

AZ INTEGRÁLEGYENLETEK EGY OSZTÁLYÁRÓL ÉS ANNAK GYAKORLATI ALKALMAZÁSÁRÓL

FENYŐ ISTVÁN

Előadta az 1950. november 29-én tartott osztályülésen

Az integrálegyenletek elméletének mind a matematikai fizikában, mind pedig a technikában igen kiterjedt és sokoldalú gyakorlati alkalmazása van. Maga az egész elmélet fizikai problémák szükségéből nőtt ki. Éppen a kiterjedt alkalmazások miatt, ebben az előadásban az integrálegyenleteknek csupán egy osztályához kívánok néhány megjegyzést fűzni.

Ismeretes, hogy egy lineáris integrálegyenlet általános alakja

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (1)$$

ahol $K(x, y)$ adott kétváltozós függvény, az egyenlet ú. n. magja, és $f(x)$ szintén adott. Ha $f(x) \equiv 0$, akkor (1) egyenletnek a $\varphi(x) \equiv 0$ függvényen kívül csakis abban az esetben van nemtriviális megoldása, ha a λ paraméter bizonyos $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots$ értékeket vesz fel:

$$\varphi_i(x) = \mu_i \int_a^b K(x, y) \varphi_i(y) dy.$$

A $\varphi_i(x) \equiv 0$ függvényeket a K mag sajátfüggvényeinek, a μ_i állandókat sajátértékeknek hívjuk.

Igen fontos szerepet játszanak az integrálegyenletek elméletében az ú. n. Schmidt-féle sajátértékek és sajátfüggvények. A λ_i számot Schmidt-féle sajátértéknek hívjuk, ha a

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(x, y) \varphi_i(y) dy, \quad \psi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(y, x) \varphi_i(y) dy$$

egyenletpárnak van nemtriviális $\varphi_i(x), \psi_i(x)$ megoldása. Ki lehet mutatni, hogy míg a μ_i sajátértékek nem mindig léteznek, vannak sajátérték nélküli magok, addig a Schmidt-féle sajátértékek mindig léteznek, és valós magok esetén ezek mindig valós számok. Természetesen, ha a K mag szimmetrikus, azaz $K(x, y) = K(y, x)$ akkor $\varphi_i(x) \equiv \psi_i(x)$, és $\lambda_i = \mu_i$, vagyis a φ_i és ψ_i függvények közönséges értelemben véve sajátfüggvényei a szimmetrikus

magnak. A λ_i^2 számok sajátértékei a következő szimmetrikus magoknak, mint ahogy ezt az előbbi egyenleteknek egymásba való behelyettesítéséből azonnal be lehet látni:

$$\overline{K}(x, y) = \int_a^b K(x, t) K(y, t) dt \text{ és } \underline{K}(x, y) = \int_a^b K(t, x) K(t, y) dt.$$

A Schmidt-féle sajátfüggvények birtokában mind az elsőfajú

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x),$$

mind a másodfajú

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

lineáris integrálegyenleteket meg lehet oldani, és a megoldást a φ_i Schmidt-féle sajátfüggvények szerint (melyek egy ortogonális rendszert alkotnak), haladó sor alakjában lehet megkapni.

Mielőtt tulajdonképpen tárgyükba kezdenénk, meg kell említenünk még, az ú. n. alternatíva-tételt. Egy inhomogén lineáris másodfajú integrálegyenletnek:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x),$$

($f(x) \equiv 0$) mindig van egy, és csakis egy megoldása, ha λ nem sajátérték. Ha történetesen λ éppen sajátérték, akkor ennek az egyenletnek akkor, és csak akkor van megoldása, ha $f(x)$ ortogonális a $\kappa(x, y) = K(y, x)$ magnak a λ sajátértékéhez tartozó összes sajátfüggvényére. Ezesetben az egyenletnek nem egy, hanem végtelen sok megoldása van, és az általános megoldást úgy kapjuk, hogy egy tetszőleges megoldáshoz hozzáadjuk a $K(x, y)$ mag λ -hoz tartozó sajátfüggvényeinek tetszőleges lineáris kombinációját.

A következőkben az integrálegyenleteknek ahhoz a fajtájához szeretnék néhány megjegyzést fűzni, melyek magja — legfeljebb az $x = y$ egyenes kivételével — eleget tesz a következő relációnak:

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} = \sum_{i=1}^N a_i(x) \cdot b_i(y). \quad (2)$$

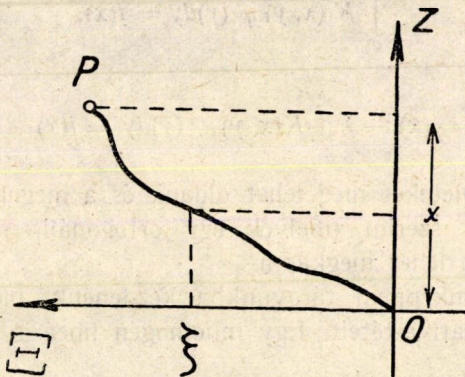
Az a_i és b_i függvények lehetnek olyanok, melyek közvetlenül K -val vannak kifejezve, tehát például ilyenszerű összefüggés lehetséges:

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} = K(x, 0) K(y, 1) - K(x, 1) K(y, 0).$$

Először szeretném az ilyen integrálegyenlet gyakorlati fontosságát néhány példával illusztrálni.

A legrégebbi integrálegyenlet, melynek problémáját egy mechanikai kérdés vetette fel, szintén ebbe az osztályba tartozik. Ez az ú. n. Ábel-féle integrálegyenlet. Ha függőleges síkban fekvő pályán egy anyagi test elhanyagolható kicsiny súrlódással mozog a nehézségi erő hatása alatt, akkor felmerül az a kérdés, milyen lesz a mozgás időtartama, míg a test a pálya elejétől a végéig ér.

Hogy erre a kérdésre válaszolhassunk, válasszuk a koordinátarendszert úgy, hogy a pálya végpontja az origóba essék, és a Z tengely függőlegesen



1. ábra.

lefelé legyen irányítva a rajzon látható módon, s legyen a t idő alatt befutott út hossza.

A kezdeti P pont ordinátája legyen x , akkor az energia tétele szerint

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(x-z)}.$$

Ebből tehát az esési idő

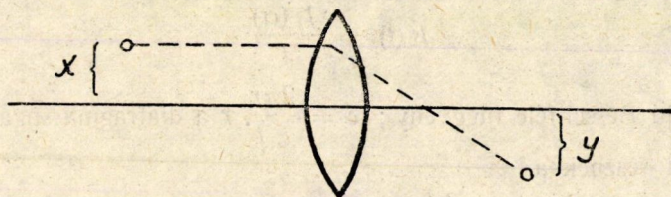
$$t(x) = \int_x^0 \frac{ds}{\sqrt{2g(x-z)}} = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{s'(z) dz}{\sqrt{x-z}}.$$

Ha a kérdést fordítva tesszük fel: előre adva van a $t = t(x)$ függvény és azt kérdezzük, melyek azok a pályák, amelyek befutásához $t(x)$ idő szükséges, akkor az előbbi összefüggésből $s = s(t)$ számítandó ki. Ez s' -re nézve egy integrálegyenlet. (Ha $t(x) = c$, akkor az izochronok meghatározásának problémája előtt állunk, mely abban áll, hogy meg kell határozni azokat a pályákat, melyeknek befutási ideje a magasságtól független.) Ennek az integrálegyenletnek a magja az (2)-típusú magok közé tartozik, amennyiben eleget tesz a

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial z} = 0 \quad (2')$$

összefüggésnek.

Egy másik példát az optika területéről mutatunk be. A geometriai optika tanítása szerint, valamely lencserendszer által adott leképezés a képet geometriai értelemben a tárgyhoz hasonlóan képezi le. Eszerint ha a tárgy egy pont, akkor a kép is pont. A valóságban egy pontnak nem pont, hanem fényes korong felel meg, melynek fényereje ott a legnagyobb, ahova a geometriai optika szerint a tárgypont képe tartozik. A tárgynak az optikai tengelytől való távolsága legyen x , a képé y , akkor az egységnyi fényintenzitású pontszerű tárgy képének fényintenzitása nyilván y függvénye, de hogy ez milyen függvénye y -nak, az nyilván x -től is függ. A kép fényessége, tehát $K(x, y)$ két-



2. ábra.

változós függvény. A valóságban természetesen a tárgy sem pont, hanem véges kiterjedésű világító test, melynek fényességeloszlása legyen $f(x)$. A tárgy egy adott x pontjából kiinduló fénysugár a képben olyan korongot hoz létre, melynek fényességeloszlása $K(x, y)$ $f(x)$. Világos, hogy a képben ezek a hatások szuperponálódnak, ha x befutja az egész tárgy felületét, tehát a fényességeloszlás a képben ez lesz :

$$g(y) = \int_{-a}^{+a} K(x, y) f(x) dx,$$

ha a tárgy az optikai tengelyre nézve szimmetrikus elhelyezkedésű. Optikai szempontból a legérdekesebb ez a kérdés: mikor hasonló a kép és a tárgy, nemcsak geometriai, hanem fényességeloszlás tekintetében is? Vagyis milyen tárgyfényességeloszlásnál lesz a kép a tárgyéhoz hasonló fényességeloszlású? Keresnünk kell tehát azt az $f(x)$ tárgyfényességeloszlást, mely mellett az előbbi $g(y) = c f(y)$.

Végeredményben az

$$f(y) = \frac{1}{c} \int_{-a}^{+a} K(x, y) f(x) dx$$

sajátfüggvény- és sajátérték-probléma megoldásáról van szó. Mangyelstam szovjet fizikus kutatásai szerint a K mag kizárólag $x-y$ -től függ, az előbbi

probléma tehát

$$f(y) = \frac{1}{c} \int_{-a}^{+a} K(x-y) f(x) dx$$

sajátérték-probléma megoldását jelenti. Centrálisan megvilágított tárgynál és négyzet alakú diafragma esetében

$$K(t) = \frac{\sin ct}{t}, \text{ ahol } c = \frac{2\pi d}{l \cdot f}$$

($2d$ a négyzet oldala, l a fény hullámhossza, f a lencserendszer fókusz távolsága). Kör alakú diafragma esetén pedig

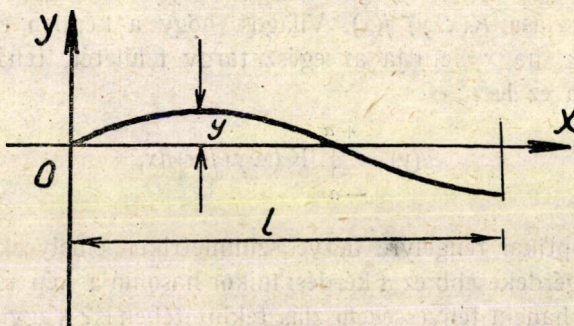
$$K(t) = \frac{J_1(ct)}{t}$$

(J_1 az elsőfajú Bessel-féle függvény; $c = \frac{2\pi r}{l \cdot f}$, r a diafragma sugara). Ezek a magok eleget tesznek a

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} = 0$$

alakú differenciálegyenletnek.

További példa gyanánt egy a statikából vett esetet említünk meg. Egy l hosszúságú tartóra tengelyirányú erő hat, melynek hatása alatt a tartó



3. ábra.

deformálódik. A választott koordináta-rendszer kezdőpontja legyen a tartó egyik végpontja; y jelölje a deformált tartó tengelyének az eredeti helyzettől való távolságát. Legyen $M(x, t)$ a t abszcisszájú pontban ható egységnyi erőnek az x pontban előidézett hajlítási nyomatéka, $I(x)$ a tehetetlenségi nyomaték és $m(x)$ a hajlítási nyomaték. Akkor, mint az Trefftz kutatásaiból ismert,

$$y(t) = \int_0^l M(x, t) \frac{m(x)}{EI(x)} dx,$$

ahol E a rugalmassági modulus. Ez $\frac{m}{EI}$ -re nézve elsőrendű integrálegyenlet.

Ha a tartónak támasza van, vagy be van fogva, akkor

$$M(x, t) = \begin{cases} M_0 - Q_0 x, & \text{ha } x \leq t, \\ M_0 - Q_0 x - (x - t), & \text{ha } x > t. \end{cases}$$

Itt M_0 , Q_0 állandók (a támasztóerő és a befogóerőtől függenek). Ez a mag ismét (2') alakú relációnak tesz eleget, amennyiben az $x = y$ pontoktól eltekintve érvényes rá ez az összefüggés:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial t} = -Q_0.$$

Végezetül megemlítjük, hogy ha adva van egy

$$L[u] + \lambda u = 0$$

alakú differenciálegyenlet, ahol $L[u]$ önadjungált másodrendű differenciál-kifejezés, akkor ennek megoldását homogén határfeltételek mellett vissza lehet venni egy integrálegyenlet sajátérték-problémájának megoldására. Ennek az integrálegyenletnek a magja tudvalevően az ezen problémához tartozó ún. Green-féle függvény. Az említett differenciálegyenlet tehát ekvivalens egy ilyen alakú integrálegyenlettel:

$$u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, y) u(y) dy.$$

A helyzet mármost az, hogy számos probléma Green-féle függvénye kielégíti a (2') alatti relációt; ha pl. $L[u] = u''$ és a határfeltételek $u(0) = u(1) = 0$, akkor

$$G(x, y) = \frac{1}{2} [x + y - 2xy + |x - y|].$$

Ennél, ha $x \neq y$, teljesül a

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 1 - x - y$$

feltétel.

Ugyanennél az egyenletnél, de $u(0) = u'(1) = 0$ határfeltételek mellett

$$G(x, y) = \frac{1}{2} [x + y - |x - y|].$$

Itt ismét, ha $x \neq y$,

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 1.$$

Vagy $u(0) = -u(1)$ és $u'(0) = -u'(1)$ határfeltételek mellett

$$G(x, y) = -\frac{1}{2} |x - y| + \frac{1}{4}.$$

Ez pedig a

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

feltételt elégíti ki.

Még további példákat sorolhatnánk fel olyan magokra, melyek az említett típusba tartoznak, de úgy gondoljuk, hogy ezek a példák is elegendők az integrálegyenletek ezen osztálya gyakorlati szempontból való jelentőségének illusztrálására.

A következőkben az integrálegyenletek ezen osztályának elméletéhez kívánunk néhány megjegyzést fűzni.

Tegyük fel tehát, hogy a K mag eleget tesz az (2) alatti egyenletnek, és hogy van λ sajátértéke, melyhez φ_k sajátfüggvények tartoznak ($k = 1, 2, \dots, r$), akkor

$$\varphi_k(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi_k(y) dy.$$

Ebből parciális integrálással a (2) alatti kifejezést figyelembevéve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \varphi'_k(x) = \lambda \int_0^1 \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \varphi_k(y) dy &= \lambda \sum_{i=1}^N \beta_{ki} a_i(x) - \lambda K(x, 1) \varphi_k(1) + \\ &+ \lambda K(x, 0) \varphi_k(0) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi'_k(y) dy. \end{aligned}$$

Itt β_{ki} állandók:

$$\beta_{ki} = \int_0^1 b_i(y) \varphi_k(y) dy.$$

Ha

$$F_k(x) = \lambda \sum_{i=1}^N \beta_{ki} a_i(x) - \lambda K(x, 1) \varphi_k(1) + \lambda K(x, 0) \varphi_k(0),$$

akkor

$$\varphi'_k(x) = F_k(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi'_k(y) dy. \quad (3)$$

A sajátfüggvény deriváltjára nézve egy másodfajú, inhomogén Fredholm-féle integrálegyenletet kaptunk, melynek λ paramétere sajátérték, az említett alternatíva tétel szerint tehát megoldása csakis akkor van, ha

$$\int_0^1 \psi_l(x) F_k(x) dx = \lambda \sum_{i=1}^N a_{li} \beta_{ki} + \psi_l(0) \varphi_k(0) - \psi_l(1) \varphi_k(1) = 0, \quad (3')$$

ahol $\psi_l(x)$ jelenti a $K(y, x)$ mag λ -hoz tartozó egyik sajátfüggvényét és

$\alpha_{li} = \int_0^1 \psi_l a_i dx$. Ez azt jelenti, hogy a sajátfüggvényeknek ilyen alakú határfeltételeknek kell eleget tenniök. Megjegyezzük, hogy a (3) alatti inhomogén egyenletnek bármely λ mellett van megoldása, mert ha λ nem sajátérték, akkor nyilván van megoldása, ha pedig λ sajátérték, úgy ezt az egyenletet a sajátfüggvény differenciálhányadosa elégíti ki.

A (3) integrálegyenlet egy tetszőleges megoldása legyen $\Phi_k(x)$, akkor az egyenlet összes megoldásait úgy kapjuk, hogy a λ -hoz tartozó összes sajátfüggvénynek lineáris kombinációját hozzáadjuk. Ha λ -hoz r sajátfüggvény tartozik, akkor ezek szerint

$$\varphi'_k(x) = \Phi_k(x) + \sum_{l=1}^r \kappa_{kl} \varphi_l(x) \quad (k=1, 2, \dots, r), \quad (4)$$

ahol κ_{kl} állandók. Az (2) tulajdonsággal bíró mag sajátfüggvényei tehát egy állandó együtthatós, elsőrendű differenciálegyenletrendszer elégitenek ki. Elegendő számú differenciálhatóságot feltételezve nyilvánvaló, hogy a (4) alatti egyenletrendszer ekvivalens egy r -edrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlettel:

$$\varphi_k^{(r)} + p_1^{(k)} \varphi_k^{(r-1)} + \dots + p_r^{(k)} \varphi_k + A_k L_k(x) = 0,$$

ahol $p_i^{(k)}$ és A_k állandók.

A φ_k -k meghatározásához quadratúrára nincs is mindig szükség, a (3) integrálegyenletből ugyanis

$$\varphi_k''(x) = F'_k(x) + \lambda \int_0^1 \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \varphi'_k(y) dy.$$

Az előbbi eljárást megismételve kapjuk azt, hogy

$$\begin{aligned} \varphi_k''(x) = F'_k(x) + \lambda \sum_{i=1}^N a_i(x) \beta_{ki}^* - \lambda K(x, 1) \varphi'_k(1) + \lambda K(x, 0) \varphi'_k(0) + \\ + \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi_k''(y) dy, \end{aligned}$$

vagy egyszerűbben

$$\varphi_k''(x) = \Gamma_k(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi_k''(y) dy.$$

Ez most φ_k'' -re olyan inhomogén integrálegyenlet, melynek λ paramétere sajátérték. Ha ennek egyik megoldása $\Psi_k(x)$, akkor az összes megoldás megint úgy adódik, hogy $\Psi_k(x)$ -hez hozzáadjuk a λ -hoz tartozó sajátfüggvények lineáris kombinációját. De akkor

$$\varphi_k''(x) = \Psi_k(x) + \sum_{l=1}^r V_{kl} \varphi_l(x) \quad (k = 1, 2, \dots, l). \quad (5)$$

(4) egyenletből

$$\varphi_k'' = \Phi_k' + \sum_{l=1}^r \nu_{kl} \varphi_l' (x) = \Phi_k' (x) + \sum_{l=1}^r \kappa_{kl} [\Phi_l + \sum_{m=1}^r \kappa_{lm} \varphi_m (x)].$$

Vessük ezt össze (5)-tel és azt kapjuk, hogy

$$f_k (x) = \sum a_{kl} \varphi_l (x) = \Phi_k' (x) + \sum_1^r \kappa_{kl} \Phi_l (x) - \psi_k (x). \quad (6)$$

Mivel $\sum a_{kl} \varphi_l (x)$ a λ sajátértékhez tartozó sajátfüggvények lineáris kombi-
nációja, ezért $f (x)$ is sajátfüggvény. Ennek következtében (6) megadja az egyik
sajátfüggvény explicit alakját. A Φ_k és ψ_k függvényekben, valamint κ_{kl} -ben
ismeretlen állandók szerepelnek. Az állandókat úgy kell meghatározni, hogy
(6)-ot a homogén integrálegyenletbe behelyettesítjük és akkor az ismeretlen
együtthatók módszerével ezen állandókra nézve egy lineáris egyenletrend-
szert kapunk.

Megemlítjük még, hogy igen egyszerű számítással konstátálhatjuk, hogy
a Schmidt-féle $\overline{K}$ és $\underline{K}$ magok szintén eleget tesznek egy (2) típusú relációnak ;
ez azt jelenti, hogy ezzel a módszerrel meg lehet határozni a tekintetbe vett
magok Schmidt-féle sajátfüggvényeit is.

Eddigi megállapításainkat arra szeretnénk felhasználni, hogy megállá-
pítsuk két fontos speciális mag sajátfüggvényei néhány tulajdonságát.

Az első az, amikor K szimmetrikus és olyan, hogy $\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} = 0$.

Ez esetben $\kappa (x, y) = K(x, y)$ és $\varphi_k (x) \equiv \varphi_k (x)$, ekkor (3') így módosul :

$$\varphi (0)^2 = \varphi_k (1)^2.$$

Tehát vagy $\varphi_k (0) = \varphi_k (1)$, vagy pedig $\varphi_k (0) = -\varphi_k (1)$.

Ez azt jelenti, hogy a sajátfüggvényeknek két rendszere van : az egyiknél
 $\varphi_k (0) = \varphi_k (1)$, a másiknál $\varphi_k (0) = -\varphi_k (1)$ érvényes. Érdekes tényként meg-
említjük, hogy minden ilyen tulajdonságú magnak mindkét fajtából van saját-
függvénye. Az az eset nem fordulhat elő, hogy csak az egyik, vagy csak a másik
fajta sajátfüggvénnyel rendelkezze a mag.

Ha ugyanis mindegyik sajátfüggvény pl. olyan lenne, hogy

$$\varphi_k (0) = \varphi_k (1),$$

akkor

$$\varphi_k' (x) = \lambda \varphi_k (1) [K (x, 0) - K (x, 1)] + \lambda \int_0^1 K (x, y) \varphi_k' (y) dy \quad (7)$$

is érvényes volna. Szorozzuk ezt végig valamely más λ^* sajátértékhez tartozó
sajátfüggvénnyel és integráljunk :

$$\int_0^1 \varphi^* \varphi dx = \frac{\lambda}{\lambda^*} \varphi (1) [\varphi^* (0) - \varphi^* (1)] - \frac{\lambda}{\lambda^*} \int_0^1 \varphi^* \varphi dy.$$

De a feltevés szerint $\varphi^*(0) = \varphi^*(1)$ is fennáll, amiből

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) \int_0^1 \varphi'(x) \varphi^*(x) dx = 0.$$

Mivel $\lambda^* \neq \lambda$, ezért

$$\int_0^1 \varphi'(x) \varphi^*(x) dx = 0.$$

Mivel φ^* akármilyen sajátfüggvény, ezért φ' ortogonális K összes sajátfüggvényeire, de nyilván ortogonális a λ -hoz tartozó többi sajátfüggvényére is, ami (3)-ból következik. Ortogonális tehát K -ra is:

$$\int_0^1 K(x, y) \varphi'(y) dy = 0.$$

De akkor (7) szerint

$$\varphi'(x) = \lambda \varphi(0) [K(x, 0) - K(x, 1)].$$

Ez viszont lehetetlen, mert akkor az összes sajátfüggvény

$$\varphi_k(x) = \lambda_k \varphi_k(0) \eta(x) + b_k \quad \left(\eta(x) = \int_0^1 [K(x, 0) - K(x, 1)] dx \right)$$

alakú lenne. De a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények egymásra ortogonálisak, és ebből a tényből egyszerű számítással következik, hogy a sajátfüggvények nem lennének lineárisan függetlenek, ami pedig ellentmond az ortogonalitásnak.

A másik speciális eset, amit meg szeretnénk említeni, az, amikor $K(x, y) = K(x-y)$ alakú periodikus függvény egységnyi periódussal: $K(t+1) = K(t)$. Az ilyen magokkal először *Egerváry Jenő* foglalkozott ismert doktori értekezésében. Eredményei a mostaniaknál általánosabbak, amennyiben a magról nem tételeznek fel differenciálhatóságot. Jelen esetben tehát a vizsgált integrálegyenlet

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x-y) \varphi(y) dy.$$

Ez esetben

$$\varphi(0) = \lambda \int_0^1 K(-y) \varphi(y) dy \quad \text{és}$$

$$\varphi(1) = \lambda \int_0^1 K(1-y) \varphi(y) dy = \lambda \int_0^1 K(-y) \varphi(y) dy = \varphi(0). \quad (8)$$

Mivel $K(x-1) = K(x-1+1) = K(x)$, ezért

$$\varphi'(x) = \lambda \int_0^1 K(x-y) \varphi'(y) dy.$$

Ilyen magoknál tehát φ' is sajátfüggvény, azaz

$$\varphi'_k(x) = \sum_{i=1}^r a_{ki} \varphi_i(x).$$

Ismeretes, hogy ennek a differenciálegyenletnek a megoldása ilyen alakú:

$$e^{\mu_k x}.$$

Ezt behelyettesítve az integrálegyenletbe, és figyelembevée a (8) alatt megállapított határfeltételeket kapjuk, hogy a sajátfüggvények

$$\varphi_k(x) = e^{-2\pi i x}$$

alakúak.

Ebből viszont már következik, hogy az egyenlet sajátértékei

$$\lambda_k = 1 / \int_0^1 K(t) e^{-2\pi i k t} dt.$$

Hasonlóképpen kezelhetők azok a magok is, melyekre a $K(x) = p K(x+1)$ ($p \neq 1$) összefüggés érvényes.

*Magyar Tudományos Akadémia,
Alkalmazott Matematikai Intézete.*