HARMADFOKÚ SZEKULÁRIS EGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSÁNAK FIZIKAI ALKALMAZÁSAI

KOVÁCS ISTVÁN lev. tag

Előadta az 1950. november 30-án tartott osztályülésen

1. § Ismeretes, hogy a fizikai problémák kvantummechanikai tárgyalására felállított Schrödinger-féle differenciálegyenletek matematikailag exakt módon csak néhány speciális esetben oldhatók meg. Olyan esetben, mikor az exakt megoldás nem lehetséges, úgy járunk el, hogy konstruálunk egy az eredeti egyenlettől lehetőleg kevéssé eltérő, de matematikailag exakt módon kezelhető másik egyenletet, s ennek megoldásait, valamint a megoldásokhoz tartozó sajátértékeket az eredeti egyenlet megoldásai (vagyis sajátfüggvényei) és sajátértékei (vagyis energiaértékei) nulladik közelítéseinek tekintjük. Ez utóbbi sajátfüggvényeket és energiaértékeket a megoldandó probléma perturbálatlan sajátfüggvényeinek és perturbálatlan energiaértékeinek nevezzük. A konkrét fizikai problémára felállított és exakt módon meg nem oldható hullámegyenlet sajátfüggvényeit és energiaértékeit azután — a perturbálatlan értékeknek kiindulópontul választása mellett — az elhanyagolt tagoknak a kvantummechanikai perturbációszámítás szerint való figyelembevételével számítjuk ki. Ez az eljárás sok esetben a perturbált energiaértékek kiszámítására egy szekuláris egyenlethez vezet, melynek diagonálisában az említett nulladik közelítésű perturbálatlan energiaértékek, egyéb helyein pedig a hullámegyenletben elhanyagolt tagok és a perturbálatlan sajátfüggvények segítségével kiszámítható ú. n. perturbációs matrix elemei állanak. Mind a perturbálatlan energiaértékek, mind pedig a perturbációs matrix-elemek különböző paraméterek függvényei lehetnek úgy, hogy a szekuláris egyenlet megoldása nem egyetlen numerikus egyenlet megoldásának problémája. A főkérdés, amire a megoldásnál kíváncsiak vagyunk, az, hogy a megoldások milyen függvényei azoknak a paramétereknek, melyektől a perturbálatlan energiák és a perturbációs matrix elemei, más szóval a szekuláris egyenlet együtthatói függnek.

A probléma igen egyszerű akkor, amikor a szekuláris egyenlet másodfokú : ilyenkor az exakt megoldás jól áttekinthető módon, egyszerű zárt alakban adható meg. Bonyolódik a helyzet azonban, amikor másodfokúnál magasabb fokszámú egyenlet áll előttünk. Ilyenkor a legtöbb esetben exakt megoldás nem is adható meg, amikor pedig megadható (mint harmad- és negyedfokú egyenlet esetében), akkor ez a megoldás olyan bonyolult, hogy a fizikus gyakorlatilag nem is tudja felhasználni. Ilyenkor inkább megelégszünk közelítő megoldásokkal, csak hogy további következtetésekre alkalmas formulát nyerjünk. Ezek a közelítések azonban többnyire a vizsgált probléma sajátos természetéhez hozzáidomított »ad hoc« megoldások voltak, és éppen ezért alkalmazásuk csak olyan, vagy hasonló esetekben volt lehetséges, amelyekre éppen készültek, kielégítő eredményekre azonban itt sem vezettek[1].

Kívánatosnak látszott tehát — legalább is harmadfokú szekuláris egyenlet esetében — olyan általános megoldást keresni, amely egyrészt nem függ a tárgyalt probléma sajátos természetétől, másrészt pedig pontossága tetszésszerinti módon fokozható, más szóval az exakt megoldást tetszés szerint megközelítő, ugyanakkor azonban a fizikus számára mégis könnyen kezelhető kifejezéseket ad.

2. § *Általános megoldás.* A harmadfokú szekuláris egyenlet megoldását az eddigiekben úgy szokták megkerülni, hogy többé-kevésbbé indokolt elhanyagolásokkal másodfokú egyenletre vezetik vissza, melynek megoldása azután zárt alakban adható meg, vagy pedig bizonyos paraméterek szerint sorbafejtik. Az ilyen sorfejtés pontossága a paraméterek különböző értékénél más és más, és vannak olyan tartományok, ahol egyáltalában nem használható. Ebben a munkában a harmadfokú szekuláris egyenlet megoldására olyan sorfejtést fogunk alkalmazni [2], amely a paraméterek különböző értékeinél is kielégítő közelítést ad.

A szekuláris egyenlet általános alakja:

$$\begin{vmatrix} W_1-W & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & W_2-W & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & W_3-W \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

ahol $H_{ik} = H^*_{ki}$. Helyettesítsük be a gyökök helyébe a következő kifejezést

$$W = w + \frac{W_1+W_2+W_3}{3} \qquad (2)$$

Ezzel kettős célt érünk el: egyfelől azt, hogy a szekuláris determinánsban a perturbálatlan értékeknek csak a *különbségei* fordulnak elő, másfelől pedig azt, hogy a kifejtett harmadfokú egyenletben másodfokú tag nem szerepel. Így nyerjük, hogy

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}(W_{12}+W_{13})-w & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & \frac{1}{3}(W_{23}+W_{21})-w & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & \frac{1}{3}(W_{31}+W_{32})-w \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

ahol

$$W_{ik} = W_i - W_k \qquad (4)$$

A determináns kifejtése után egyenletünk a következő alakot ölti:

$$w^3 - aw + b = 0 \qquad (5)$$

ahol

$$a = \sum_{ik} \left[\frac{W^2{}_{ik}}{6} + \left| H_{ik} \right|^2 \right] \qquad (i,k) = (1,2), (2,3), (3,1)$$

$$b = \frac{1}{3} \sum_{ikl} \left\{ \left[\left(\frac{W_{ik}}{3} \right)^2 + \left| H_{ik} \right|^2 \right] \left(W_{li} + W_{lk} \right) - 2\, R \left(H_{ik} H_{kl} H_{li} \right) \right\} \qquad (6)$$

$$(i,k,l) = (1,2,3)\,(2,3,1)\,(3,1,2)$$

és $R\,(H_{ik} H_{kl} H_{li})$ a $H_{ik} H_{kl} H_{li}$ szorzat reális részét jelenti.

Tegyük fel, hogy (7)

$$w = \sum_{n=o}^{\infty} w_n\, y^n\ , \text{ és } b = b_1 y \qquad (8)$$

Behelyettesítve ezen értékeket (5)-be, a megoldandó harmadfokú egyenlet y polinomjává alakul át:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \left[\sum_{k=o}^{n} \sum_{l=o}^{n-k} w_{n-(k+l)}\, w_k\, w_l - a\, w_n \right] y^n + b_1 y = O \qquad (9)$$

Ez az egyenlőség y minden értékénél csak akkor lehet zérus, ha y minden hatványának együtthatója külön-külön eltűnik. E feltételek rekurziós formulákra vezetnek, melyekből

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= -a^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{2a} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{2n} \binom{\frac{3}{2}n - \frac{5}{2}}{n-1} \frac{b^n}{a^{\frac{1}{2}}\,(3n-1)} \\ w_2 &= \frac{b}{a} + \sum_{n=2}^{\infty} [1-(-1)^n]\, \frac{3}{2n} \binom{\frac{3}{2}n - \frac{5}{2}}{n-1} \frac{b^n}{a^{\frac{1}{2}}\,(3n-1)} \\ w_3 &= a^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{2a} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{2n} \binom{\frac{3}{2}n - \frac{5}{2}}{n-1} \frac{b^n}{a^{\frac{1}{2}}\,(3n-1)} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

A (10) sor konvergenciájának vizsgálata azt mutatja, hogy a sor akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\left| \frac{3^{3/2}}{2} \frac{b}{a^{3/2}} \right| \leq 1 \qquad (11)$$

Szekuláris egyenlet esetében ez a feltétel mindig ki van elégítve, mivel (11) identikus a

$$\frac{b^2}{4} + \frac{(-a)^3}{27} \leq O \qquad (12)$$

egyenlőtlenséggel, amely a gyökök valós voltának feltétele. Szekuláris egyenletnek pedig, mint ismeretes, csak valós megoldásai vannak. A (10) sor tehát szekuláris egyenlet esetében mindig konvergens.

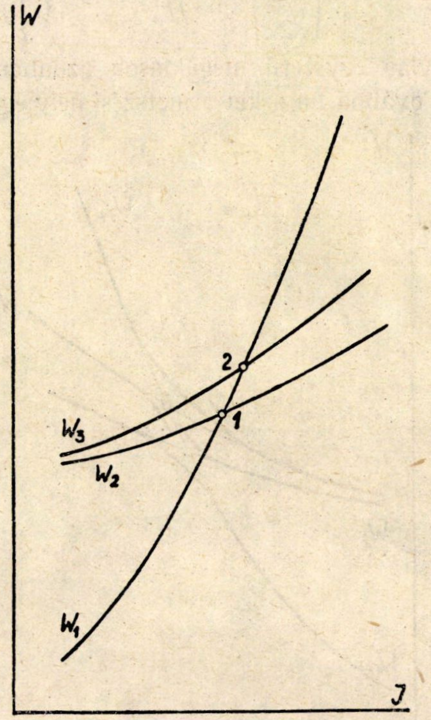
Megtartva (10)-nek az első két tagját, és felhasználva a (6) és a (2) egyenletet, a kiindulásul szolgáló (1) szekuláris egyenlet közelítő megoldására a következő kifejezések adódnak:

$$\left.\begin{aligned}
W_1' &= \tfrac{1}{3}\sum_i W_i - \sqrt{\sum_{ik}\left[\frac{W^2_{ik}}{6} + \left|H_{ik}\right|^2\right]} - \\
&- \frac{\tfrac{1}{6}\sum\limits_{ikl}\left\{\left[\left(\frac{W_{ik}}{3}\right)^2 + \left|H_{ik}\right|^2\right]\left(W_{li} + W_{lk}\right) - 2R\left(H_{ik}H_{kl}H_{li}\right)\right\}}{\sum\limits_{ik}\left[\frac{W^2_{ik}}{6} + \left|H_{ik}\right|^2\right]}, \\
W_2' &= \tfrac{1}{3}\sum_i W_i + \\
&+ \frac{\tfrac{1}{3}\sum\limits_{ikl}\left\{\left[\left(\frac{W_{ik}}{3}\right)^2 + \left|H_{ik}\right|^2\right]\left(W_{li} + W_{lk}\right) - 2R\left(H_{ik}H_{kl}H_{li}\right)\right\}}{\sum\limits_{ik}\left[\frac{W^2_{ik}}{6} + \left|H_{ik}\right|^2\right]} \\
W_3' &= \tfrac{1}{3}\sum_i W_i + \sqrt{\sum_{ik}\left[\frac{W^2_{ik}}{6} + \left|H_{ik}\right|^2\right]} - \\
&- \frac{\tfrac{1}{6}\sum\limits_{ikl}\left\{\left[\left(\frac{W_{ik}}{3}\right)^2 + \left|H^2_{ik}\right|^2\right]\left(W_{li} + W_{lk}\right) - 2R\left(H_{ik}H_{kl}H_{li}\right)\right\}}{\sum\limits_{ik}\left[\frac{W^2_{ik}}{6} + \left|H_{ik}\right|^2\right]}
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

ahol $(i, k, l) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ lehet.

Ezen általános formulák a tárgyalt probléma speciális természetétől függetlenek, ami nemcsak a levezetésből tűnik ki, hanem az egyes determináns elemeknek a formulákban való szimmetrikus előfordulásából is; a formulákban semmiféle kölcsönhatást nem tüntettünk ki. A formulák pontossága további tagok figyelembevételével tetszés szerinti módon fokozható. Ha a (13) formulákat valóban új tagokkal óhajtjuk kiegészíteni, nem kell új kifejezéseket kiszámítani: az újabb tagok számlálójában és nevezőjében ugyanazok a kifejezések fordulnak elő, mint a (13) formula utolsó tagjában, csak más kitevővel és más numerikus faktorral.

Az így nyert megoldásról könnyen ki lehet mutatni, hogy az nem más, mint a harmadfokú egyenlet trigonometrikus megoldásának Mac—Laurin-sora.[2] Az itt közölt eljárás azonban minden további nélkül alkalmazható magasabb fokszámú általános egyenletek esetére is, ahol már a trigonometrikus megoldások nincsenek.[2a] Magasabb fokszámú egyenleteknél esetenként kell eldönteni, miszerint fejtsünk sorba ahhoz, hogy a nyert rekurziós egyenletek egy-



1. ábra.
A perturbálatlan termek menete két átmetszési pont esetén.

szerűen megoldhatók legyenek. Negyedfokú egyenlet eseténél pl. az elsőfokú tag együtthatója mutatkozik e célra legmegfelelőbbnek.

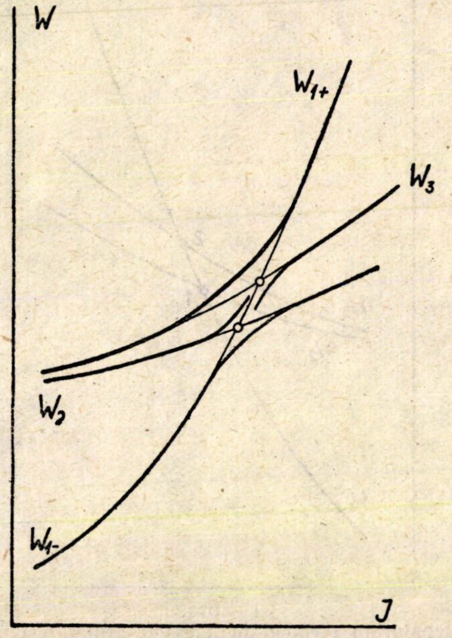
3. §. *Alkalmazások.* A (13) megoldások alkalmazhatóságát egy molekula-spektroszkópiai példán fogjuk illusztrálni, ahol a három perturbálatlan term és a matrix-elemek a J rotációs kvantumszám függvényei. A példa arra is alkalmas lesz, hogy az eddig használt eljárások hátrányait bemutassuk. Tekintsük azt az esetet, amikor ugyanazon multiplett-term két komponensét egy harmadik tetszés szerint futó term perturbálja. (l. 1. ábra) Ilyen probléma lép fel többek között például a ${}^1\Pi - {}^3\Sigma^{\pm}$ perturbációnál az azonos szimmetriájú komponensek között. Ebben az esetben a szekuláris egyenlet alakja a következő:

$$\begin{vmatrix} W_1 - W & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & W_2 - W & 0 \\ H_{31} & 0 & W_3 - W \end{vmatrix} = 0 \qquad (14)$$

Az eddigiekben szokásos legegyszerűbb megoldási módszer abban állt, hogy a (W_1, W_2) átmetszés környezetében a H_{13} matrixelemet, a (W_1, W_3) átmetszés környezetében a H_{12} matrixelemet elhanyagoljuk. Így a perturbált termek értékei az első, illetve a második átmetszés helye környezetében első közelítésben egy-egy másodfokú egyenlet megoldásából adódnak.[3] Lesz tehát

$$\begin{matrix} W_i' \\ W_k' \end{matrix} = \frac{W_i+W_k}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{W_{ik}}{2}\right)^2 + \left|H_{ik}\right|^2} \qquad (i,k) = (1,2) \text{ ill. } (3,1) \qquad (15)$$

Ezek a viszonylag egyszerű megoldások azonban nem minden helyen adnak jó közelítést. Továbbá, ha a két átmetszési hely egymáshoz közel fekszik,



2. ábra.
A perturbált termek menete a (15) formulák szerint. W'_{1+} ill. W'_{1-} termek a (15) formulákból adódó W'_1 értékeknek felelnek meg, ha ott + ill. — előjeleket vesszük figyelembe.

a (15) kifejezések a közbenső tartományban egyáltalában nem használhatók, mert az elhanyagolások, amelyek alapján e kifejezéseket nyertük, ott nincsenek megengedve. A W_i termek menetét a (15) formula alapján a második ábrán sematikusan ábrázoltuk.

Látható, hogy a W_2 és a W_3 görbék nem futnak össze egyetlen görbébe, ami azt eredményezi, hogy a két átmetszés közötti tartományban a perturbált termre két értéket is kapunk, melyek közül bizonyos ,hogy egyik sem jó. Mindez egybehangzásban van a közbenső tartományt illető fenti megjegyzésünkkel.

A harmadfokú szekuláris egyenletet még más módon is visszavezethetjük másodfokúra. Jobb közelítést érhetünk ugyanis el, ha az összes matrixelemet megtartjuk ugyan, de közelítőleg $W_3—W$ helyett $W_3—W_1$-et írunk a (W_1, W_2) átmetszés helye környékén, illetve $W_2—W$ helyett $W_2—W_1$-et írunk a (W_1, W_3) átmetszés helye környékén.

Ez a módszer még tovább finomítható olymódon, hogy W értékét mindig azon W_1 értékkel pótoljuk, amelyről már előre tudjuk, hogy a keresett W értékhez a legközelebb esik.[4] W értéke tehát az átmetszés helye előtt és után mindig más és más értékkel helyettesítendő. Így nyerjük a következő közelítő megoldásokat:

$$\begin{matrix} W'_i \\ W'_k \end{matrix} = \frac{W_i + W_k}{2} - \frac{|H_{il}|^2}{2\,W_{lr}} \mp \sqrt{\left[\frac{W_{ki}}{2} + \frac{|H_{il}|^2}{2\,W_{lr}}\right]^2 + \left|H_{ik}\right|^2} \qquad (16)$$

ahol $(i, k, l) = (1, 2, 3)$. Ha $(i, k, l) = (1, 3, 2)$, akkor a $\mp$ jel $\pm$ jellel pótlandó. Aszerint, hogy a perturbált term W_i, ill. W_k-hoz fekszik közelebb, $r = i$ ill. k.

Ennek az eljárásnak két hátránya van: először is nyolc formulát ad, melyek közül a perturbáció különböző tartományaiban mindig a három legjobbat kell kiválasztanunk, másfelől ehhez a kiválasztáshoz a perturbált term menetének előzetes ismerete szükséges, amit pedig éppen a (14) egyenlet megoldásából kell kapnunk. Megtehetjük azt is, hogy állandóan $r = i$-t írunk, ekkor csak négy formulát kapunk, azonban az így nyert formulák kevésbbé alkalmasak a használatra, mivel szingularitások (pólusok) lépnek fel, ami a szinguláris helyektől még viszonylag nagy távolságban is csökkenti a pontosságot.

Egy harmadik megoldási módszer abban áll, hogy egyenletünket az algebrai egyenletek megoldására szolgáló jólismert Newton—Fourier-módszer alapján tárgyaljuk, azzal a különbséggel, hogy a közelítő görbéül szolgáló érintők helyett minden gyökre egy oszkuláló parabolát alkalmazunk.[2] Ha a szokásos módon érintőket alkalmaznánk, akkor a Schrödinger-féle perturbációs formula második közelítését kapnók, amely, mint ismeretes, éppen olyan esetekben mondja fel a szolgálatot, amikor a termértékek egymás közelébe kerülnek, vagy éppen átmetszik egymást.

Az említett módon nyert formulák lényegében ugyanolyan szerkezetet mutatnak, mint (16). Itt hat gyök közül kell kiválasztani az éppen odaillőt és a kiválasztás itt is függ J értékétől s többek között az átmetszés helye előtt és után más és más formula veendő. Ezenkívül, eltekintve attól, hogy a formulák (16)-nál valamivel bonyolultabbak, nem adnak annál nagyobb pontosságot.

Ha azonban megoldásul a (13)-as formulákat választjuk (melyek alakja $H_{23} = O$ miatt most valamivel egyszerűbb lesz), akkor itt minden ágnak egyetlen formula felel meg, úgy, hogy a perturbált termek menetéhez azoknak előzetes ismerete nem szükséges. Annak kimutatására, hogy itt a perturbált termek a perturbálatlanokhoz helyesen vannak hozzárendelve, alkalmazzuk a következő közelítéseket:

Az első átmetszési helytől balra nagy távolságban nyilván írható

$$|W_{13}| \sim |W_{12}| \gg |W_{23}| \sim O \qquad (17)$$

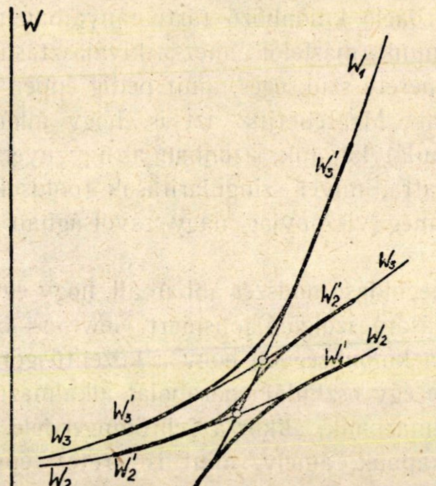
$$|H_{12}|^2 \sim |H_{31}|^2 \ll |W_{13}|^2 \sim |W_{12}|^2$$

Ha ezenkívül a gyökök kifejezésében előforduló egyik 3-as helyett 81/25-öt írunk, akkor az említett tartományra nézve ezt kapjuk:

$$W_1' \sim \frac{W_1+2W_3}{3} - \sqrt{\frac{(W_3-W_1)^2}{\frac{81}{25}}} - \frac{(W_3-W_1)}{9} = W_1 \qquad (18)$$

$$W_2' \sim \frac{W_1+2W_3}{3} + \frac{2\,(W_3-W_1)}{9} = W_3 + \frac{W_1-W_3}{9} \sim W_3$$

$$W_3' \sim \frac{W_1+2W_3}{3} + \sqrt{\frac{(W_3-W_1)^2}{\frac{81}{25}}} - \frac{W_3-W_1}{9} = W_3 - \frac{W_1-W_3}{9} \sim W_3$$



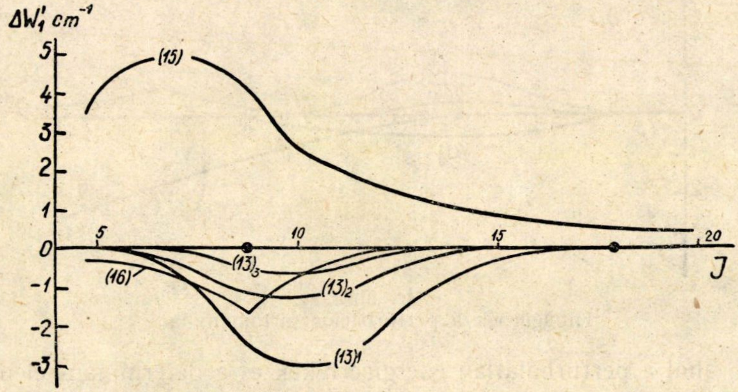
3. ábra.
A perturbált termek menete a (16) formulák szerint.

(Mivel $W_2 - W_3$-at írtunk, természetesen W'_2 és W'_3 ugyanazon közelítő értékekhez vezet.) Hasonló módon a második átmetszési helytől nagy távolságban jobbra nyerjük a következőket:

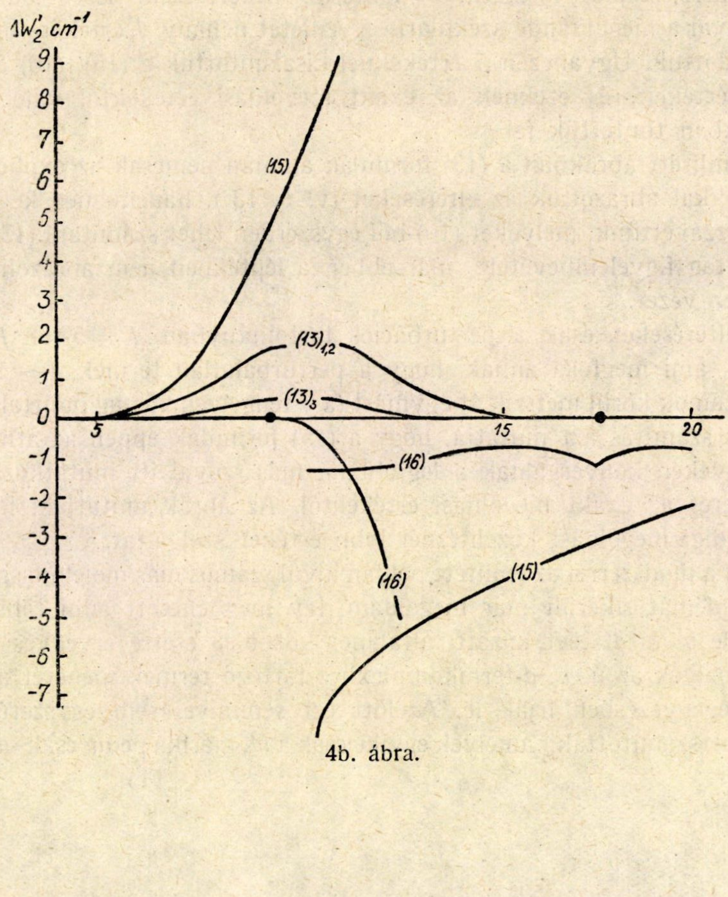
$$W'_1 \sim W_3 \; ; \; W'_2 \sim W_3 \; ; \; W'_3 \sim W_1 \qquad (19)$$

Ezek a hozzárendelések azt mutatják, hogy a (13)-as formulából nyert megoldások a termek menetét a valóságos viszonyoknak megfelelően állítják elő, amint ez a 3. ábrából is látható.

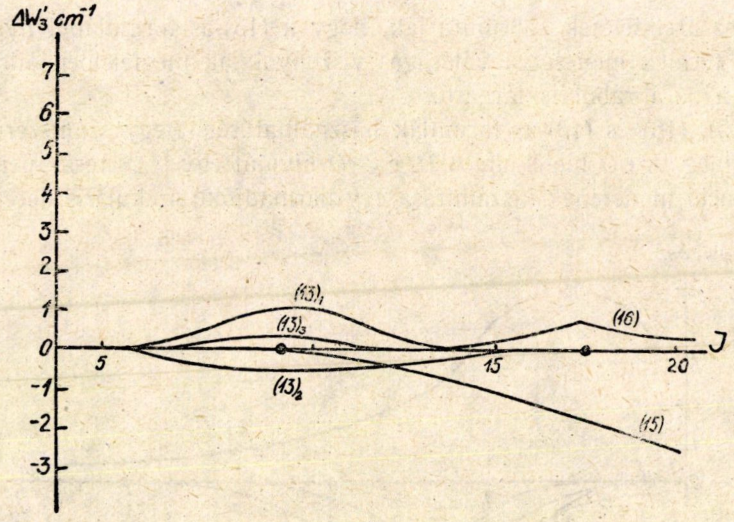
A (15), (16) és (13)-as formulák használhatóságát egy számszerű példán mutatjuk meg. A CO molekula $A^1\Pi$, $v = 0$ nívóját egy $|^3\Sigma^-$ term perturbálja. A perturbáció menetének kiszámítása egy harmadfokú szekuláris determináns-



4a. ábra.



4b. ábra.



4c. ábra.
Hibagörbék a perturbációs tartományban.

hoz vezet, ahol a perturbálatlan energiaértékek és a determináns elemek J-től való függése elméletileg pontosan megadható. Az itt szereplő egyéb állandók pedig spektroszkópiai mérésekből pontosan ismeretesek. Ezen adatok felhasználásával a megoldandó szekuláris egyenletet néhány J értékére numerikusan megoldottuk. Ugyanezen J értékeknél kiszámítottuk a (15), (16) és (13)-as formulák értékeit, és ezeknek az exakt megoldási értékektől való eltérését a 4. ábrákban tüntettük fel.

Az említett ábrákban a (13) formulák alapján nemcsak az explicite megadott tagokkal ábrázoltuk az eltéréseket (v. ö. 13_1), hanem még két további tagot is hozzávettünk, melyeket (10)-ből egyszerűen lehet számítani (13_2 és 13_3). Még több tag figyelembevétele már ebben a léptékben nem ábrázolható kis eltérésekhez vezet.

Az eltéréseket csak a perturbációs tartományban $J = 5$-től $J = 20$-ig ábrázoltuk, ami megfelel annak, hogy a perturbálatlan termek $J \sim 9$, ill. 18 kvantumszámok körül metszik át egymást (a J tengelyen vastag ponttal jelölve). A részletes számítás azt mutatja, hogy a (15) formulák éppen az átmetszések helye környékén konvergálnak a legjobban, más szóval itt mutatkozik a legkisebb eltérés az exakt megoldási értékektől. Az ábrák mutatják, hogy (13) minden eddigi megoldási közelítésnél jobb értéket szolgáltat.

Ezzel a módszerrel az említett példán kívül számos más molekulaspketroszkópiai problémát sikerült már megoldani. Így meg lehetett adni többek közt a Hund-féle b' és d' eset közötti általános közbülső esetre érvényes termformulákat, melyek az ú. n. d-termkomplexhez tartozó termek menetét a tapasztalással megegyezésben írják le. Azelőtt ezt semmivel sem egyszerűbb más formulákkal számították, amelyek egyike csak a b', másika pedig csak a d' eset közvetlen közelében volt érvényes. A termértékek ismeretében meg lehetett adni az intenzitáseloszlásra érvényes explicit formulákat, amelyek addig szintén nem voltak ismeretesek. Ugyancsak sikerült kiszámítani az említett közbülső esethez tartozó termek Zeeman-effektusát is, amely addig szintén csak a *b'* és *d'* esetek közvetlen közelében érvényes bonyolult formulák alapján volt tárgyalható. Mindez a He_2 molekula $4d$-termkomplexén került bemutatásra, ahol a kísérleti adatokkal igen jónak mondható megegyezés mutatkozott.[5] Ezeken kívül még számos más probléma esetén bizonyult a módszer alkalmazhatónak.

Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézete,
Spektroszkópiai Osztálya.

IRODALOM

[1] *Hill E. L., Van Vleck J. H.:* Phys. Rev. *32* (1928), 261 ; *Dieke G. H.:* ZS. f. Phys. *57* (1929), 77. — *Kronig, de L., R. Fujioka Y.:* ZS. f. Phys. *63* (1930), 172. — *Fujioka Y.:* ZS. f. Phys. *63* (1930), 182. — *Knipp J. K.:* Phys. Rev. *47* (1935), 674. — *Ittmann G. P.:* ZS. f. Phys. *71* (1931), 622. — *Stepanov B. I.:* Journ. of Phys. (U. S. S. R.), *2* (1940), 89 ; *2* (1940), 382. — *Nevin T. E.:* Proc. of Roy. Irish Ac. *50 (A)* (1945), 124.

[2] *Kovács I.* és *Singer S.:* Phys. ZS. *43* (1942), 362—371.

[2a] l. pl. *Pólya G., Szegő G.:* Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I. (1924). 301.

[3] *Ittmann G. P.:* Zs. f. Phys. 71 (1931), 616. — *Budó Á.* és *Kovács I.:* ZS. f. Phys. *109* (1938), 393 ; *111* (1939), 633. — *Kovács I.:* ZS. f. Phys. *111* (1939), 640.

[4] *Stepanov B. I.:* Journ. of Phys. (U S S R) *2* (1940), (1), 89.

[5] *Kovács I.* és *Budó A.:* Hung. Act. Phys. *1* (1949), (4), 1.