

ELLENÁRAMÚ DIFFÚZIÓS RENDSZEREKRŐL

PÁL SÁNDOR

Előadta az 1950. november 29-én tartott osztályülésen

Számos kémiai eljárásnál döntő szerepe van a processzus tér- és időbeli lefolyásánál a diffúciónak.

A diffúziós eljárásoknál az a cél, hogy valamilyen anyagból oldószer segítségével egy harmadik anyagot kivonjunk. Modern berendezéseknél ez az extrakciós folyamat többnyire ellenáramú.

Ellenáramú diffúziós rendszerekkel történik például cukorrépaszeletekből vízzel, diffuzőrökben a cukor kivonása.¹ Hasonló rendszer szerint történik az olajnak növényi magvakból való kivonása. Ellenáramú diffúziós rendszereket alkalmazhatunk növényi olajok finomítására is. A finomításnál az olajból alkohollal ki kell vonni a zsírsavakat. Legcélszerűbb az olajat és szeszt oldótoronyban egymásra rétegezni, majd az olajrétegen szeszecseppeket, a szeszrétegen olajcseppeket átengedni. Ellenáramú rendszerben szokás barnaszénkátrányból az alkoholt által oldható anyagokat kimosni. Ezenkívül még számos példát mondhatnánk arra, milyen elterjedt módszer az ellenáramú diffúzió a kémiai iparban.

Legegyszerűbb esetben háromféle anyag vesz részt az átalakulásban :

1. Az az anyag, amelynek a koncentrációja a diffúzió során csökken (1. közeg).
2. Az az anyag, amelynek a koncentrációja a diffúzió során növekszik (2. közeg).
3. Az az anyag, amely egyik közegből a másikba diffundál.

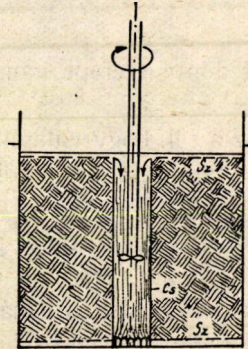
A folyamat természetesen annál gyorsabb, minél finomabb a két közeg egymásban való eloszlása.

Mi azzal az esettel foglalkozunk, amelyben a két közeg közül az egyik folyadék, a másik pedig egybevágónak tekintett, nagyszámú (apró) testből áll, és ezek együttesen nagy felületen érintkeznek az első közeggel. (Pl. szemcsék, porok, cseppek, szeletek stb.) Az egyszerű kifejezésmód kedvéért nevezzük az elsőt folyékony, a másodikat szilárd közegnek.

Ha a két közeg egymáshoz képest nyugszik, a két közeg koncentrációja kezdetben gyorsan, később mind lassabban közeledik az egyensúlyi állapothoz ; ugyanis a diffúzió folyamatának sebessége annál nagyobb, minél nagyobb a közegek átlagos koncentrációjának eltérése a (közös vagy nem közös) egyensúlyi koncentrációktól.

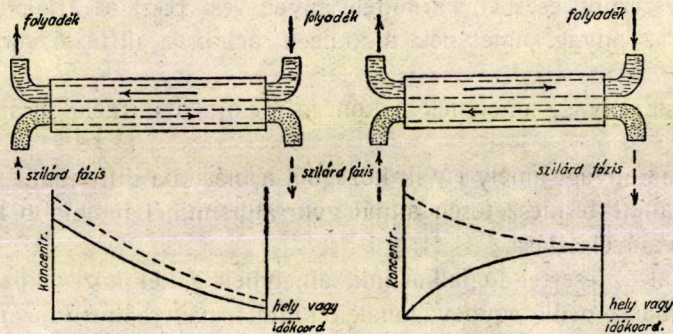
A nyugvó diffúziós folyamatnál a nagy koncentrációjú szilárd közeg kis koncentrációjú folyadékkal érintkezik, vagyis a koncentrációkülönbség igen nagy. Később, amikor a kiegyenlítődézés már közel megtörtént, igen kicsi a koncentrációkülönbség. Tehát a szilárd közeg a nagy koncentráció stádiumában kis koncentrációjú lével, a kis koncentráció stádiumában nagy koncentrációjú lével érintkezik.

Az ilyen diffúziós rendszereket nyugvó, zárt rendszereknek fogjuk nevezni.



1. ábra

Egy ilyen rendszer sematikus kivitelezési módját láthatjuk az 1. ábrán. A Cs csőben forgó propeller állandó gyors cirkulációban tartja az oldó folyadékot. A szilárd részecskéket alul és felül az Sz szűrőkkel visszatartjuk. A folyadék nagy sebességgel áramlik. Az áramlás turbulenciája miatt a folyadékban koncentráció-



2. ábra

különbségek nem lehetnek. A rendszer tehát úgy fogható fel, mintha az edényben levő szilárd részek igen kis diffúziós ellenállású, de nyugvó folyadékkal érintkeznének. »Zárt«-nak azért nevezzük, mert a szilárd és folyékony közeg együttes diffundáló anyag-tartalma változatlan marad.

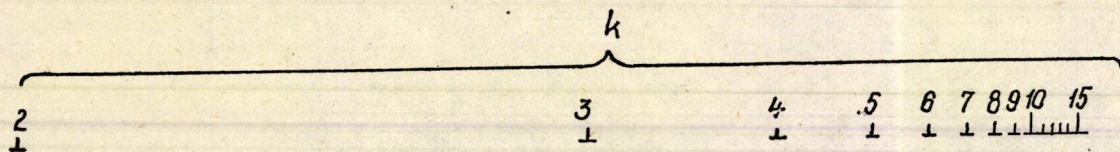
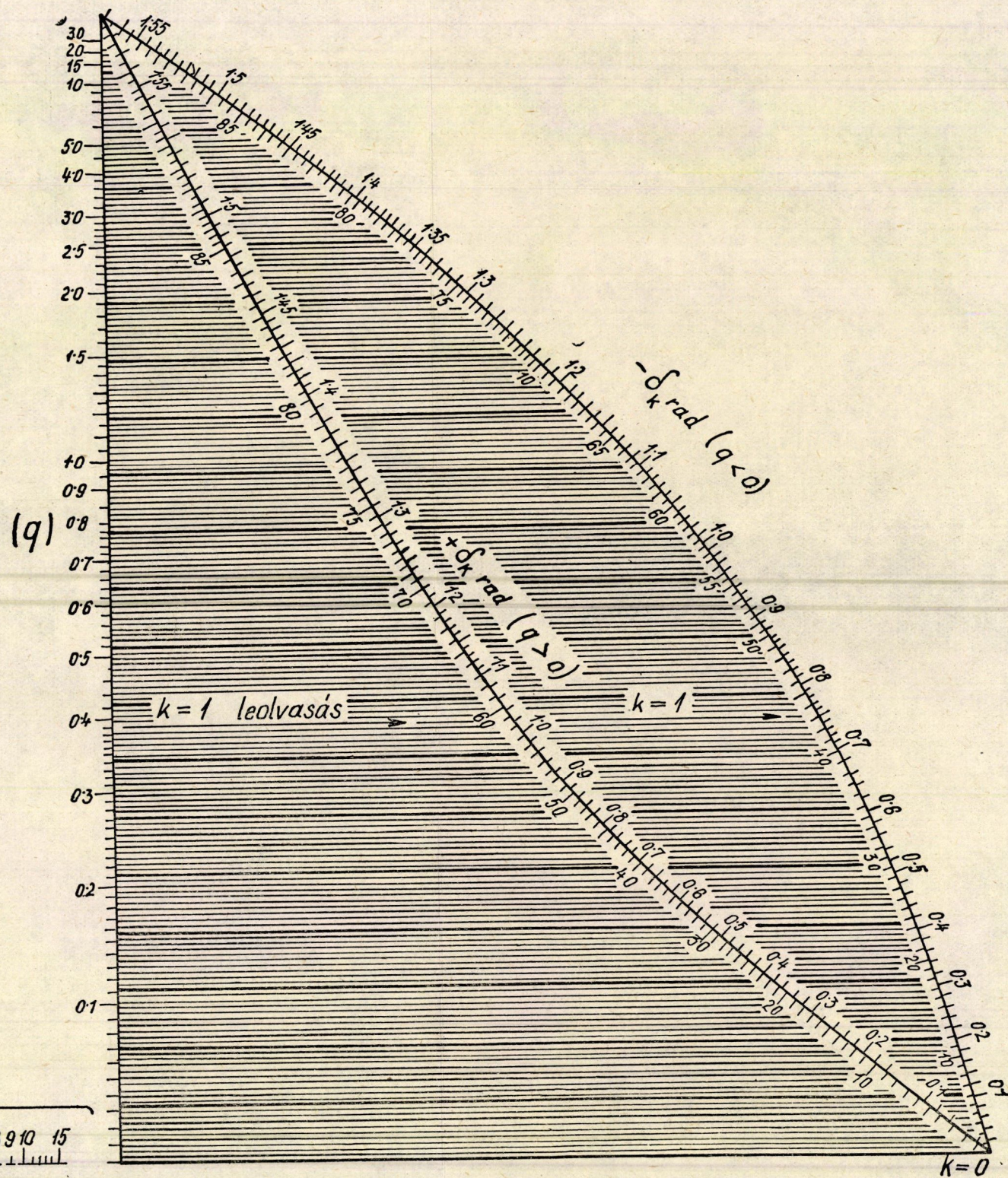
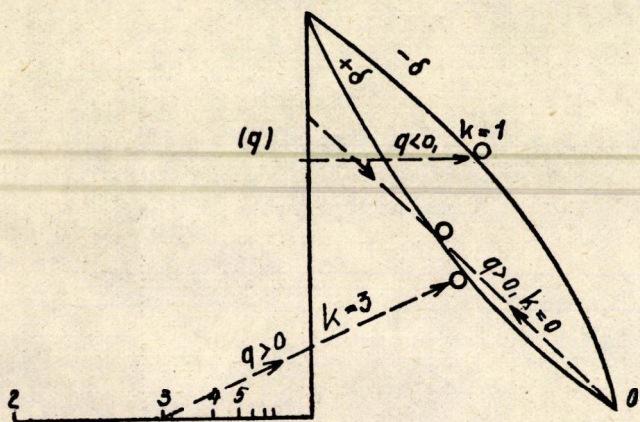
A berendezés jobb kihasználása szempontjából kívánatosabb, ha a szilárd és folyékony közeg koncentrációkülönbsége nem változik erősen, ha tehát a

$$\operatorname{tg} \mu_k = q \mu_k$$

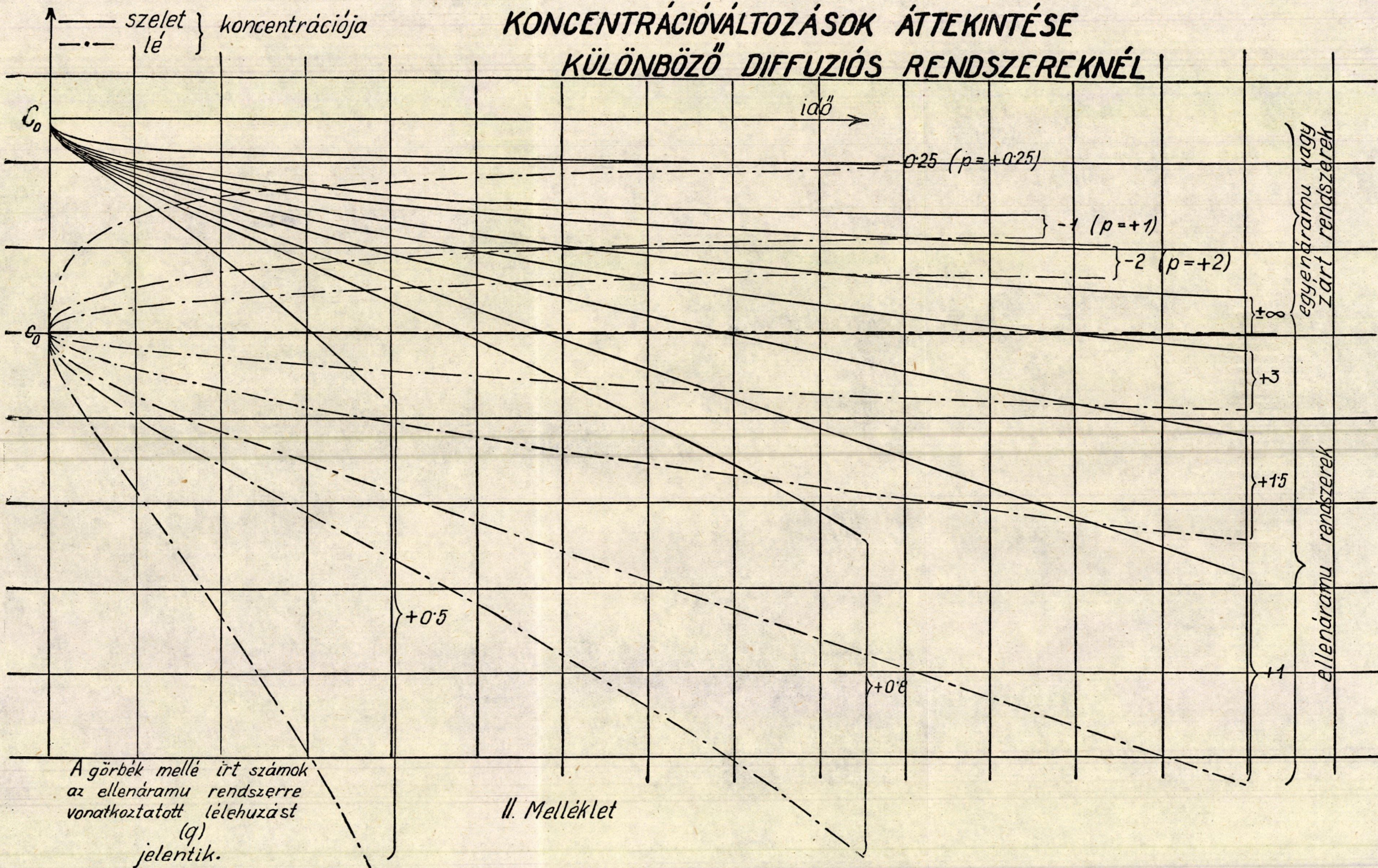
$$\mu_k = k\pi + \delta_k$$

$q > 0$ esetben $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

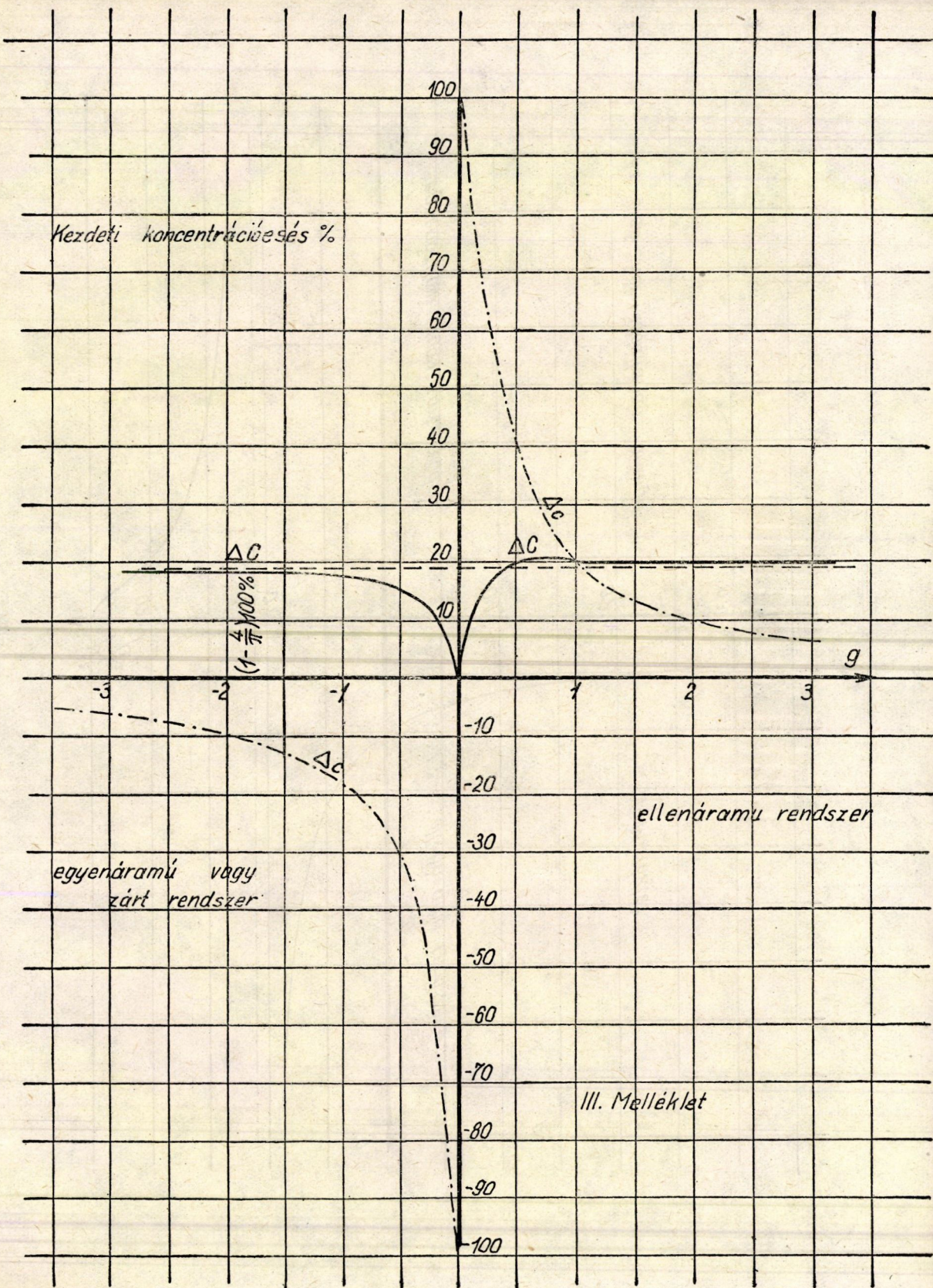
$q < 0$ esetben $k = 1, 2, 3, \dots$



KONCENTRÁCIÓVÁLTOZÁSOK ÁTTEKINTÉSE KÜLÖNBÖZŐ DIFFUZIÓS RENDSZEREKNÉL



II. Melléklet



Kezdeti koncentrációesés %

ΔC

$(1 - \frac{4}{\pi}) \cdot 100\%$

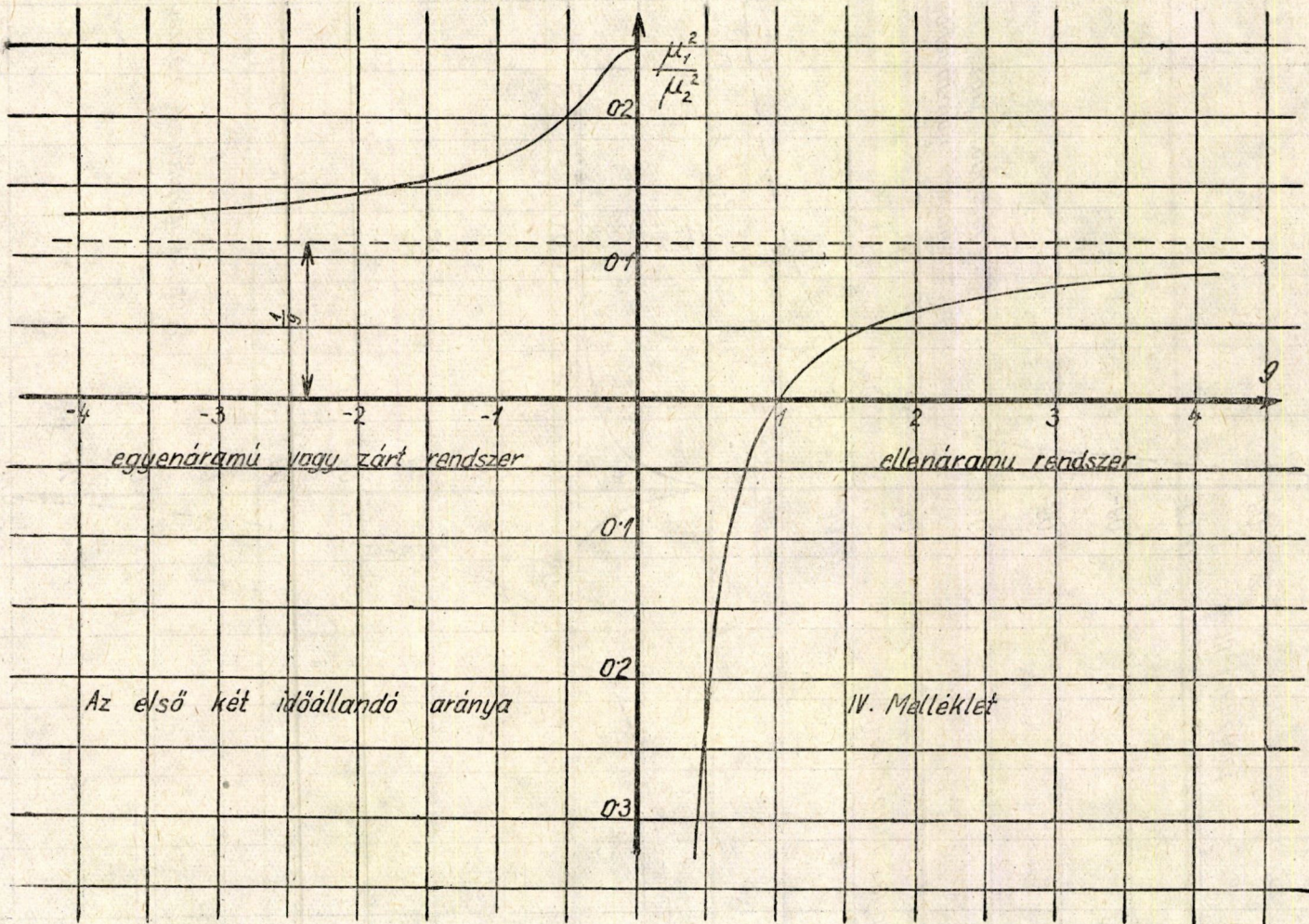
ΔC

g

ellenáramú rendszer

egyenáramú vagy
zárt rendszer

III. Melléklet



egyenáramú vagy zárt rendszer

ellenáramú rendszer

Az első két időállandó aránya

IV. Melléklet

szilárd közeg a nagy koncentráció stádiumában nagyobb, a kis koncentráció stádiumában kisebb koncentrációjú folyékony közeggel érintkezik. Ez akkor következik be, ha a két közeg ellenkező irányban áramlik, úgynevezett ellenáramban. A koncentráció változását mindkét fajta rendszernél a hely, illetőleg az idő függvényében a 2. ábrán tüntettük fel.

Az előadás célja stacionárius ellenáramú rendszerben a két közeg koncentrációjának változását visszavezetni az álló rendszer problémájára. Ekkor azonban a gyakorlatban nagyon bonyolult rendszert indokolt munkahipotézisekkel leegyszerűsítjük.

Munkahipotézisek :

1. Abban a »nyugvó« rendszerben, mellyel az áramló rendszert szembeállítjuk, valójában a szilárd és folyékony fázist nagy sebességgel keverjük. A keverés eredményeképpen a folyadék koncentrációja nagyon jó közelítéssel független a helytől, mert bármilyen koncentrációkülönbsége folyadékban elhanyagolható idő alatt kiegyenlítődik a folyadék erősen turbulens áramlása miatt.

2. Ellenáramú, vagy egyenáramú rendszereknél feltesszük, hogy mindkét közeg állandó sebességgel halad, és hogy a szilárd és folyékony közegek kezdeti koncentrációja legfeljebb az időtől függ (a csőbe lépés helyétől nem).

3. Feltesszük, hogy a folyékony közeg diffúzióállandója nem kisebb nagyságrendű a szilárd közeg diffúzióállandójánál, továbbá, hogy a csőben található folyadék térfogata nem nagyobb nagyságrendű a szilárd közeg térfogatánál. *Továbbá feltesszük, hogy a szilárd testekhez nem tapad tartósan nagyobb tömegű folyadék, mely természetesen lényegesen nagyobb koncentrációjú volna, mint a környező folyadékrészek.*

Képzeljük folyadékunkat állónak és mozogjanak ebben a folyadékban a szilárd részecskék. Ha a folyékony közeg egy kiválasztott keresztmetszetében mindig ugyanazok a folyadékrészek érintkeznének szilárd részekkel (és a folyadékban semmiféle áramlás nem volna), akkor egyező nagyságrendű diffúzióállandók esetén a folyékony közeg kiválasztott rétegében fellépő koncentrációkülönbségek nagyságrendben megegyeznének az ott található szilárd részekben fellépő koncentrációkülönbségekkel. Azonban a kiválasztott folyadékréteg a szilárd részek szabálytalan térbeli eloszlása miatt mindig más pontokon érintkezik a szilárd részekkel, tehát a folyadékban az előbbinél sokszorta kisebb koncentrációkülönbségek lépnek fel a keletkező koncentrációkülönbségek statisztikus kiegyenlítődése miatt.

Külön csökkenti még a folyékony közeg keresztmetszeteiben létrejövő koncentrációkülönbségeket a szilárd testecskék közötti labirintusokban történő folyadékaramlás turbulenciája.

Tehát ellenáramú vagy különböző sebességű egyenáramú rendszereknél (relatív sebesség legyen!) sok gyakorlati esetben nem követünk el lényeges hibát, ha feltesszük, hogy *a folyadék koncentrációja csak a csőirányú koordinátától és az időtől függ, egy megadott csőkeresztmetszetben, egy adott időpontban állandó.*

4. Feltesszük még, hogy a folyadékban a cső hosszúságában történő koncentrációváltozások kialakításában az áramlásnak van döntő szerepe, tehát, hogy a diffúzió okozta koncentrációkiegyenlítődés lassú az áramláshoz képest.

Ezekkel a kézenfekvő feltevésekkel lehetővé válik az áramló rendszer problémájának visszavezetése az álló rendszer esetére.

A stacionárius egyen- vagy ellenáramú problémát pedig visszavezetjük az álló, zárt rendszer problémájára. Zárt rendszernél a szilárd és folyékony közeg összes diffundáló anyag-tartalma konstans marad.

Végül foglalkozunk cukorrépaszeletek diffuzőrőkben való kilúgozásával. Ez jó példa az általános elmélet gyakorlati alkalmazására.

Az álló, zárt diffúziós rendszer

Jelölje t az időt,

x, y, z a helykoordinátákat,

$C(x, y, z, t)$ a szilárd rész koncentrációfüggvényét,

$c(t)$ a folyékony rész koncentrációfüggvényét (miután a folyadékban koncentrációkülönbségek nem lépnek fel, a helytől nem függ),

D a diffúzióállandót a szilárd közegben,

V a szilárd test térfogatát,

pV a folyadék térfogatát (itt p az úgynevezett lélelhúzás),

k az egyensúlyi állandó. Egyensúly esetén: $c = kC$.

Érvényes a szilárd közegben a diffúzió differenciálegyenlete:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \Delta C. \quad (1)$$

A differenciálegyenlethez tartozó határfeltételek: A II. Fick-féle törvény szerint a szilárd test felszínén kidiffundáló anyag mennyisége az időegységben

$$-D \int_{(F)} \frac{\partial C}{\partial n} dF,$$

ahol $\frac{\partial C}{\partial n}$ a normális irányú deriváltat jelenti. Az anyag megmaradása miatt ugyanannyit vesz fel a folyékony közeg. A folyékony közeg koncentrációja az időegységben $\frac{dc}{dt}$ mennyiséggel nő. Ez térben állandó mennyiség, tehát a felvett anyag-mennyiség

$$pV \frac{dc}{dt}.$$

Vagyis a határfelületen a következő határfeltételek érvényesek :

$$c = kC,$$

$$pV \frac{dc}{dt} = -D \int_{(F)} \frac{\partial C}{\partial n} dF. \quad (2)$$

Vagy összefoglalva :

$$pkV \frac{\partial C}{\partial t} + D \int_{(F)} \frac{\partial C}{\partial n} dF = 0. * \quad (3)$$

Ha még ehhez hozzávesszük a

$$C(x, y, z, 0) = C_0(x, y, z), \quad (5a)$$

$$c(0) = c_0 \quad (5b)$$

alakú kezdeti feltételeket (ahol c_0 nem egyezik meg feltétlenül kC_0 értékével a határoló felületen), akkor mindkét koncentrációfüggvényünk egyértelműen meg van határozva.**

Egyenletesen áramló rendszer

Tegyük fel, hogy szilárd közegünk Γ , cseppfolyós közegünk γ sebességgel áramlik a cső hosszirányában felvett ξ -tengely irányában. (Természetesen Γ és γ előjellel vett számok, mert az áramlás lehet egyenáramú vagy ellenáramú.)

Koordinátarendszerünket most úgy vesszük fel, hogy egy kiválasztott szilárd résszel együtt haladjon, tehát Γ sebességgel. Ebben a koordinátarendszerben a szilárd közeg nyugszik, a folyékony pedig $\gamma - \Gamma$ sebességgel áramlik ξ irányban. A nyugvó szilárd közegben változatlanul érvényben marad az (1) differenciálegyenlet.

A szilárd és folyékony közeg koncentrációja, minthogy feltesszük, hogy a diffúziós kiegyenlítődés ξ irányban kicsi a konvekciós koncentrációváltozáshoz képest, az időn kívül ξ -től is függ :

$$C = C(\xi; x, y, z; t),$$

$$c = c(\xi, t).$$

*) A Gauss-féle tétel alkalmazásával (1) és (2) egyenleteinkből a következő egyenlet nyerhető egyszerű módon :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{V} \int_{(V)} C dV + pc \right] = 0$$

vagy, tekintettel arra, hogy az $\frac{1}{V} \int_{(V)} C dV$ C-nek a térfogatra vonatkozó integrál közepét jelöli, melyet \bar{C} -sal jelölhetünk, a

$$\bar{C} + pc = \text{konst.} \quad (4)$$

egyenletet kapjuk, amely a diffundáló anyag megmaradását fejezi ki.

**) Érdekes további probléma, melynek megoldását programmba vettem, ennek a differenciálegyenletnek, mint sajátfüggvény-problémának vizsgálata, a (2)-höz hasonló határfeltételekkel, némi általánosítással.

A (2) egyenlet, mely a diffundáló anyag megmaradását fejezte ki az álló rendszernél, egy új taggal bővül. Jelölje p egy kiválasztott (nagyinak tekinthető) térfogatban levő összes cseppfolyós és szilárd közeg térfogatarányát. Akkor a folyadék által az időegységben felvett diffundáló anyag mennyisége most is pVc -nek idő szerinti differenciálhányadosa, de tekintetbe kell vennünk, hogy c explicite a helytől is függ. A szilárd közegünket körülvevő lé $\gamma - \Gamma$ sebességgel áramlik, tehát $\xi = (\gamma - \Gamma) t$, és így a folyadék által az időegységben felvett anyagmennyiség kiszámításánál tekintetbe kell vennünk, hogy c kétváltozós közvetett függvénye az időnek:

$$pV \frac{dc}{dt} = pV \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{d\xi}{dt} \cdot \frac{\partial c}{\partial \xi} \right),$$

$$\text{ámde } \frac{d\xi}{dt} = \gamma - \Gamma, \text{ tehát } pV \frac{dc}{dt} = pV \left[\frac{\partial c}{\partial t} - (\Gamma - \gamma) \frac{\partial c}{\partial \xi} \right].$$

Ezt az egyenletet (2)-be helyezve

$$pV \left[\frac{\partial c}{\partial t} - (\Gamma - \gamma) \frac{\partial c}{\partial \xi} \right] = -D \int_{(F)} \frac{\partial C}{\partial n} dF. \quad (6)$$

Kihasználva, hogy a határon $c = kC$, egyenletünk következőképp alakul:

$$p k V \frac{\partial C}{\partial t} + D \int_{(F)} \frac{\partial C}{\partial n} dF = + pV (\Gamma - \gamma) \frac{\partial c}{\partial \xi}. \quad (7)$$

Az egyenlet baloldalán álló kifejezés a szilárd részecske és az őt körülvevő pV mennyiségű folyékony közegnek a diffundáló anyagban való együttes szaporulatát jelenti. Álló rendszernél (v. ö. (3) egyenlet) ez a mennyiség 0 volt. Most pedig azért nem 0, mert a folyadékáramlás következtében a testet körülvevő folyékony közeg kicserélődik. Ha a közeget egy pillanatra állónak képzeljük, ugyanazt a hatást akkor is elérhetjük, ha a szilárd testet körülvevő (állónak képzelt) folyadék koncentrációját a diffundáló anyag kívülről történő beadagolásával az időegységben mesterségesen $(\Gamma - \gamma) \frac{\partial c}{\partial \xi}$ -vel »növeljük«.

Stacionárius eset

Ezen oly áramlást értünk,elynél a rendszer már oly hosszú ideje működik, hogy a koncentrációk a cső bármely keresztmetszetében gyakorlatilag függetlenek az időtől.

A cső rögzített keresztmetszetének egyenlete γ sebességgel mozgó koordináta-rendszerünkben

$$\xi = -\Gamma t + \alpha,$$

ahol α a keresztmetszetnek csőhöz képesti helykoordinátája, tehát konstans.

Mint hogy erre a ξ -re $c(\xi, t)$ független az időtől, azért

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0,$$

$$\text{és } \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\Gamma \text{ tekintetbevételével}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Helyettesítsük be ezt a stacionárius és nem stacionárius esetre egyaránt érvényes (6) egyenletünkbe. $c = kC$ tekintetbevételével a

$$\frac{\gamma}{\Gamma} p k V \frac{\partial C}{\partial t} + D \int_{(F)} \frac{\partial C}{\partial n} dF = 0$$

egyenletet kapjuk, mint határfeltételt. Az egyenletben szereplő $\frac{\gamma}{\Gamma} p$ jelenti egy meghatározott időtartam alatt a csőbe áramló folyékony és szilárd közeg térfogatarányát (míg p egy tetszésszerű térfogatban található folyékony és szilárd közeg térfogatarányát jelentette). Nevezzük áramló diffúziós rendszerek-nél ezt a viszonyszámot lélehúzásnak. Ha a $\frac{\gamma}{\Gamma} p = q$ jelölést vezetjük be, akkor a

$$q k V \frac{\partial C}{\partial t} + D \int_{(F)} \frac{\partial C}{\partial n} dF = 0 \quad (8)$$

egyenletet kapjuk, amely (3) egyenlettel teljesen analóg. A kezdeti feltételekre figyelemmel a C függvény egyértelműen meg van határozva, az álló zárt rendszerrel formailag azonos módon.

Kimondhatjuk tehát, hogy a fentebb körvonalazott áramló diffúziós rendszerek számítástechnikai szempontból olyan álló, zárt rendszerrel azonosak, amelynél a folyékony és szilárd fázis térfogataránya q , a kezdeti koncentrációk pedig az áramló rendszer szilárd fázisának bemenő oldalán vett koncentrációk.

Nézzük, hogy alakul modellünk ellenáramú esetre. Γ és γ most ellentett előjelű számokat jelentenek. A következőkben Γ , γ és q alatt inkább az abszolút értékeket értjük, $q = \frac{\gamma}{\Gamma}$ megint egy tetszésszerű időtartam alatt bemenő térfogatok aránya.

Stacionárius ellenáramú rendszerünk így matematikailag oly álló, zárt rendszerrel azonos, melynél a folyékony és szilárd közegek térfogataránya $-q$ (negatív lélehúzás), a szilárd és folyékony fázisok kezdeti koncentrációja pedig az ellenáramú rendszer szilárd közegének bemenő és folyékony közegének kilépő koncentrációjával azonos.

Cukorkilúgozás ellenáramú rendszerben

A cukorgyártásnál a cukrot a cukorrépából forró vízzel vonják ki. A répát vékony szeletekre vágják. A répaszeletek tömegét nagyon változatos módon érintkezésbe hozzák a forró vízzel, mire a szeletekben levő cukor kivándorol a forró vízbe.

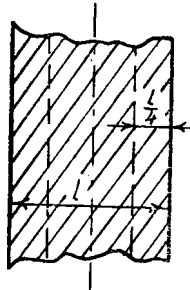
Egy ilyen megoldás, hogy a répaszeleteket tartányokba (ú. n. diffúzorokba) rakják, majd a sorbakapcsolt tartányokon keresztüláramoltatják nyomással a vizet. Ez a kilúgozási mód megközelítéssel stacionárius ellenáramúnak fogható fel.

A cukor kivándorlása a répaszeletekből meglehetősen bonyolult folyamat, minthogy különböző vegyi folyamatok, sejtfalakon való átdiffundálás stb. szabja meg a lefolyását. Első közelítésben megengedhető egyszerűsítés, ha a cukor kivándorlásánál feltesszük, hogy a répaszelet homogén és benne a cukor vándorlása a diffúzió differenciálegyenlete szerint megy végbe.

Irodalmi áttekintés

A cukoriparban a modernebb telepek a cukorrépaszeletekből ellenárammal vonják ki a cukrot. Az ellenáramú cukorkivonás elmélete a legutóbbi időben alakult ki, főként szovjet tudósok kutatásai alapján.

P. M. Szilin és Z. M. Szilin 1937-ben közölt dolgozatában² a diffúzorokban több fokozatban történő ellenáramú cukorkilúgozásnál fellépő cukorkoncent-



3. ábra.

rációk kiszámításával foglalkozik. A cukorrépaszeleteket l vastagságú plan-parallel lemezeknek tekinti. Fick törvényéből kiindulva, azzal az erősen egyszerűsítő feltevéssel él, hogy a diffúziónál $l/4$ közepes diffúziós távolsággal számolhatunk, vagyis a szelet cukortartalmát a szelet felületétől $l/4$ távolságra koncentrálna képzeletben (3. ábra).

Ez a feltevés egyébként egyenértékű azzal, hogy a szelet szimmetriavonalától mindkét irányban lineárisan csökken a koncentráció.

Legyen $\frac{dQ}{dt}$ az időegységben kidiffundáló cukormennyiség

q az időegységben beadagolt szelet és lé térfogataránya,

D a diffúzióállandó,
 F a szelet felülete,
 $C(t)$ a szeletkoncentráció (térbeli) középértéke,*
 $c(t)$ a lékoncentráció (térbeli) középértéke,
 t az idő,
 l a szelet vastagsága.

(*Szil in* jelöléseit kissé megváltoztatjuk a tárgyalás folyamatosságának biztosítására.)

Akkor — *Szil in* szerint —

$$\frac{dQ}{dt} = DF \frac{C-c}{\frac{l}{4}}. \quad (9)$$

Az egyenletet kissé átalakíthatjuk, ha a koncentráció = $\frac{\text{cukormennyiség}}{\text{térfogat}}$

egyenlőségből $\frac{dQ}{dt}$ helyébe — $\frac{dC}{dt} F \frac{l}{2}$ -et helyettesítünk. Ezáltal a (9) egyenletet felírhatjuk tisztán koncentrációkra :

$$\frac{dC}{dt} = - \frac{4D}{l} \frac{F}{V} (C-c). \quad (10)$$

Planparallel lemezalakú szeletnél, melynek vastagsága kicsiny másik két méretéhez képest, $v \approx \frac{1}{2} Fl$. Ennélfogva vékony szeletekre *Szil in* feltevésével

$$\frac{dC}{dt} = - \frac{8D}{l^2} (C-c) \text{ vezethető le.}$$

A (9) egyenlet teljesen analóg a hőkicserélőkben a kicserélő falán át történő hőátadás törvényszerűségével. Ezért *Szil in* felhasználja a hőkicserélők Grashof-féle formuláját.

Ez a formula lényegében a koncentrációk $A + Be^{-qt}$ alakú változásának feltételezésével egyenértékű (t az idő, A , B , q a folyamatra jellemző konstansok). Evvel a folyamat matematikailag nagyon egyszerű fogalmazást kapott.

Szil in a fenti lényeges egyszerűsítő feltevésekkel hallgatólagosan felteszi, hogy a cukorrépaszeletek felületi koncentrációja megegyezik a környező lúgzóvíz koncentrációátlagával (környező alatt értendő egy olyan térrész, melynek lineáris méretei nem nagyok a szelet lineáris méreteihez képest). Ez azt jelenti, hogy a szelet környezetében koncentrációváltozás nincs. *Szil in* eredményei akkor fogadhatók el, ha feltesszük, hogy a szelethez hosszabb ideig nem tapad a szelettérfogattal egyező nagyságrendű létérfogat.

*A t változó helyett bevezethettük volna a szeletáramlás irányában mért ξ helykoordinátát is.

Viszont tagadhatatlan, hogy az egymásra szűfolt háztető-keresztmetszetű szeletekhez mindig tapad némi folyadék.

Dronov kiegészíti cikkeiben³ *Szilin* eredményeit, tekintetbe véve a folyadék diffúziós ellenállását is, és ezáltal megalapozza a kilúgozás egészen új, dinamikus elméletét.

A következő alapvető egyenletet kapja (jelöléseink szerint) :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{C - c}{\frac{l}{4D} + \frac{1}{\beta}} F. \quad (11)$$

β az általa »konvektív diffúziós állandó«-nak nevezett szám, a szeletek közti hézagoktól, a szeletek alakjától, a sebességtől stb. függő konstans. Kiszámítása nehéz hidrodinamikai számításokat tesz szükségessé. (V. ö. fent idézett cikkek.)

$\frac{1}{\beta}$ a folyadék diffúzióval szemben kifejtett ellenállására jellemző tag. A

$$D_0 = \frac{1}{\frac{l}{4D} + \frac{1}{\beta}} \quad (11a)$$

általános diffúziós koefficiens értelmezésével*

$$\frac{dQ}{dt} = D_0 (C - c) F. \quad (11b)$$

Dronov kísérleti eredményei alapján kis (0,15—0,30 cm/sec) lésebességeknél a sebességeknek nagy befolyása van a konvektív diffúziós koefficiensre. A következő értékeket közli :

Kísérletek száma	Az extraháló folyadék sebessége cm/sec.	A diffúzió általános koefficiense cm/sec.	Konvektív diffúziós koeff. cm/sec.
1. kísérlet	0,307	1,112	2,795
2. kísérlet	0,201	1,012	2,392
3. kísérlet	0,154	0,927	1,926

Viszont, a nálunk szokásos sebességértékek 1—2 cm/sec nagyságrendűek, ezeknél a Cukoripari Kutatóintézet feltevése alapján a β érték már meg lehetőségen nagy, úgyhogy az első közelítésben $\frac{1}{\beta} \approx 0$ -val számolhatunk. Eredményünk ezután tovább finomítható *Dronov* képletének felhasználásával.

* Megjegyzendő, hogy a *Dronov* által bevezetett β és D_0 „diffúzióegyütthatók“ dimenziója nem egyezik meg a diffúzióegyüttható nálunk szokásos dimenziójával, illetőleg a D molekuláris diffúzióegyüttható dimenziójával.

Slaviček⁴ a következő két egyenletből indul ki :

$$dQ = + \gamma dc = - \Gamma dC \quad (a)$$

a cukor megmaradását fejezi ki ;

$$dQ = \frac{DF}{L} (C - c) dt, \quad (b)$$

ahol a L a cukormolekula »közepes úthossza« a szelet belsejéből a lébe, a Fick-törvény alapján. A $\frac{DF}{L}$ meghatározáshoz szükséges mennyiségek egy része ismeretlen. Ezért ezeknek az egyenleteknek a számszerű megoldásához szükséges $\frac{DF}{L}$ konstans értéket kísérletileg óhajtja meghatározni.

Oplatka⁵ hasonló egyenletekből indult ki. A (b) egyenletnek megfelelő egyenlet :

$$dC = - \lambda (C - c) dt.$$

Összefoglalva : Az eddigi szerzők vizsgálataiban közös, hogy az ellenáramú diffúzióra két egyenletet állítanak fel, melyek közül az első a kontinuitást fejezi ki, a második pedig a Fick-törvénnyel analóg. Szelethez rögzített koordinátarendszerben :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = p \left[\frac{\partial C}{\partial t} - (\gamma + \Gamma) \frac{\partial c}{\partial \xi} \right], \quad (12)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \lambda (C - c). \quad (13)$$

Itt p a csőben valamely pillanatban található folyadék és szelet térfogataránya ; λ empirikusan vagy elméleti úton meghatározható konstans.

A Cukoripari Kutatóintézet ezt a két egyenletet stacionárius esetre megoldotta a következő határfeltételek figyelembevételével :

$C(0) = C_0$, a szeletek kezdeti koncentrációja és

$c(T) = c_1$, a lé kezdeti koncentrációja ismert.

T jelenti a csövön, illetőleg a diffúziórsoron való végighaladás idejét.

Eredményei a következők :

$$C(t) = c_1 + (C_0 - c_1) \frac{q e^{-qt} - e^{-qT}}{q - e^{-qT}}, \quad (14)$$

$$c(t) = c_1 + (C_0 - c_1) \frac{e^{-qt} - e^{-qT}}{q - e^{-qT}}, \quad (15)$$

ahol C_0 a szelet } kezdeti koncentrációja,
 c_1 a lé }

q a csövön határozott idő alatt belépő lúgzóvíz és szelet térfogataránya,
 T a csövön való áthaladási ideje.

$$q = \lambda \left(1 - \frac{1}{q} \right).$$

λ összefüggése kísérletileg meghatározható mennyiségekkel

Nagyon kívánatos a cukorgyári üzemben, hogy az üzem rugalmasan alkalmazkodjék a kilúgozásra kerülő szelet minőségének változásához. Tehát pl. ha rosszabbul vágott, vagy kisebb diffúzióállandójú szelet kerül az első diffúzorbe, a q térfogatarányt — lehetőség szerint késedelem nélkül — célszerű megnövelni.

Ezért a Cukoripari Kutatóintézet részéről felmerült az az óhaj, hogy találjunk összefüggést a stacionárius ellenáramú rendszer λ -ja és az álló, zárt rendszerben mérhető D/l^2 mennyiség között. (D a répaszelet diffúzióállandója, l a vastagsága.)

Ha ez sikerül, a diffúzorbe adagolt répaszeletekből vett minta D/l^2 -ét gyorsan végrehajtható laboratóriumi méréssel meghatározzuk, ami két időpontban való koncentrációmérést kíván, majd nomogrammból rögtön a megfelelő λ -hoz tartozó legkedvezőbb lélehúzást olvassuk le.

A feladatot oly módon oldottuk meg,¹ hogy feltételeztük, hogy a szelet és lé koncentrációja a diffúzió során kevéssel különbözik. Hibája ennek a módszernek, hogy csak bizonyos (1 körüli) lélehúzásokra érvényes eredményt ad, tehát nem illeszthető be egy általánosabb képbe, és nem magyarázza meg, miért éppen $\lambda = 1$ -re egyszerűsödik le a diffúzió differenciálegyenletével való bonyolult tárgyalásmód a (13) egyenletre, amely, mint láttuk, az I. Fick-törvénnyel teljesen analóg. Továbbá nem állapítható meg, milyen lélehúzásokra milyen pontossággal érvényes az összefüggés.

Az ellenáramú rendszer levezetett általános törvényszerűségét alkalmazhatjuk most is.

Álló, zártrendszerű cukorkilúgozásnál a cukor közepes koncentrációja a szeletben és a lében nem túlságosan kicsiny időértékekre jól konvergáló végtelen sorral adható meg: ¹

$$C(t) = \frac{C_0 + c_0 p}{1 + p} + 2 p^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p\mu_k)^2 + p + 1} e^{-4D \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 t} (C_0 - c_0), \quad (17)$$

$$c(t) = \frac{C_0 + c_0 p}{1 + p} - 2 p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p\mu_k)^2 + p + 1} e^{-4D \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 t} (C_0 - c_0), \quad (18)$$

$$\text{ahol } \mu_k \text{ a} \\ tg\mu = -p\mu \quad (19)$$

egyenlet k -adik pozitív gyökét jelenti (4. ábra),

C_0 a répaszeletek kezdeti koncentrációját,

c_0 a lúgzóvíz kezdeti koncentrációját.

Most alkalmazzuk az ellenáramú rendszerre levezetett általános törvényszerűséget erre a speciális esetre. p helyébe $-q$ -t helyettesítve:

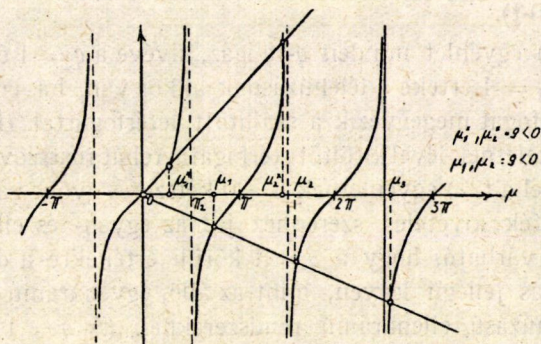
$$C(t) = \frac{C_0 - q c_0}{1 - q} + 2 q^2 (C_0 - c_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q\mu_k)^2 + 1 - q} e^{-4D \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 t}, \quad (20)$$

$$c(t) = \frac{C_0 - q c_0}{1 - q} + 2q(C_0 - c_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q\mu_k)^2 + 1 - q} e^{-4D\left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 t}, \quad (21)$$

ahol most μ_k a

$$\operatorname{tg} \mu = +q\mu \quad (22)$$

egyenlet k -adik pozitív gyökét jelenti (4. ábra).



4. ábra.

μ_k -t meghatározható például az I. mellékleten megadott nomogramm segítségével is. A nomogramm pozitív és negatív q -k meghatározására egyaránt használható (negatív $q =$ pozitív p).

A nomogramm használatánál ügyelnünk kell arra, hogy

1. A nomogrammból nem μ_k hanem $\mu_k - k\pi = \delta_k$ olvasható le.
2. A μ -k számozása pozitív q esetén némileg eltér a cikk többi részében használttól. ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$ és nem $k = 1, 2, 3, \dots$).
3. Pozitív és negatív q -khoz tartozó δ -k leolvasásánál ugyanaz a q skála de más δ skála használandó.

4. $k = 0$ -ra a nomogrammból csak nagyon pontatlanul, $0 < q < 1$ esetben pedig sehoggy sem lehet értéket leolvasni, de ez nem is szükséges, mert ezek az értékek a Jahnke—Emde-ben táblázatosan megtalálhatók ($0 < q < 1$ eset: lásd alább).

($0 < q < 1$ esetben az egyenletnek van egy imaginárius gyöke is, melyet szintén tekintetbe kell vennünk. Erre később még visszatérünk.)

C_0 most is a szelet kezdeti koncentrációját jelenti. c_0 azonban nem a kezdeti lékoncentráció, hanem a friss szeletet körülvevő nyerslé koncentrációja, vagyis a lé végkoncentrációja, amelyet nem ismerünk, épp ez az egyik meghatározandó mennyiség. Viszont ismerjük a lékoncentráció kezdeti értékét a másik csővégen: $c_1 = c(T)$. (21) egyenletbe $t = T$ -t helyettesítve kifejezhető belőle c_0 . Így most már a (20) és (21) egyenletek jobboldalán minden mennyiség kifejezhető ismert adatokkal.

Hogy az ellenáramú kilúgozást összehasonlíthassuk az egyenáramúval, mégis rögzített C_0 és c_0 mellett ábrázoltam különböző q értékek felvételével

a $C(t)$ és a $c(t)$ függvényeket (II. melléklet), a (20) és (21) képleteken alapuló számítás eredményeképpen.

Az ábra értelmezésénél ügyelni kell arra, hogy ha az egyen- és ellenáramú rendszer *üzemi viszonyait* akarnók összehasonlítani, ez az eljárás (t. i. C_0 és c_0 rögzítése) teljesen helytelen volna, tekintettel arra, hogy egyenáramú rendszernél c_0 , ellenáramú rendszernél pedig c_1 jelenti a lúgzó víz kezdeti koncentrációját (általában 0-t).

(19) és (20) egyenlet minden q -ra igaz, kivéve a $q = 1$ értéket, ahol értelmetlenné válik. $q = 1$ értéke a lélehúzásnak akkor van, ha egy adott idő alatt szállított répatérfogat megegyezik a szállított létérfogattal. (Répatérfogat alatt természetesen a szeletnek lével kitöltött térfogata, tehát rostszövet nélküli térfogat értendő.) $q = 1$ -nél a (22) egyenletnek $\mu = 0$ kétszeres gyöke van. Ebből látható, hogy a $q = 1$ érték kivételes szerephez jut az egyen- és ellenáramú diffúzió vizsgálatánál, és várható, hogy a $q = 1$ körüli értékekre a diffúziós folyamat lefolyása egész más jellegű legyen, mint az álló, egyenáramú vagy 1-től lényegesen eltérő lélehúzású ellenáramú rendszereknél. (A $q = 1$ kivételes szerepe egyébként az 5. ábrából is kitűnik.)

A gyakorlatban előforduló lélehúzások ellenáramú rendszereknél $q = 1$ közelébe esnek. Ugyanis, mint ismeretes, ha $q < 1$, végtelen idő alatt sem állhat be teljes koncentráció kiegyenlítődés, viszont $q \gg 1$ esetben túlságosan sok vizet kell a nyersléből elpárologatnunk, hogy besűrített cukorszirupot kapjunk. Ezért $q = 1$ érték közelébe eső rendszerekkel bővebben foglalkozunk.

$q = 1$ közelébe esik

a) Ha $q > 1$, akkor a μ_k -k sorozatának legkisebb tagját, μ_1 -et az $y = tg\mu$ görbe $0 < \mu < \pi$ szakaszának az $y = +q \cdot \mu$ egyenessel való metszéspontja adja (4. ábra). Szemlélet alapján belátható, hogy μ -t q függvényeképpen felfogva q -nak monoton növekvő függvénye, $\lim_{q \rightarrow 1} \mu = 0$, tehát 1 közelébe eső q értékekre μ kicsi lesz.

Elég kis μ_1 értékekre azonban a (17) és (18) sor tagjai $k = 2$ -től kezdve gyakorlatilag elhanyagolhatók a sor konstans és $k = 1$ -es tagja mellett.

Például $q = 1,25$ ellenáramú cukorkilúgozásnál már elég nagy érték. Erre

$$\mu_1 \simeq 0,484 \frac{\pi}{2},$$

$$\mu_2 \simeq 2,78 \frac{\pi}{2}.$$

Ebből $\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 \simeq 33$. Ennyiszor nagyobb a $k = 2$ -es tag kitevője a $k = 1$ -es tagénál, ami azt eredményezi, hogy a $k = 2$ -es tag 33-szor gyorsabban tart 0-hoz,

mint a $k = 1$ -es tag. Ezért nagyon kis időértékektől, illetőleg nagyságrendben a csőhossz 33-adrészétől eltekintve gyakorlatilag a $k = 2, 3, 4, \dots$ indexű tagok elhanyagolható kicsinyek, úgy hogy jó közelítéssel

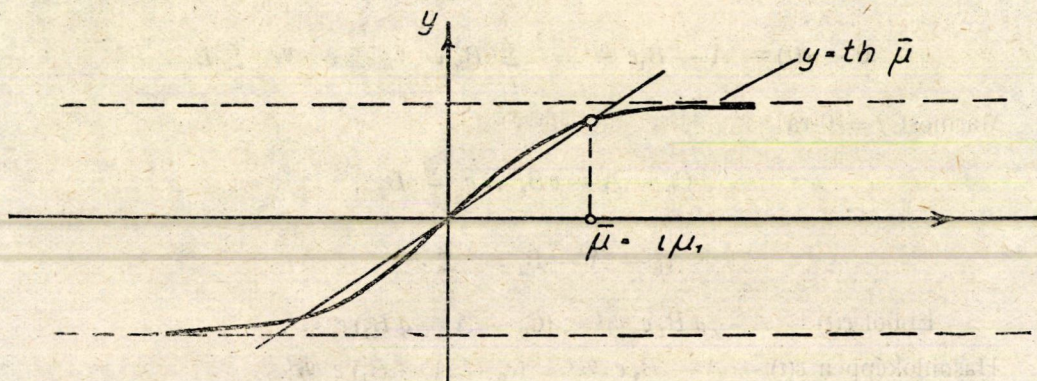
$$C(t) \approx \frac{C_0 - qc_0}{1 - q} + \frac{2q^2}{(q\mu_1)^2 + (1 - q)} e^{-4D \left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2 t}, \quad |23|$$

$$c(t) \approx \frac{C_0 - qc_0}{1 - q} + \frac{2q}{(q\mu_1)^2 + (1 - q)} e^{-4D \left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2 t}. \quad |24|$$

b) Ha $q < 1$, akkor (23) és (24) változatlanul érvényben marad. Azonban tekintetbe veendő, mint már említettük, a $tg\mu = q\mu$ egyenlet imaginárius gyöke is. Jelöljük ezt $\mu_1 = i\bar{\mu}$ -sal. Akkor (19) [19a] egyenletünk a következőképp alakul:

$$th\bar{\mu} = q\bar{\mu}.$$

Ennek egy pozitív megoldása van, ha $q < 1$, nincs pozitív megoldása, ha $q > 1$ (5. ábra).



5. ábra.

A (17) és (18) sorok tagjai közül a $k = 1$ -es exponenciálisan növekedő, minthogy

$$\mu_1^2 = (i\bar{\mu})^2 = -\bar{\mu}^2,$$

$k = 2, 3, 4, \dots$ -es exponenciálisan csökkenő tagok. Ezek a tagok annál lassabban csökkennek (v. ö. 4. ábra), minél kisebb értékű q . Ekkor viszont az exponenciálisan növekedő első tag gyorsabban növekszik (v. ö. 5. ábra). Mindenesetre megállapítható, hogy megint kis t értékektől, illetőleg a cső elejétől eltekintve elhanyagolhatók a $k = 2, 3, 4, \dots$ tagok. A (23) és (24) képlet most is érvényes marad, csak $-\mu_1^2$ helyébe $+\bar{\mu}^2$ helyettesítendő.

Hibabecslés

Az egyen- és ellenáramú, továbbá az álló diffúziós rendszer cukorkilúgozása ugyanazzal a (17), (18) formulával adható meg. Láttuk, hogy kis t értékektől eltekintve $q = 1$ körüli értékekre, továbbá a $[0 < q < 1]$ értékekre, tehát 0-tól

kb. 1,4-ig terjedő léleházásértékekre jó közelítéssel két taggal közelíthetjük függvényünket (23) és (24) szerint.

Semmi nehézséget nem okoz annak a hibának megbecslése, melyet a $k = 2, 3, 4, \dots$ tagok elhanyagolása okoz.

Egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket :

$$C(t) = A + q \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\varrho_k t} ,$$

$$c(t) = A + \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\varrho_k t} .$$

A jobboldali sorok monoton csökkenők minden nem-negatív t -re. Felírhatók a következő egyenlőtlenségek :

$$0 < C(t) - A - q B_1 e^{-\varrho_1 t} = q \sum_2^{\infty} B_k e^{-\varrho_k t} \leq q e^{-\varrho_2 t} \sum_2^{\infty} B_k ,$$

$$0 < c(t) - A - B_1 e^{-\varrho_1 t} = \sum_2^{\infty} B_k e^{-\varrho_k t} \leq e^{-\varrho_2 t} \sum_2^{\infty} B_k .$$

Mármost $t = 0$ -ra

$$C_0 - A - q B_1 = q \sum_2^{\infty} B_k ,$$

$$c_0 - A - B_1 = \sum_2^{\infty} B_k .$$

$$\text{Ebből } c(t) - A - q B_1 e^{-\varrho_1 t} < (C_0 - A - q B_1) e^{-\varrho_2 t} .$$

$$\text{Hasonlóképpen } c(t) - A - B_1 e^{-\varrho_1 t} < (c_0 - A - B_1) e^{-\varrho_2 t} .$$

Ha $\varrho_2 t$ ϱ_1 -hez képest nagynak tételezzük fel ($0 < q < 1,4$), $e^{-\varrho_2 t}$ már kis t értékeknél nagyon kicsivé válik, vagyis közelítőleg

$$C(t) = A + q B_1 e^{-\varrho_1 t} ,$$

$$c(t) = A + B_1 e^{-\varrho_1 t} \quad (t \neq 0) .$$

Az egyenlőség nem áll fenn $t = 0$ -ra :

$$\lim_{t \rightarrow 0} C(t) < C_0 (= A + q \sum B_k) ,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} c(t) < c_0 (= A + \sum B_k) .$$

Tehát a koncentrációk igen rövid idő alatt leesnek C_0 -ról $\lim_{t \rightarrow 0} C(t)$ -re ill.

c_0 -ról $\lim_{t \rightarrow 0} c(t)$ -re

Ennek a gyors koncentrációesésnek oka az, hogy kis időértékeknél a diffúzió a szelet határrétege és a lé közti nagy koncentrációkülönbség miatt ugrásszerűen csökken, amíg a szelet belsejében egy aránylag egyenletesebb eloszlás fel nem lép.

A kezdeti szakaszban a magasabbrendű tagok is erősen belefolyanak a koncentrációváltozásba; a sor rosszul konvergál.

Nevezzük általában »kezdeti koncentrációesés«-nek a $C_0 - \lim_{t \rightarrow 0} C(t)$,

illetőleg $c_0 - \lim_{t \rightarrow 0} c(t)$ kifejezéseket.

$C(t)$ és $c(t)$ alatt a (23) és (24) szerinti C és c értendő. (Megjegyzendő, hogy az elnevezés csak $0 < q < 1,4$ esetben találó, egyébként a koncentrációesés nem gyors.)

(23) és (24) szerint

$$C_0 - \lim_{t \rightarrow 0} C(t) = - (C_0 - c_0) q \left[\frac{1}{1-q} + \frac{2q}{(q\mu_1)^2 + 1 - q} \right],$$

$$c_0 - \lim_{t \rightarrow 0} c(t) = - (C_0 - c_0) \left[\frac{1}{1-q} + \frac{2q}{(q\mu_1)^2 + 1 - q} \right].$$

Ez a kezdeti koncentrációesés jellemző arra a hibára, melyet akkor követünk el, ha a (17) és (18) sor helyett csak az egyszerű exponenciális (23) és (24) kifejezést vesszük figyelembe. A képlet alapján kiszámított koncentrációeséseket q függvényében a III. mellékletben ábrázoltuk.

$C_0 - c_0$ azonban ellenáramú, 1-nél nem sokkal nagyobb lélelhúzású rendszereknél kicsi C_0 -hoz képest, tehát 1 közelébe eső lélelhúzásoknál valóban elhanyagolható az ábra szerint a (23) és (24) használatánál elkövetett hiba. Egyenáramú és zárt rendszereknél ez már egyáltalában nem állítható.

A későbbi exponenciális tagok azért is elhanyagolhatók q fenti értékeire, mert az elhanyagolt exponenciális tagok kitevőinek együtthatói nagy abszolút pontértékű negatív számok. A IV. mellékletben az »időállandók« arányát, vagyis $\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}$ -et ábrázoltuk q függvényében. Ha ez kicsi, az első exponenciális tag szerepe túlnyomó.

λ meghatározása

(23) és (24) szerint

$$(23a) \quad C(t) \cong A + qBe^{-\lambda t},$$

$$(24a) \quad c(t) \cong A + Be^{-\lambda t}$$

alakja van a koncentráció függvényeknek, (az 1 indexet B és q mellől elhagytam)

ahol

$$e = \frac{4D}{l^2} \mu_1^2, \quad (25)$$

illetőleg

$$e = -\frac{4D}{l^2} \bar{\mu}^2. \quad (26)$$

(23a) és (24a) segítségével

$$\frac{dC}{dt} = -q B e^{-et},$$

$$C - c = (q - 1) B e^{-et}$$

$$\text{és így } \lambda = -\frac{\frac{dC}{dt}}{C - c} = \frac{q}{q - 1} e = \frac{q}{q - 1} \frac{4D}{l^2} \mu_1^2, \quad (27)$$

illetőleg

$$\lambda = \frac{q}{1 - q} \frac{4D}{l^2} \bar{\mu}^2.$$

Kellemetlen még, hogy a formulában μ_1 és $\bar{\mu}^2$ implicite tartalmazza q -t. Ezért — tekintve, hogy q nem sokkal különbözik 1-től, — μ_1 -t Taylor-sorba fejtjük, $q = 1$ körül q szerint. Az alábbiakban írjunk μ_1 helyett egyszerűen μ -t.

μ definiáló egyenlete:

$$\operatorname{tg} \mu = q \mu$$

Ebből $q - 1 = \frac{\operatorname{tg} \mu}{\mu} - 1$, és a $\operatorname{tg} \mu$ Taylor-sorát $\mu = 0$ hely körül felhasználva

$$q - 1 = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k} (2^{2k} - 1) B_{2k}}{(2k)!} \mu^{2k-2},$$

ahol a B_{2k} -k a Bernoulli-számokat jelölik. Innen

$$q - 1 = \frac{1}{3} \mu^2 + \frac{2}{15} \mu^4 + \frac{17}{105} \mu^6 + \dots \quad (28)$$

Az Abel-féle tételt alkalmazva sorok megfordítására, megkapjuk μ^2 -nek $q - 1$ szerint haladó sorát. Az így kapott sort még $\frac{q-1}{q}$ szerint haladó sorba rendezve

a következő sort kapjuk:

$$\mu^2 = 3 \left[\frac{q-1}{q} - \frac{1}{5} \left(\frac{q-1}{q} \right)^2 + \frac{4}{175} \left(\frac{q-1}{q} \right)^3 \pm \dots \right]. \quad (29)$$

Ezt a sort (27-be) visszahelyettesítve

$$\lambda = \frac{12D}{l^2} \left[1 - \frac{1}{5} \frac{q-1}{q} + \frac{4}{175} \left(\frac{q-1}{q} \right)^2 \pm \dots \right] \quad (30)$$

Szerencse, hogy ez a sor lényegesen jobban közelíthető első tagjaival, mint a $q - 1$ hatványai szerint haladó sorfejtés. Ezért jó közelítéssel igaz λ első közelítő formulája:

$$\lambda \approx \frac{12 D}{l^2}. \quad (30a)$$

Ez a formula megegyezik az I. Magyar Matematikai Kongresszuson levezetett értékkel.

$$q = 1$$

Teljesség kedvéért külön foglalkozunk $q = 1$ esettel, mely mint mondtuk, kivételes szerepet tölt be az egyen- és ellenáramú rendszerek között.

$q = 1$ -re (23) és (24) értelmetlenné válik. Ezért ki kell használnunk, hogy C és c a q folytonos függvényei, tehát

$$\lim_{q \rightarrow 1} C(t) = [C(t)]_{q=1}, \quad (31)$$

$$\lim_{q \rightarrow 1} c(t) = [c(t)]_{q=1}. \quad (32)$$

Felhasználva μ_1^2 fent közölt végtelen sorát, a határérték egyszerű eszközökkel kiszámítható:

$$C(t) = C_0 - (C_0 - c_0) \left[\frac{1}{5} - \frac{12D}{l^2} \right] t = C_0 - \frac{1}{5} (C_0 - c_0) - \lambda (C_0 - c_0) t, \quad (33)$$

$$c(t) = c_0 - (C_0 - c_0) \left[\frac{1}{5} - \frac{12D}{l^2} \right] t = c_0 - \frac{1}{5} (C_0 - c_0) - \lambda (C_0 - c_0) t. \quad (34)$$

Az összefüggésből $\lim_{t \rightarrow 0} C(t) = C_0 - \frac{1}{5} (C_0 - c_0)$, tehát a koncentráció-függvények

jobboldali határértéke $\frac{1}{5} (C_0 - c_0)$ -l kisebb a kezdeti koncentrációknál, azaz $\frac{1}{5} (C_0 - c_0)$ koncentrációesés lép fel.

Elvileg ez a koncentrációesés a végtelen sor $k = 2, 3, 4, \dots$ tagjainak együttes értékével egyenlő $t = 0$ -nál, és azért esik le hirtelen a koncentráció, mert ezek a tagok k növelésével gyorsan tartanak 0-hoz, tehát gyorsan helyreáll

a $\frac{\partial C}{\partial t} = -\lambda (C - c)$ egyenlet érvénye.

A gyakorlatban $C_0 - c_0$ nem szokott C_0 15 ÷ 20%-ánál több lenni, és így az $\frac{1}{5} (C_0 - c_0)$ tag kicsi a C_0 mellett. Egyébként is, amennyiben a kilúgozás sorba-kapcsolt diffuzőrökben történik, a legnagyobb koncentrációjú diffuzőrben kisebb a hőfok, azonkívül az áramlás iránya megfordul a diffuzőr lúgzóvízzel való

feltöltésének időtartamára. Ebből kifolyólag a kísérletek tanúsága szerint a lékoncentráció változásának görbéje nem exponenciális, elméleti eredményeink erre az aránylag rövid kezdeti szakaszra nem alkalmazhatók. Ezért az $\frac{1}{5}(C_0 - c_0)$ koncentrációesést kísérletileg igazolni nagyon nehéz volna.

A (33) és (34) képletek levezethetők — ha az $\frac{1}{5}(C_0 - c_0)$ tagot elhanyagoljuk — a (12) és (13) egyenletből nyert képlettel.

Hasonlóképpen $q < 1$ és $q > 1$ esetben is a kezdeti kis koncentrációesés elhanyagolása után képleteink megegyeznek a (14) és (15) képlettel. Tehát a (14), (15) képletek eredményeink első közelítésekként foghatók fel, ha $0 < q < 1,4$.

Egybevetés Szilin és Dronov eredményeivel

A (10) képlet alapján Szilin $l/4$ -es »diffúziós útjával« számított λ érték

$$\lambda = \frac{8D}{l^2}$$

szemben a (30a)-ban levezetett első közelítő

$$\lambda = \frac{12D}{l^2}$$

értékkel.

Ez azt jelenti, hogy a »diffúziós út« hosszát elvi szempontból helyesen $l/4$ helyett $l/6$ -nak kellene venni. Vagy tekintetbevéve, hogy téglalap keresztmetszetű szeletnél 1 cm^3 térfogatra még nagyobb felszín jut, mint planparalell lemez alakú szeletnél, még kisebbnek.

Feltehető, hogy *Dronov* a Szilin-féle hipotézis alapján számította ki a molekuláris diffúzió-állandó mérhető értékéből és az általános diffúzióállandónak az üzemi ellenáramú görbéből visszszámítható értékéből a lé »konvekciós« diffúzióállandóját, β -t.

Sajnos, a molekuláris diffúzióállandó értékeit *Dronov* nem adta meg. Ezért feltételezve, hogy β értékét a molekuláris és az általános diffúzióegyütt- hatóból számította, visszafelé kiszámítottuk azokat a $\frac{4D}{l}$ -ket, melyek D_0 és β közölt értékével kielégítik a (11a) egyenletet. A (11a) egyenlet szerint

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{D_0} - \frac{l}{4D}.$$

Ha a (30a) szerinti levezetett λ értéket és az ebből folyó $\frac{l}{6}$ diffúziós úthosszt fogadjuk el helyesnek, akkor *Dronov* β állandójának értéke a következőképpen módosul:

$$\frac{1}{\beta^*} = \frac{1}{D_0} - \frac{l}{6D}. \quad (35)$$

Vagyis

$$\beta^* < \beta.$$

A 2. táblázatban feltüntettük a *Dronov* által közölt értékek mellett visszafelé kiszámított értékeit, továbbá a (35) szerinti értéket is.

Kísérletek száma	V cm/sec	D_0	$4 D/l$ (11a)-val vissza- számítva	β (Dronov sz.)	β^* (35) szerint
1. kísérlet	0,307	1,112	1,847	2,795	1,867
2. kísérlet	0,201	1,012	1,754	2,392	1,644
3. kísérlet	0,154	0,927	1,787	1,926	1,417

Dronov hangsúlyozni kívánta a szeletek között megtapadó lé diffúziós ellenállásának szerepét. Eredményünk ezt a nézetet még jobban alátámasztja az általa mért kicsiny sebességeknél.

Az ismertett elméleti eredmények kísérleti vizsgálatáról a Cukoripari Kutatóintézet közreműködésével későbbi cikkben lesz szó. Végül köszönetet kell mondanom a Cukoripari Kutatóintézet dolgozóinak, hogy elméleti és kísérleti téren egyaránt segítségemre voltak a diffúziós jelenségek tanulmányozásában, a szükséges irodalmat rendelkezésemre bocsátották; előadásom kísérő ábráit is részben ők bocsátották rendelkezésemre.

Magyar Tudományos Akadémia,
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

- ¹ Pál S.: Cukoripari diffúziós problémák. I. Magyar Matematikai Kongresszus, sajtó alatt.
- ² Szilin P. M.: Cong. International des Ind. Agr. II. (1937) 534.
- ³ Дронов, С. Ф. Динамическая теория диффузионного способа извлечения веществ. „Сахарная промышленность“ № 10. 1949 стр. 15. И. а. № 11. стр. 24.
- ⁴ Дронов, С. Ф. Мацерационный способ работы на диффузии. „Сах. пром. № 6. 1949. стр. 8.
- ⁵ Slaviček: Ellenáramú cukorkilúgozásról. Listy Cukrovarnicke 65 (1948—49), 105.
- ⁶ Oplatka: Magyar Kémikusok Lapja (1949), 10—11. szám.