A VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS ÉS TENZORKALKULUS FIZIKAI ALKALMAZÁSAI

NOVOBÁTZKY KÁROLY r. tag

Előadta az 1950. november 30-án tartott osztályülésen

A fizika számos fejezetében kettős tagozódás észlelhető. A probléma egyfelől az egyensúly feltételeinek meghatározása, másfelől a természeti történés törvényszerű leírása. Ez a két feladat matematikai módszereiben jellemzően különbözik egymástól. Az egyensúly feltételeit rendszerint egy függvény szélső értéke szabja meg. Ez a mechanikai sztatikában a rendszer potenciális energiájának minimuma, az elektrosztatikában a *Thomson*-féle tétel szerint ugyancsak az elektrosztatikai energia minimuma, a termodinamikában, melynek találóbb neve termosztatika volna, az entrópia, vagy termodinamikai potenciál maximuma.

Egészen másképpen áll a helyzet, amikor jelenségek időbeli lefolyásának leírásáról van szó. A differenciálegyenletek, melyek a fizikai mennyiségek időfüggését jellemzik, nem valamely függvény, hanem egy határozott integrál extrémumfeltételeiből származnak, Euler-féle egyenletei egy variációs problémának. Elég futólag átlapozni valamely modern fizikai kompendiumot, hogy meggyőződjünk róla, mennyire centrális módszere a variációszámítás a mai elméleti fizikának. Éspedig kettős értelemben: úgy is, mint kutató módszer, úgy is, mint páratlan összefoglaló képességű kalkulus. Ha az elméleti fizikus olyan helyzetbe kerülne, hogy hiányos emlékezetét semmiféle kézikönyv nem támogatná, akkor is könnyen reprodukálhatná a kérdéses fizikai fejezet minden mennyiségi vonatkozását az összes részletfinomságokkal együtt, ha egyetlenegy kifejezést emlékezetében tartott: a fejezet Lagrange-függvényét. Csodálatos és mindmáig meg nem indokolható tény, hogy a klasszikus és relativisztikus mechanika, az elektromágneses tér, a skalár- és vektormezontér, az elektron- és gravitációs-tér differenciálegyenletei egy-egy variációs probléma Euler-féle egyenleteiként adódnak.

Legismertebb a mechanika esete. Ha valamely rendszer általános koordinátáit $q_1, q_2, \ldots$ -vel jelöljük, időszerinti differenciálhányadosaikat pedig $\dot{q}_1\ \dot{q}_2 \ldots$-vel, akkor a mechanikai mozgásegyenletek pontos ekvivalensek azzal a követelménnyel, hogy a következő integrál

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,(q_1, q_2, \ldots, \dot{q}_1\ \dot{q}_2, t) \ldots.\ dt$$

stacionér értéket vegyen fel. Az L Lagrange-függvény a klasszikus mechanikában végig a rendszer kinetikai és potenciális energiájának különbsége:

$$L = T - V.$$

A problémából eredő Euler-egyenletek:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

és ezek csakugyan azonosak a dinamikai meggondolásokból adódó ú. n. másodfajú Lagrange-féle mozgásegyenletekkel. A variációt állandó integrálhatárok mellett kell keresztülvinni. Jellemző és a felsorolt tereknél folyton megismétlődő jelenség, hogy az alapvető Lagrange-függvénynek közvetlen fizikai jelentése nincs. Így pl. az elektromágneses tér esetében a Lagrange-függvény az elektromos és mágneses energiasűrűség különbsége, holott összegüknek volna kézzelfogható fizikai jelentése. Ugyancsak általános vonás, hogy a vázolt esetekben az integrál szélső értékének természete, vagy létezése, egyáltalán nem érdekli a fizikust. Másképpen áll a helyzet speciális problémák megoldásánál. Ott a második variáció definit vagy indefinit jellege lényeges szerepet játszik.

Az általános relativitás elméletének megalkotásával a variációszámítás fontossága erősen megnövekedett. Ez az elmélet új $g_{ik}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ függvényeket vezet be, melyek együtthatói a tér ívelemnégyzetének:

$$ds^2 = \Sigma\Sigma g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

A g_{ik} mennyiségek a gravitációs teret jellemzik és másodrendű parciális differenciálegyenletek által vannak meghatározva. Nevezetes, hogy ezeket az Einstein-féle gravitációs egyenleteket ugyancsak variációs elv szolgáltatja. De fizikai szempontból sokkal fontosabb a következő tény: most már az általános kovariancia követelményének megfelelően pl. az elektromágneses tér Lagrange-függvényét mint invariánst, a szigorúan vett elektromágneses mennyiségeken kívül, a g_{ik}-ból is fel kell építeni. A feladat nem nehéz, hiszen lényegében semmi mást nem jelent, mint L-t általános koordinátákban felírni. A g_{ik}-k variációja alkalmából L tizenhattagú összeget ad, mely ilyen alakú: $\delta L = \Sigma\Sigma T_{ik}\,\delta g_{ik}$. Nagy horderejű körülmény, hogy ezeknek a T_{ik} koefficienseknek elsőrendő fizikai jelentésük van. Jelentik sorban az elektromágneses tér energiáját, három impulzuskomponensét és a Maxwell-féle feszültségeket. Továbbmenően ezeknek a komponenseknek a divergenciája a Lorentz-féle ponderomotoros erőt adja. Gondoljuk meg, milyen fáradságos fizikai meggondolások útján jutott el *Maxwell* az energia és a feszültségek analitikai kifejezéseihez, milyen mély elmerülés vezetett a Poynting-féle vektor fogalmi megkonstruálásához, most pedig egyszerű variációs formalizmus megengedi, hogy játszva alkossuk meg ezeket a fontos fizikai mennyiségeket. Ha egy elméleti fizikus szellemesen el akarna szórakozni, íróasztala mellett ülve, költött Lagrange-függvényből megalkothatná egy lehetséges erőtérnek nemcsak differenciálegyenleteit, hanem összes fontos fizikai mennyiségeit. Olyan tisztán látna bele ebbe a költött világba, mintha valóságban előtte állana. Ez természetesen csak játék volna, de világosan megmutatja a variációs módszer heurisztikus erejét. Így pl. mikor *Proca* mélyreható meggondolások alapján megalkotta a ma annyira fontos mezontér Lagrange-függvényét, már tulajdonképpen készen is volt feladatával. Nem kellett végig járnia elődei fáradságos útját, formális eljárással meghatározhatta ennek az erőtérnek minden jellegzetes mennyiségét. *Einstein* és *Schrödinger*, akik hisznek a gravitáció és elektromágnesség szerves egységében, hosszú évek óta a variációs módszerrel folytatják kutatásaikat.

Ismeretes, hogy a mechanikának és az erőterek elméletének legfontosabb és leggyakrabban felhasznált tételei az energia és impulzus megmaradása. Ezeket a megmaradási tételeket is a hatásintegrálnak egy speciális variációja szolgáltatja. A gondolatmenet igen egyszerű. Tekintettel arra, hogy az $I = \int L\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$ általános hatásintegrál feltétel szerint invariáns, egy $\overline{x}_i = x_i + \xi_i$ infinitezimális transzformáció, hol ξ_i végtelen kicsiny, tényleges változást nem idézhet elő benne. Formális változások azonban a transzformáció végrehajtása alkalmával igenis fellépnek. Magától értetődő tehát, hogy ezek a változások azonosan zérusok, ha I invariáns. Rendkívül érdekes, hogy az így kapott négy azonosság éppen az energia és impulzus megmaradását fejezi ki. A transzformáció keresztülvitele adott esetben nem éppen egyszerű feladat. A variációszámítás azonban itt is segítségünkre siet, és a hosszadalmas számítást sima alakisággá változtatja.

Maga a kanonikus elmélet, mely különösen az újabb időben a kvantumelmélettel kapcsolatban egészen különleges fontosságra tett szert, ugyancsak közvetlen összefüggésben áll a variációszámítással. Egyfelől azért, mert a Lagrange-függvényből származó Euler-egyenletek egyszerű Legendre-transzformációval átmennek a kanonikus egyenletekbe, másfelől maguk is Euler-egyenletei egy másik variációs problémának.

Végül feltétlenül fel kell említenem a variációszámítás ú. n. határformulájának nevezetes fizikai szerepét. Egyszerűség kedvéért ismét a mechanika esetére szorítkozom. Ha a hatásintegrál kifejezésében az integrál határait nem tekintjük változatlanoknak, hanem magát t-t, a független változót is variáljuk, akkor δI kifejezése valamivel komplikáltabb lesz. A jól ismert

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta L}{\delta q_i}\, \delta q_i\, dt$$

kifejezéshez hozzájárul még a következő:

$$-H\, \delta t + p_1\, \delta q_1 + p_2\, \delta q_2 + \ldots$$

Itt H jelenti a mechanikai rendszer *Hamilton*-függvényét, $p_1, p_2, \ldots$ a $q_1, q_2, \ldots$-nek megfelelő kanonikus impulzusokat. Ez a határformula szolgál most a kanonikusan konjugált mennyiségek definíciójául. A δq_1 együtthatója p_1, a q_1-hez rendelt kanonikus impulzus. De épp oly jogosan megállapíthatjuk *Pauli* tiltakozása ellenére, hogy a t időnek konjugáltja a $-H$. Ennek pedig a kvantumelméletben fontos következménye van. Ez az elmélet a kanonikus konjugáltakat differenciáloperátorokkal azonosítja. Így a p_1-t a $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_1}$-vel, p_2-t $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_2}$-vel stb. Ennélfogva a t időnek konjugáltját, $-H$-t a $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}$-vel kell azonosítani. De tudvalevőleg a H Hamilton-függvényt a q_i koordinátákkal és a p_i impulzusokkal is ki tudjuk fejezni: $-H = -H(q_i, p_i)$. A két operátor megkövetelt egyenlőségéből következik tehát, hogy mindkettő csak olyan $\psi(q_1 q_2, \ldots)$ függvényekre alkalmazható, melyekre fennáll a $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -H\psi$, vagy $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} + H\psi = 0$ egyenlőség. Ez a kvantummechanika jól ismert hullámegyenlete. Különös, hogy a vázolt leszármaztatásra az irodalom nem utal. Kiemelendő, hogy a kanonikus egyenletek nem definiálják t-t és H-t konjugált párnak, ott ugyanis az előjelek nem vágnak. A definíciót csak a variációszámítás határformulájára lehet alapítani. Az erőterek négydimenziós elméletében egészen hasonlóan megállapíthatjuk az x_1, x_2, x_3, x_4 független változók konjugált társait, és ugyancsak levonhatjuk a kvantumelméleti következményeket.

A variációszámítás módszerei nélkül a klasszikus és a kvantumfizika is nehezen hozzáférhető, módszertanilag széthulló diszciplinákból állna.

A tenzorkalkulushoz is megadja az átvezető hidat. Hiszen az első variáció két végtelenül szomszédos vonalhoz vagy felülethez tartozó integrálértékek különbsége, és mint ilyen, független minden koordinátarendszertől. A vonatkoztató rendszertől függetlenül értelmezhető mennyiségeket általában tenzoroknak szoktuk nevezni, és ebbe a fogalomcsoportba beletartozik a vektor és a skalár is. A vektor miniatűr hasonmása a koordinátadifferenciálok által megadott irányított ívelem. Éppen ezért a vektort úgy is definiáljuk, hogy komponensei úgy transzformálódnak, mint a koordinátadifferenciálok: $v_1 \sim dx_1$. Ennek mintájára a kétindexes tenzort is így határozzuk meg: olyan mennyiség, melynek T_{ik} komponense úgy transzformálódik, mint a $dx_i\, dx_k$ szorzat. A definíció következménye, hogy a transzformált komponensek az eredetieknek lineáris formái: $\overline{T}_{ik} = \Sigma\Sigma a_{ik} T_{ik}$. Az a kijelentés tehát, hogy egy tenzor komponensei egy koordinátarendszerben O-ok, azt jelenti, hogy minden más koordinátarendszerben is azok. A kijelentés minden vonatkoztató rendszertől független. Az általános relativitás elméletének egyik szép alkotása, hogy kimutatta: minden fizikai mennyiség transzformációs tulajdonságánál fogva skalár, vektor, vagy többindexes tenzor, melynek lehetnek még speciális szimmetriatulajdonságai. (Újabb felismerés a szpinor.) Így pl. az elektromos és mágneses térerősség három-három komponense úgy transzformálódik, mint egy antiszimmetrikus tenzor. A legegyszerűbb ilyen tenzort egy vektornak a rotációja szolgáltatja. És valóban kitűnt, hogy az elektromágneses térerősség a négyes potenciálnak a rotációja. Nem állhatom meg, hogy rá ne mutassak ennek a kijelentésnek az óriási horderejére. Ez az egyszerű mondat magában foglalja az indukció egész jelenségkörét, mai elektrotechnikánk alfáját és omegáját. Ez a formális kijelentés összesíti *Faraday* sokévi drámai kutatóharcának eredményét, sőt megtoldja még azzal, hogy valódi mágnesség nincs. Matematikailag jobban áthatni egy jelenségkört, eredményeit tömörebben összefoglalni már igazán nem lehet.

A relativitás elmélete azonban egy másik követeléssel is előáll. Ismeretes, hogy a fizikai elméleteket differenciálegyenletrendszerek írják le. Gondoljuk ezeket zérusra redukált alakban. Exakt elmélet esetében a baloldalaknak tenzorkomponenseknek kell lenniök. Pl. $T_{ik} = 0$. Ugyanis ekkor az előbb mondottak szerint egy másik koordinátarendszerben ugyancsak így hangzanak: $\overline{T}_{ik} = 0$. Ez a körülmény évtizedeken át szuggesztív hatással volt a spekulatív kutatásra. Gondoljuk el pl., hogy némi tapogatódzással sikerült megállapítanunk, hogy egy jelenségkörben fellépő mennyiségek milyen jellegű tenzorok. A reájuk vonatkozó természettörvények baloldalai tehát az előbbiek szerint nem lehetnek mások, mint belőlük képezett újabb tenzorok. Nem kell mást tennünk, mint — a tenzoralgebra és tenzoranalízis kitűnően kidolgozott módszereit igénybe véve — a térmennyiségek tenzoraiból újabb tenzorokat alkotni és ezeket a téregyenletek baloldalainak tekinteni. De a fák nem nőnek az égig. A kapott differenciálegyenletek legtöbbször oly komplikáltak, hogy megoldásuk nem sikerül. Pedig csak így válnék lehetővé a tapasztalattal való összehasonlításuk. A módszer néhány esetben mégis megmutatta rendkívüli teljesítőképességét. Így születtek meg az Einstein-féle gravitációs egyenletek, a Dirac-féle elektronegyenlet és a Proca-féle mezonegyenletek. A módszer jelentősége éppen napjainkban ébredt fel újból, mikor az elméleti fizikusok igyekezete arra irányul, hogy szingularitásoktól mentes kvantumelméletet építsenek ki. Ennek a fáradságos munkának első eredményeként elkönyvelhetjük, hogy *Tomonaganak* és *Schwingernek* sikerült mind a csererelációkat, mind a hullámegyenletet szembeszökően kovariáns alakra hozni. Meg vagyok győződve, hogy az út fáradságosabb második szakaszán a tenzorkalkulus ugyancsak jelentős szerepet fog játszani.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Fizikai Intézete.