3$, akkor a következő lépésben adódó négyszög átlóinak már egyike sem felezi a másikat (4. ábra).



3. ábra



4. ábra

A következőkben — a fenti lehetőségeket félretéve — azt használjuk fel, hogy a paralelogramma átlóinak felezőpontjai egybeesnek (vagyis távolságuk nulla). Legyen az eljárás közben előállított i-edik négyszögben az átlók felezőpontjainak távolsága d_i. Jelöljük ugyanezen négyszög nagyobbik átlójának hosszát l_i-vel. Ekkor a következő tétel mondható ki.

TÉTEL. *A négyszögek sorozata (esetleg elfajuló) paralelogrammához tart*, azaz $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{d_i}{l_i} = 0$. Ismételten felhívjuk a figyelmet arra, hogy nem egyetlen konkrét paralelogrammáról, hanem a négyszögsorozat tagjainak típusáról van szó.

Bizonyítás. Jelölje az i-edik lépésben előállított négyszög csúcsaihoz vezető vektorokat rendre **a**, **b**, **c** és **d**. Ekkor az $i+1$-edik négyszög csúcsait rendre az

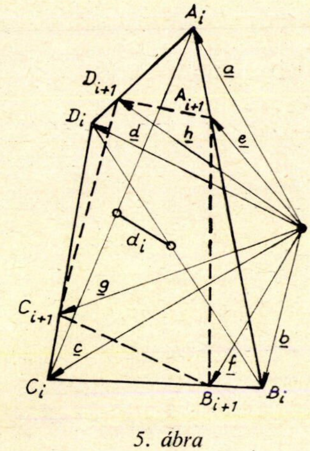
$$\mathbf{e} = k\mathbf{a}+(1-k)\mathbf{b},$$

$$\mathbf{f} = k\mathbf{b}+(1-k)\mathbf{c},$$

$$\mathbf{g} = k\mathbf{c}+(1-k)\mathbf{d},$$

$$\mathbf{h} = k\mathbf{d}+(1-k)\mathbf{a}$$

vektorok adják, ahol $1/2<k<1$ (5. ábra).



5. ábra

Azonnal látható, hogy

$$d_i = 1/2|\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}-\mathbf{d}|$$

és ugyanígy

$$d_{i+1} = 1/2|\mathbf{e}+\mathbf{g}-\mathbf{f}-\mathbf{h}| =$$

$$= 1/2|k\mathbf{a}+(1-k)\mathbf{b}+k\mathbf{c}+(1-k)\mathbf{d}-k\mathbf{b}-(1-k)\mathbf{c}-k\mathbf{d}-(1-k)\mathbf{a}| =$$

$$= 1/2(2k-1)|\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}-\mathbf{d}|,$$

tehát

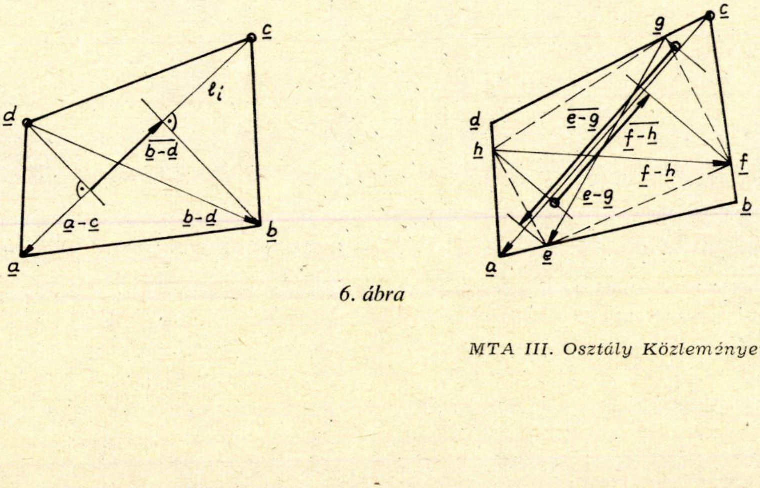
(1) $$d_{i+1} = (2k-1)d_i.$$

Legyen az i-edik négyszögben a legnagyobb átló az $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ vektor (6. ábra), azaz $l_i = |a-c|$.

Jelöljük a $\mathbf{b}-\mathbf{d}$ vektornak az $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ egyenesébe eső komponensét $\overline{\mathbf{b}-\mathbf{d}}$-vel. (Nyilván $|\overline{\mathbf{b}-\mathbf{d}}| \leqq |\mathbf{a}-\mathbf{c}|$, ha $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ nem a kisebbik átló.)

Két esetet különböztetünk meg:

(a) $|\overline{\mathbf{b}-\mathbf{d}}| \geqq \frac{2k-1}{k}|\mathbf{a}-\mathbf{c}|$ és az $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ illetve $\mathbf{b}-\mathbf{d}$ vektor ellenkező irányú.



6. ábra

Jelöljük ekkor az $\mathbf{f}-\mathbf{h}$ vektornak (mely az $(i+1)$-edik négyszög egy átlója) az $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ irányba vett vetületét $\overline{\mathbf{f}-\mathbf{h}}$-val (6. ábra).

$$\mathbf{f}-\mathbf{h} = k\mathbf{b}+(1-k)\mathbf{c}-k\mathbf{d}-(1-k)\mathbf{a} = k(\mathbf{b}-\mathbf{d})+(1-k)(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

Ekkor

$$\overline{\mathbf{f}-\mathbf{h}} = k(\overline{\mathbf{b}-\mathbf{d}})+(1-k)(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

Kihasználva az (a) feltételt:

$$|\overline{\mathbf{f}-\mathbf{h}}| \geqq k\frac{2k-1}{k}|\mathbf{a}-\mathbf{c}|+(1-k)|\mathbf{a}-\mathbf{c}| = (2k-1+(1-k))|\mathbf{a}-\mathbf{c}|.$$

Legyen $0<\delta<1-k$ rögzített érték! Így igaz, hogy

$$|\mathbf{f}-\mathbf{h}|>(2k-1+\delta)|\mathbf{a}-\mathbf{c}|.$$

(b) $|\overline{\mathbf{b}-\mathbf{d}}| \leqq \frac{2k-1}{k}|\mathbf{a}-\mathbf{c}|$ vagy ez a két vektor egyező irányú.

Állítsuk elő az $\mathbf{e}-\mathbf{g}$ vektort!

$$\mathbf{e}-\mathbf{g} = k(\mathbf{a}-\mathbf{c})+(1-k)(\mathbf{b}-\mathbf{d}).$$

Jelöljük az $\mathbf{e}-\mathbf{g}$ vektor $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ irányú komponensét $\overline{\mathbf{e}-\mathbf{g}}$-vel! (6. ábra)

$$\overline{\mathbf{e}-\mathbf{g}} = k(\mathbf{a}-\mathbf{c})+(1-k)(\overline{\mathbf{b}-\mathbf{d}})$$

A (b) feltétel szerint: $|\overline{\mathbf{e}-\mathbf{g}}| \geqq k|\mathbf{a}-\mathbf{c}|-(1-k)\frac{2k-1}{k}|\mathbf{a}-\mathbf{c}| = \left[\frac{1}{k}(1-k)^2+(2k-1)\right]\cdot$ $\cdot\,|\mathbf{a}-\mathbf{c}|>(2k-1+(1-k)^2)|\mathbf{a}-\mathbf{c}|$ (mivel $k<1$).

Tehát $|\mathbf{e}-\mathbf{g}|>(2k-1+\delta^2)|\mathbf{a}-\mathbf{c}|$.

Bebizonyítottuk tehát, hogy mind az (a), mind a (b) feltétel mellett

$$\frac{l_i}{l_{i+1}} < \frac{1}{2k-1+\delta^2}, \tag{2}$$

hiszen $l_{i+1} = \max\{|\mathbf{f}-\mathbf{h}|, |\mathbf{e}-\mathbf{g}|\}$, és $\delta>\delta^2$, mert $0<\delta<1$.

Az (1) egyenlőségből és a (2) egyenlőtlenségből azonnal adódik, hogy

$$\frac{d_i(2k-1)}{l_i(2k-1+\delta^2)} > \frac{d_{i+1}}{l_{i+1}}.$$

Ebből

$$\frac{d_1}{l_1}\cdot\left(\frac{2k-1}{2k-1+\delta^2}\right)^i > \frac{d_i}{l_i}. \tag{3}$$

Ezzel tételünket be is bizonyítottuk, hiszen a $\frac{d_i}{l_i}$ pozitív tagokból álló számsorozatot majoráló $\frac{d_1}{l_1}\left(\frac{2k-1}{2k-1+\delta^2}\right)^i$ sorozat is nullához tart (ha az i tart a végtelenhez), mert $1/2<k<1$, és $\delta>0$ rögzített érték.

1. KÖVETKEZMÉNY. A (3) egyenlőtlenségből azonnal látható, hogy a $\frac{d_i}{l_i}$ sorozat nullához való konvergálásához nem szükséges, hogy az eljárás közben k értéke változatlan legyen, elegendő az is, hogy ha az i-edik lépéseknél használt k_i felosztási arányok (egy rögzített körüljárási irány mellett) az $1/2 < k_i < 1-\delta$ feltételt kielégítik, ahol $\delta > 0$ rögzített érték, $i=1, 2, \ldots$.

2. KÖVETKEZMÉNY. Mivel a bizonyítás közben nem használtuk ki, hogy az **a**, **b**, **c**, **d**, illetve **e**, **f**, **g**, **h** vektorok síkbeliek, ezért tételünk térbeli négyszögekre is igaz.

Itt mutatkozik meg az általunk használt jellemző érték $\left(\frac{d_i}{l_i}\right)$ előnye is, hiszen például az, hogy egy négyszög szemköztes oldalainak hossza egyenlő, többdimenziós térben azt sem biztosítja, hogy a négyszög síkbeli.

A következőkben néhány megjegyzés, illetve még megoldatlan probléma szerepel a fenti iterációs eljárással kapcsolatban.

Megjegyzések és problémák

Elsőként (bizonyítás nélkül) azt jegyezzük meg, hogy a $\frac{d_i}{l_i}$ hányados nullához tartása valóban a négyszögsorozat paralelogrammához közeledését jelenti, hiszen ha $\frac{d_i}{l_i}$ elég kicsiny, akkor a szemköztes oldalegyenesek iránya is tetszőlegesen közel kerülhet egymáshoz, illetve a szemközti oldalak hosszának különbsége is tetszőlegesen kicsi lehet (természetesen az oldalhosszakat a négyszög átmérőjével osztjuk).

Érdekes problémák merülnek fel, ha azt vizsgáljuk, hogy hogyan viselkedik a négyszögsorozat az iteráció alatt. Feltehető például a következő néhány kérdés:

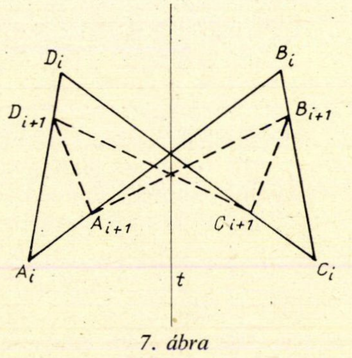
1. Általában milyen négyszögeket kapunk az eljárás során egy adott négyszögből kiindulva, adott $k/(1-k)$ felosztási arány mellett, illetve milyen négyszögből kell kiindulni és mekkora legyen a k értéke, hogy véges sok lépésben egy előre adott négyszöghöz hasonló négyszöget kapjunk (azaz hány lépésben jutunk a kívánt eredményre)?

Általánosabb kérdésekre térve, elmondható például, hogy az eljárás a konvexitást megtartja, azonban:

2. Igaz-e, hogy egy konkáv (de nem hurkolt) négyszögből véges sok lépés után konvex négyszöghöz jutunk?

3. Elmondható-e ugyanez bizonyos hurkolt négyszögekről is? (Milyen hurkolt négyszögek maradnak mindig hurkoltak?)

Az igaz, hogy van olyan hurkolt négyszög, mely az eljárás közben mindig hurkolt marad. Például, ha a négyszög oldalai egy szimmetrikus trapéz szárai és átlói (7. ábra).



7. ábra

Látható, hogy határhelyzetként egy szakasszá fajuló négyszöget kapunk. Ez egyébként minden olyan négyszögre igaz, mely az iteráció közben mindig hurkolt marad, különben nem tarthatna a megfelelő négyszögsorozat paralelogrammához.

4. Kérdés, hogy általában mikor jutunk elfajuló négyszöghöz.

Ha mind a négy csúcs egy egyenesbe esik, akkor ez a helyzet az eljárás során nem változik. Ha a négyszög elfajult egy nem elfajuló háromszöggé (három csúcs esik egy egyenesbe), akkor rögtön az első lépésben egy konvex négyszöghöz jutunk, így (nem elfajuló) háromszöget az eljárás közben (egynél többször) nem kaphatunk — még határhelyzetként sem.

5. Felmerül az a kérdés is, hogy ha az iteráció során esetleg nemcsak paralelogrammához, hanem speciálisabb négyszöghöz: rombuszhoz, négyzethez is juthatunk, akkor milyen négyszögből kiindulva történhet ez meg?

Az előző szakaszban már volt szó arról, hogy az eljárás által adott négyszögsorozat általában nem egyetlen paralelogrammához tart (l. pl. 2. ábra). A következő eseteket különböztethetjük meg:

a) Egyetlen paralelogrammát kapunk határhelyzetként. Ez az eset fordul elő akkor, ha egy négyzetre alkalmazzuk az eljárást, hiszen a négyzet (hasonlóság erejéig) invariáns az eljárással szemben, és így határértékként is négyzetet kapunk. Általában megvizsgálható az a probléma:

6. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy (nem feltétlenül konvex) sokszög invariáns legyen az eljárással szemben. (Például elégséges feltételként megadható a sokszög szabályossága.)

b) Véges sok (egynél több) különböző típusú paralelogrammát kapunk határhelyzetként (l. pl. 2. ábra).

c) Határhelyzetként végtelen sok különbözőtípusú paralelogrammát nyerünk.

d) Nincs egyetlen olyan paralelogramma típus sem, amelyhez a négyszögsorozat konvergál. Ez azonban a Boltzano—Weierstrass-tétel szerint lehetetlen.

Ezután a következőre kell választ adni:

7. A fenti (a—d) lehetőségek közül melyek és mikor lépnek fel. (Az a) és b) esetre már adtunk példát, tehát ezek a lehetőségek megvalósulhatnak.)

Ha határhelyzetként véges vagy végtelen sok paralelogrammatípus jön létre, akkor megvizsgálható:

8. Milyen tulajdonsággal rendelkezik az így nyert paralelogramma, illetve a véges vagy végtelen számú elemből álló paralelogramma osztály.

Ennek a kérdésnek a megfordítása:

9. Milyen négyszögből kell kiindulni, hogy egy előre adott paralelogrammához, illetve paralelogramma osztályhoz jussunk? (Egy adott paralelogramma, illetve paralelogramma osztály előállítható-e ilyen eljárás segítségével?)

Megjegyzés. Mindenképpen figyelembe kell venni azt, hogy a fenti (1—9.) problémákra adott válasz függhet a k értékétől is. Egyébként a fentiekkel analóg kérdések (eltekintve a 6. problémától) nemcsak négyszögekre, hanem általában sokszögekkel kapcsolatban is felvethetők. Az utóbbi esetben,

10. Ha a kiindulási sokszög nem síkbeli, még az is kérdéses, hogy határértékként síkbeli sokszöget kapunk-e.

Láttuk, hogy négyszögeknél a felosztási arányt meghatározó k értéket nem kell feltétlenül rögzíteni az iteráció során.

11. Vajon tetszőleges sokszög esetén is ugyanolyan eredményre jutunk az előbbiekben említett módon változó k értékek mellett, mint rögzített k használatával?

Befejezésként még a következő problémát említhetjük meg: Négyszögek esetén tulajdonképpen csak azt bizonyítottuk, hogy a határ-négyszög centrálszimmetrikus az átlók közös felezőpontjára. Felmerül a kérdés, hogy

12. Hasonlóan egyszerű módon — az eddig használt eszközökkel — tetszőleges páros oldalszámú sokszögre bizonyítható-e az adódó sokszögsorozat centrálszimmetrikussá válása határhelyzetben?

Ennek a kérdésnek a megválaszolásakor már nem vezet közvetlenül eredményre az átlók felezőpontjait összekötő vektorok vizsgálata. Például már hatszög esetén is, ha $k=1/2$, az átlók felezőpontjait összekötő szakaszok leghosszabbja az iteráció során lépésenként csak a felére csökken, míg bizonyos esetekben (megfelelő hurkolt hatszögnél) a legnagyobb átló hossza közel 1/3 részére is csökkenhet.

IRODALOM

[1] Fejes Tóth László: Sokszögekre vonatkozó iterációs eljárások. *Matematikai Lapok* **20** (1969) (megjelenőben).

[2] Kárteszi Ferenc: Konvex ötszögből származtatatt affin-szabályos ötszögpár, *Matematikai Lapok* **20** (1969) (megjelenőben).

(Beérkezett: 1969. VI. 25.)

ON A CONJECTURE OF L. FEJES TÓTH

by

M. Ruda

Let Q_0 be a quadrangle and Q_n the quadrangle whose vertices divide the sides of Q_{n-1} in a given ratio $k/(1-k)$ $(n=1, 2, \ldots; 0<k<1)$. It is shown that there are affine equivalent replicas of $Q_0, Q_1, \ldots$ which converge to a square or its projection on a straight line.