A POISSON-ELOSZLÁS PROBLÉMAKÖRÉRŐL

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta az 1950. november 30-án tartott osztályülésen

A valószínűségszámítás az elmult néhány évtizedben hatalmas fejlődésen ment keresztül. Elsősorban szovjet matematikusoknak, *Sz. N. Bernsteinnek*, *A. J. Hincsinnek*, *A. N. Kolmogorovnak* és követőinek köszönhetjük, hogy az orosz valószínűségszámítási iskola, továbbfejlesztve *P. L. Csebisev*, *A. A. Markov* és *A. M. Ljapunov* hagyományait, a valószínűségszámítás szilárd elvi alapjait megteremtette, és átfogó horderejű módszereket dolgozott ki. Munkásságuk nyomán, amely világszerte nagyszámú követőre talált, a valószínűségszámítás elszigetelt részleteredmények összeségéből összefüggő, mély elméletté alakult. A valószínűségszámítás ma is rohamosan fejlődik tovább, és minden újabb eredménye a megoldatlan problémák tucatját veti fel, de már jelenlegi fejlődési fokán is a matematika egyik legfontosabb fejezetévé vált általános elvi szempontból is, különösen pedig gyakorlati alkalmazásainak széleskörű skálája folytán, és jelentősége egyre növekszik. Az anyagi világ megismerésére és megváltoztatására irányuló törekvéseknek, a természettudományoknak, a valószínűségszámítás felbecsülhetetlen segédeszköze. Éppen ott nyujt segítséget, ahol más módszerek csődöt mondanak, a véletlen jelenségek területén. A valószínűségszámítás alkalmazhatósági köre azokat a természeti és társadalmi jelenségeket öleli fel, amelyeknél igen nagyszámú, külön-külön a véletlentől függő esemény összeségében pontos és szigorú érvényű törvényszerűségeket mutat fel. Ilyen jelenségekkel találkozunk a fizikában, a kinetikus gázelméletben, a Brown-féle mozgás vizsgálatánál, a rádióaktív bomlás, a kozmikus sugárzás, az elektroncsövek tanulmányozásánál, de ugyanúgy találkozunk ilyen jelenségekkel a csillagászatban a csillagoknak a térben való elhelyezkedésének, a napfoltoknak a vizsgálatánál, a geológiában, az időjárás és a csapadék ingadozásainak vizsgálatánál, a meteorológiában, a hidrológiában, és a természettudományok más területein. Ilyen jelenségekkel találkozunk az ipari tömegtermelés minőségi ellenőrzésével, a tüzérségi tűz irányításával kapcsolatban, a távközlés, a közlekedés problémáinak vizsgálatánál, és a társadalmi élet legkülönbözőbb jelenségeinek statisztikai feldolgozásával kapcsolatban. A laboratóriumi orvosi, biológiai kísérletezésnek, a mezőgazdasági kísérleteknek is nélkülözhetetlen segédeszköze a valószínűségszámítás. A valószínűségszámítás általános módszerei és eredményei a gyakorlati problémák százaiból, azok közös matematikai tartalmának kihámozása útján fejlődtek ki. Nincs még egy ága a matematikának, amelynek a gyakorlattal való szoros kapcsolata, termékeny kölcsönhatása, az emberiség szükségleteiből való kifejlődése olyan nyilvánvaló volna, mint a valószínűségszámítás. A valószínűségszámítás fejlődését hosszú ideig hátráltatta alapfogalmainak tisztázatlansága. Több kísérlet történt a valószínűségszámítás elvi alapjainak tisztázására. Azok a kísérletek, amelyek a valószínűség fogalmának hamis, szubjektív idealista, felfogását vették alapul mint például *B. de Finetti*, vagy machista értelmezéséből indultak ki, mint például *R. v. Mises* és követői, szükségképpen zsákutcába vezettek.[1,2] A valószínűségszámítás elvi kérdéseinek objektív, materialista tisztázását és a valószínűségszámítás matematikailag exakt megalapozását *Kolmogorov* korszakalkotó munkásságának köszönhetjük.[3] *Kolmogorov* és a szovjet valószínűségszámítási iskola eredményei következtében ez a probléma ma már lényegében megoldottnak tekinthető, és az alapok tisztázása lehetővé tette a valószínűségszámítás zavartalan fejlődését. Mint ismeretes, a valószínűségszámítás matematikailag szabatos megalapozása a valós függvénytan és a halmazelmélet, pontosabban a mértékelmélet segítségével sikerült. Az ezirányú kutatások oly mértékben magukra vonták a matematikusok figyelmét, hogy sokan a valószínűségszámítás »belső« problémái felé fordultak, és ezáltal elfordultak a valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazásainak aktuális problémáitól. Ez kétségtelenül szükséges folyamat volt, és bár még ma is sok megoldatlan »belső« problémája van a valószínűségszámításnak, nem volna helyes, és nem vinné előre a fejlődést, ha ez a helyzet állandósulna, és a kutatók továbbra is a valószínűségszámítás matematikai alapjainak csiszolására helyeznék a fő súlyt. A valószínűségszámítás további fejlődését — amint azt *A. N. Kolmogorov* az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásában kifejtette — az viszi leginkább előre, ha a valószínűségszámítás művelői fordulatot hajtanak végre a gyakorlati problémák felé. Valóban az a helyzet, hogy bár egy átfogó valószínűségszámítási elmélet alapjai és körvonalai ma már teljesen tisztán állnak előttünk, a gyakorlati alkalmazások terén még igen gyakran elavult, vagy az általános elmélettől elszakadt, ad hoc módszereket használnak, és az átfogó egységes szempontok hiányoznak. Legjobb példa erre a statisztikus fizika (beleértve mind a klasszikus, mind a kvantumstatisztikát), ahol a legutóbbi időkig fogalmilag zavaros és matematikailag kezdetleges módszerekkel operáltak, amíg a legutóbbi években *A. J. Hincsin*[4,5] meg nem mutatta hogyan lehet ezeket a kérdéseket a valószínűségszámítás mai fejlett módszereivel teljesen világos és matematikailag szabatos módon tárgyalni. Ezzel kapcsolatban röviden ki kell térnem a matematikai statisztika mai helyzetére is. A nyugati, különösen az angolszász államokban a matematikai statisztika hangadó képviselői a matematikai statisztikát a valószínűségszámítástól elválasztva igyekeznek fejleszteni. Bár kétségtelenül sok értékes részleteredményt értek el, eredményeik megbízhatóságát nagymértékben csökkenti az elvi tisztázatlanság, különösen az egyes módszerek alkalmazhatósági határai vizsgálatának szinte teljes elhanyagolása. A zavart még fokozza, hogy azokat a szakembereket, orvosokat, biológusokat, akik a matematikai statisztika módszereit a maguk területén alkalmazzák, a matematikai statisztikának ezek a szakemberei nemcsak hogy nem intik óvatosságra, hanem inkább bátorítják az elvi kérdések elhanyagolására. Ez pedig arra vezet, hogy a matematikai statisztika módszereit igen gyakran kritika nélkül, kontár módra alkalmazzák, és így helytelen következtetésekre jutnak, ami e tudományok fejlődését gátolja. Hogy csak egy közismert példát említsek, az úgynevezett »szignifikáns differencia« módszere, amely annak eldöntésére szolgál, hogy egy kísérletsorozat eredményei közötti eltérés véletlen vagy szisztematikus jellegű, az orvostudományi kutatásnak hazánkban is mindennapi kenyerévé vált, de csak kevesen tudják és veszik figyelembe, hogy ez a módszer csak normális, vagy legalábbis közelítőleg normális eloszlás és független kísérletek esetében jogosult. Általában a leggyakoribb hibák közé tartozik a matematikai statisztika gyakorlati alkalmazásai terén az, hogy nem vizsgálják meg kellő körültekintéssel, vajjon a vizsgált eloszlás normálisnak tekinthető-e, a normális eloszlás fogalmát misztifikálják és ott is alkalmazzák, ahol ez nem indokolt. Hasonlóképpen nem vizsgálják meg elég alaposan, hogy a függetlenség feltevése hol és milyen mértékben jogosult és kevésszámú adatból indokolatlanul messzemenő következtetéseket vonnak le ("kis minták" elmélete.) A Szovjetunióban kialakult matematikai statisztikai iskola mentes ezektől a hibáktól, és mentes attól a hamis, tudománytalan felfogástól, amely a matematikai statisztikát különválasztja a valószínűségszámítástól. Nem kisrészben ennek tulajdoníthatók a szovjet matematikusok ragyogó eredményei ezen a területen. Valójában az a helyzet, hogy a matematikai statisztika nem önálló tudomány, hanem a valószínűségszámítás szerves része, nem állhat meg az általános elmélet nélkül, amely éppen arra szolgál, hogy az egyes statisztikai módszerek alkalmazhatósági körét és érvényességi határait tisztázza; a valószinűségszámítástól elszakitva a matematikai statisztika csak kontársághoz, tudományhamisításhoz vezethet. Amikor *Kolmogorov* útmutatását követve azt hangsúlyoztam, hogy a valószínűségszámítás kutatói előtt ma az a feladat áll, hogy a megteremtett szilárd matematikai alapokat elsajátítva és azokból kiindulva a gyakorlati alkalmazások irányába forduljanak, és az ott alkalmazott módszereket igyekezzenek kritikailag felülvizsgálni, rendszerezni és továbbfejleszteni, ez a programm magában foglalja a matematikai statisztika és a valószínűségszámítás között emelt mesterséges fal ledöntését is. Széles perspektívájú, nagy és komoly munkát kivánó programm az, amely a valószínűségszámítás terén dolgozó matematikusok előtt áll. Megvalósításában az élenjáró szovjet valószínűségszámítási iskola oldalára fel kell sorakozni a valószínűségszámítás hazai művelőinek is, különös tekintettel arra, hogy ötéves tervünk megvalósítása, iparunk, természettudományi kutatásunk fejlesztése hazánkban is tömegével veti fel a valószínűségszámítási módszereket igénylő problémákat.

Ezekkel a kérdésekkel ma még csak egy kislétszámú csoport foglalkozik, a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetében. Ennek a csoportnak ki kell bővülnie, és fiatal kutatókkal kiegészülve, tudását elmélyítve kell dolgoznia, hogy a rá váró feladatokat eredményesen tudja megoldani.

A valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazásai terén két problémakör válik el egymástól meglehetősen élesen, bár természetesen ezt a két problémakört számtalan szál fűzi egymáshoz. Az első problémakör, amelyben a normális (Gauss—Laplace-féle) eloszlás játszik központi szerepet, véletlentől függő folytonos mennyiségekkel, folytonos valószínűségi változókkal foglalkozik. A másik problémakör, amelyben a megfelelő központi szerepet a Poisson-féle eloszlás tölti be, véletlen eseményekkel, azok bekövetkezésének számával, tehát egész értékű, diszkrét valószínűségi változókkal foglalkozik. Elméleti szempontból a két fejezet közül az első sokkal kidolgozottabb, de éppen ezért fontos a második említett problémakör fejlesztése, különös tekintettel annak gyakorlati alkalmazásaira. Mai előadásom célja képet adni erről a problémakörről, legalábbis néhány alapvető kérdéséről, érintve azok egynéhány gyakorlati alkalmazását is.

Amint mondottam, az említett két problémakört sok szál kapcsolja össze, így például mind a Gauss-Laplace-féle, mind a Poisson-féle eloszlás történetileg először a binomiális eloszlás határeseteiként léptek fel. Mint ismeretes, ha ξ-vel jelöljük azt, hogy egy p valószínűségű A esemény n független kísérlet közül hányszor következett be, annak a valószínűségét, hogy a ξ valószínűségi változó értéke egy k egész szám legyen $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ a

$$B_n(k, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{1}$$

képlet adja meg, ahol $q = 1 - p$; a ξ változóról azt mondjuk, hogy binomiális eloszlással bír. Könnyen belátható, hogy ξ középértéke (várható értéke) np, szórása $\sqrt{npq}$. Ez azt jelenti, hogy ξ-nek np-től való eltérése igen nagy n mellett $\sqrt{npq}$ nagyságrendű. Ezt az állítást még precízebbé lehet tenni és egyszerű számolással ki lehet mutatni, hogy annak a valószínűsége, hogy ξ értéke $np + a\sqrt{npq}$ és $np + b\sqrt{npq}$ közé essék, konvergál a

$$G(b) - G(a) \tag{2}$$

határértékhez, ahol

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{3}$$

az ú. n. Gauss-Laplace-féle vagy normális eloszlásfüggvény. Másszóval

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{a \leq \frac{k-np}{\sqrt{npq}} < b} B_n(k, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{4}$$

Ez az állítás a legrégebben ismeretes és legegyszerűbb speciális esete a valószínűségszámítás ú. n. centrális középértéktételének. Ebben a formában *A. Moivre*[6]-tól származik. A centrális középértéktételnek e globális formája mellett ismeretes egy lokális formája is, mégpedig

$$B_n(k, p) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} \tag{5}$$

Kevésbbé ismeretes, hogy (4) akkor is érvényes, ha ugyanakkor, amikor $n \to \infty$, $p \to 0$, de oly módon, hogy $np \to \infty$. Ha azonban p úgy tart zérushoz, miközben n minden határon túl nő, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} ap$ egy pozitív λ számmal egyenlő, akkor

$$\lim_{n \to \infty} B_n(k, p) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P(k, \lambda) \tag{6}$$

Az így határértékként nyert eloszlást nevezik Poisson-féle eloszlásnak. A binomiális eloszlás középértéke np és szórásnégyzete $npq = np - np^2$ is konvergálnak a Poisson-eloszlás középértékéhez, illetve szórásnégyzetéhez, és mindkettőnek értéke λ. Ez egyébként a Poisson-eloszlásnak egy jellemző (bár önmagában természetesen távolról sem elégséges) ismertetőjele, hogy tudniillik a középérték és szórásnégyzet számértékben megegyeznek.

A Poisson-féle eloszlást a fenti módon, mint a binomiális eloszlás határesetét *Poisson* fedezte fel[7], jelentőségét azonban nem ismerte fel. Ez elsősorban *L. v. Bortkiewitz*[8] érdeme, aki rámutatott a Poisson-eloszlás széleskörű alkalmazhatóságára a ritka jelenségek statisztikájánál. *Bortkiewitz* a Poisson-féle határértéktételt a kis számok törvényének nevezte el, szembeállítva a centrális középértéktétellel, amelyet régebben a nagy számok törvényének neveztek — ma ez az elnevezés egy *Bernouillitól* származó és lényegesen kevesebbet mondó tételcsoportra szállt át, azokra a tételekre, amelyek a gyakoriságnak a valószínűséghez való konvergenciájára vonatkoznak. Ez az elnevezés meglehetősen szerencsétlen. Itt valóban ritka eseményekről van szó ($p \to 0$), amelyek ennélfogva a kísérletek közül csak kis számban következnek be, azonban természetesen a Poisson-féle határelosztás éppen úgy, mint a Moivre-féle, csak a kísérletek igen nagy száma mellett tekinthető jó közelítésnek (hiszen feltettük, hogy $m \to \infty$). A Poisson-eloszlás problémakörét később *R. v. Mises*[9], *H. Pollaczek-Geiringer*[10], *Pólya György*[11], *A. J. Hincsin*[12], és mások fejlesztették tovább. Ma már tudjuk, hogy a Poisson-eloszlás jelentősége messze túlnő a binomiális eloszlás határesetenkénti fellépésén, továbbá, hogy csak speciális esete egy általánosabb diszkrét eloszláscsaládnak, amelyre vonatkozólag nemrégiben *Aczél Jánossal* és *Jánossy Lajossal* együtt folytattunk vizsgálatokat. Ezek eredményéről más alkalommal számolunk be.*

* Megjelenik az Acta Mathematica Acad. Sci. Hung. I. 2. számában.

A Poisson-eloszlásnak egy gyakori alkalmazását szeretném bemutatni, illetőleg megmutatni azt, hogy egy konkrét problémában hogyan lép fel a fent vázolt valószínűségszámítási séma. A probléma a telefontechnikából származik. Egy telefonközpontba változó, a t időtől függő időbeli sűrűséggel előre meg nem határozható, a véletlentől függő időpontokban érkeznek hívások. A hívások időbeli eloszlásáról a következő feltevéseket tesszük: annak a valószínűsége, hogy t és $t+\Delta t$ időpontok között hívás érkezzék, legyen $p(t)\,\Delta t + 0(\Delta t)$.* Annak a valószínűsége, hogy t és $t+\Delta t$ között 1-nél több hívás történjék, legyen Δt-nél kisebb nagyságrendű. Feltesszük továbbá, hogy a különböző időintervallumok alatt történő hívások egymástól függetlenek. Ezek a feltevések általánosabbak a telefontechnika irodalmában használatosaknál, ahol ugyanis fel szokták tenni, hogy a hívások időbeli sűrűsége az ú. n. csúcsforgalmi időben állandó. Keressük annak a valószínűségét, hogy 0 és t időpontok között pontosan k hívás érkezzék a központba; ezt a valószínűséget $P_k(t)$-vel fogjuk jelölni. Hogy ezt kiszámítsuk, osszuk fel a $(0, t)$ időszakaszt n egyenlő részre. Annak a valószínűsége, hogy az r-edik szakaszon hívás történjék, feltevésünk szerint $\sim p\left(\frac{rt}{n}\right)\frac{t}{n}$. Annak a valószínűsége, hogy az r-edik szakaszon ne történjék hívás, $\sim 1-p\left(\frac{st}{n}\right)\frac{t}{n}$. Ennélfogva annak a valószínűségét, hogy 0 és t között pontosan k hívás történik, közelítőleg a

$$\sum\left(\frac{t}{n}\right)^k p\left(\frac{r_1 t}{n}\right) p\left(\frac{r_2 t}{n}\right)\cdots p\left(\frac{r_k t}{n}\right)\cdot\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r_i\,(i=1,2,\ldots,k)}}^{n}\left(1-p\left(\frac{st}{n}\right)\frac{t}{n}\right) \tag{7}$$

összeg adja meg, ahol az összegezés kiterjed az összes, az

$$1,\ 2, \ldots,\ n$$

számok közül kiválasztható k tagú $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ kombinációkra. A (7) kifejezés azért csak közelítőleg egyenlő a keresett valószínűséggel, mert nem vettük figyelembe, hogy a részintervallumokon egynél több hívás is történhet. Ha azonban elvégezzük az $n\to\infty$ határátmenetet, akkor feltevéseink értelmében az ebből származó hiba 0-hoz tart, és így nyerjük, hogy a keresett valószínűség

$$P_k(t) = \frac{\left(\int\limits_0^t p(x)\,dx\right)^k}{k!}\,e^{-\int\limits_0^t p(x)\,dx} \tag{8}$$

másszóval, annak a valószínűsége, hogy a $(0, t)$ időtartamban pontosan k hívás történjék, Poisson-eloszlást követ. Ha a hívások időbeli sűrűsége állandó,

* $o(\Delta t)$ olyan függvényt jelöl, amelyre $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0$.

$$p(x) \equiv p, \text{ akkor } \int_0^t p(x)dx = pt \text{ és így}$$

$$P_k(t) = \frac{(pt)^k}{k!} e^{-pt} \tag{9}$$

ez a közismert Poisson-féle szothasztikus folyamat. Amennyiben már eleve feltesszük, hogy $p(x) \equiv p$, akkor a (7) összeg a következő alakú

$$\binom{n}{k} \left(\frac{pt}{n}\right)^k \left(1 - \frac{pt}{n}\right)^{n-k} \tag{10}$$

vagyis itt a Poisson-eloszlás a binomiális eloszlás határeseteként lép fel. Mielőtt tovább mennénk, megemlítem, hogy a Poisson-féle sztohasztikus folyamat alkalmazásaiban az idő szerepét a térfogat is átveheti, és ebben az interpretációban a Poisson-eloszlás egyrészt a csillagok térbeli eloszlását, másrészt kolloid oldatok sűrűségingadozásait írja le. Hasonlóképpen Poisson-eloszlást követnek a radioaktív bomlások, a katódból kilépő elektronok, a textilgépek fonalszakadásai is. Visszatérve a telefonhálózat kérdéseihez, a hálózatok és központok tervezésénél nemcsak a beszélgetések számát, hanem azok időtartamát is figyelembe kell venni. Ezzel kapcsolatban felmerül a következő probléma: ha a telefonközpontban a fent tárgyalt eloszlással érkeznek hívások, amelyeket a központ a rendelkezésre álló korlátlan számú szabad vonalakra irányít, ismerve a beszélgetések időtartamának (amely szintén valószínűségi változónak tekintendő) az eloszlását, meghatározandó annak valószínűsége, hogy a központ működésbe lépése után t idővel egyidejűleg pontosan k beszélgetés legyen folyamatban. A telefontechnikában általában azt szokták feltenni, hogy a beszélgetések időtartama exponenciális eloszlású, azaz, annak a valószínűsége, hogy a beszélgetés tartama τ-t ne haladja meg $F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$ Ezt a feltevést a tapasztalatok csak bizonyos közelítéssel igazolják. Távolsági beszélgetéseknél pl. egyáltalán nem felel meg a tényeknek. A feltevés jogosultságát illetőleg figyelemreméltó, hogy ezt a feltevést gyakorlati szakemberek általában elméletileg igyekeznek igazolni, olyan más feltevésekből, amelyeknek teljesülése szintén meglehetősen kérdéses. A helyzet valójában az, hogy a beszélgetések tartamának exponenciális eloszlására vonatkozó feltevést nem annyira a tapasztalatok, mint inkább az a meggondolás indokolja (már amennyire ezt indokolásnak lehet tekinteni), hogy a feltevés a valószínűségszámítási meggondolásokat matematikailag egyszerűbbé teszi. A következőkben az említett problémák tetszőleges beszélgetési eloszlásra fogjuk megoldani, a megoldás ilyen általánosságban tudomásom szerint az irodalomban nem ismeretes. A kapott képletek, exponenciális eloszlás feltevése mellett, speciális esetként tartalmazzák *T. Erlang* és *A. Jensen*[13], *T. C. Fry*[14], *C. Palm*[15] és mások eredményeit; ezek a szerzők az exponenciális eloszlást tételezik fel. Megjegyzendő, hogy az említett szerzők a problémát egy differenciálegyenletrendszerre vezetik vissza, és módszerük az általános esetben nem alkalmazható, ezzel szemben az alább közölt módszer teljesen elemi és ugyanakkor általános.

Jelentse $Q_k(t)$ annak a valószínűségét, hogy t időpontban pontosan k beszélgetés van folyamatban. A hívások időbeli eloszlására vonatkozólag ugyanazokat a feltevéseket tesszük, mint fentebb, és így a hívások Poisson-eloszlást követnek. Jelölje $F(x)$ annak a valószínűségét, hogy egy beszélgetés időtartama legfeljebb x, és legyen $\varphi(x) = 1 - F(x)$. Ugyanúgy, mint az előbbi bizonyításban, osszuk fel a $(0, t)$ intervallumot n egyenlő részre. Annak a valószínűsége, hogy t időpontban folyamatban legyen egy olyan beszélgetés, amely az r-edik részintervallumban (azaz $\frac{(r-1)t}{n}$ és $\frac{rt}{n}$ között) kezdődött, közelítőleg

$$p\left(\frac{rt}{n}\right)\varphi\left(t-\frac{rt}{n}\right)\frac{t}{n}, \tag{11}$$

míg annak a valószínűsége, hogy t időpontban nincsen folyamatban oly beszélgetés, amely az s-edik részint intervallumban kezdődött

$$1-p\left(\frac{st}{n}\right)\varphi\left(t-\frac{st}{n}\right)\frac{t}{n}. \tag{12}$$

Így tehát annak a valószínűsége, hogy t időpontban pontosan k beszélgetés legyen folyamatban, közelítőleg

$$\sum\left(\frac{t}{n}\right)^k\prod_{i=1}^{k} p\left(\frac{r_i t}{n}\right)\varphi\left(t-\frac{r_i t}{n}\right)\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r_i;\ i=1,2,\ldots,k}}^{n}\left(1-p\left(\frac{st}{n}\right)\varphi\left(t-\frac{st}{n}\right)\frac{t}{n}\right) \tag{13}$$

ahol az összegezés az összes, az $1, 2, \ldots, n$ elemek közül kiválasztható $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ k-adrendű kombinációkra terjed ki. Mint előbb, itt is azért csak közelítőleg adja meg a (13) a keresett valószínűséget, mert nem vettük figyelembe, hogy egy részintervallumban több beszélgetés is kezdődhet, azonban itt is az ebből származó hiba 0-hoz tart, ha $n \to \infty$ és így nyerjük, hogy

$$Q_k(t) = \frac{\left(\int_0^t p(x)\psi(t-x)\,dx\right)^k}{k!}\, e^{-\int_0^t p(x)\psi(t-x)\,dx} \tag{14}$$

Vagyis a t időben folyamatban levő beszélgetések száma is Poisson-eloszlást követ. A fenti levezetésben azt is feltehettük volna, hogy a beszélgetések időtartamának eloszlásfüggvénye függ a beszélgetés kezdetének időpontjától.

Ez esetben $\varphi(x)$ helyett egy $\varphi(x, t)$ függvényt kell bevezetnünk, amely annak a valószínűségét adja meg, hogy egy x időpontban kezdődő beszélgetés tartama $\geqq t$. Ez esetben a (14) képlet a következőképpen módosul:

$$Q_k(t) = \frac{\left(\int\limits_0^t p(x)\varphi(x, t-x)\,dx\right)^k}{k!} e^{-\int\limits_0^t p(x)\varphi(x, t-x)\,dx} \tag{15}$$

Másszóval abban az esetben is Poisson-eloszlást kapunk, ha nem tesszük fel, hogy a beszélgetés kezdetének időpontja és a beszélgetés tartama függetlenek.

Amint ez (14)-ből leolvasható, az eloszlás függ a t időponttól, azaz attól, hogy a központot a bekapcsolás után mennyi idővel vizsgáljuk. Ha $p(x)$ állandó, vagy legalábbis $\lim\limits_{x \to \infty} p(x)$ létezik, és a központ már elég hosszú ideje működik, kialakul egy egyensúlyi állapot, mely már az időtől független. Ez matematikailag abban fejeződik ki, hogy ha $t \to \infty$, akkor $Q(t)$ konvergál a

$$Q_k = \frac{(pm)^k}{k!} e^{-pm} \tag{16}$$

határértékéhez, ahol

$$m = \int\limits_0^\infty x\,d\,F(x) \tag{17}$$

a beszélgetések átlagos hossza, melyről feltesszük, hogy véges.

Meg kell még jegyeznünk, hogy ha a $p(x)$ függvény igen erős fluktuációkat mutat, akkor nem alakul ki »egyensúlyi állapot« ha $t \to \infty$. Pontosabban, ha

$$\lim_{s \to 0} s \int\limits_0^\infty p(x) e^{-sx}\,dx \quad \text{nem létezik és} \quad \lambda(t) = \int\limits_0^t p(x)\varphi(t-x)dx$$

akkor $\lim\limits_{t \to \infty} \lambda(t)$ sem létezhet.

Ugyanis legyen

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^\infty \lambda(t) e^{-st}\,dt = \Lambda(s), \\ &\int\limits_0^\infty p(x) e^{-sx}\,dx = \pi(s) \end{aligned} \tag{18}$$

és

$$\int\limits_0^\infty \varphi(x) e^{-sx}\,dx = \Phi(s),$$

akkor

$$\Lambda(s) = \Phi(s) \,.\, \pi(s).$$

Mivel

$$\Phi(o) = \int_o^\infty x \, d\, F(x) = m,$$

tehát

$$\lim_{s \to 0} s\Lambda(s) = m. \lim_{s \to 0} s\,\pi(s),$$

Ha tehát a $\lim\limits_{t \to \infty} \lambda(t) = \lambda$ határérték létezne, akkor

$\lim\limits_{s \to 0} s \int\limits_0^\infty \lambda(t) e^{-st} dt = \lambda$ volna, és így $\lim\limits_{s \to 0} s\,\pi(s) = \dfrac{\lambda}{m}$ határérték

szintén léteznék. Amennyiben $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, azaz a beszélgetések hossza exponenciális eloszlást mutat és $p(x) \equiv p$ állandó, úgy

$$Q_k(t) = \frac{\left(p\,\dfrac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}\right)^k}{k!} e^{-p\left(\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}\right)}, \tag{19}$$

és a $t \to \infty$ határesetben

$$\lim_{\to \infty} Q_k(t) = Q_k = \frac{(p/\lambda)^k}{k!} e^{-p/\lambda} \text{ (azaz itt } m = \frac{1}{\lambda}\text{)}. \tag{20}$$

Megjegyzendő, hogy ha (19)-ben $\lambda \to 0$, akkor

$$\lim_{\lambda \to 0} Q_k(t) = \frac{(pt)^k}{k!} e^{-pt} = P_k(t). \tag{21}$$

Ennek értelmezése a következő: Mivel $\frac{1}{\lambda}$ a beszélgetések átlagos időtartama, ha $\lambda \to 0$, akkor $\frac{1}{\lambda} \to \infty$, és végtelen hosszú beszélgetési idő esetében nyilván a t időben folyamatban levő beszélgetések száma megegyezik a 0 és t közötti hívások számával, hiszen minden 0 és t közt megkezdett beszélgetés a t időpontban is folyamatban van.

Fenti eredményeink nemcsak telefonproblémáknál alkalmazhatók, hanem más esetekben is. Még csak egy másik alkalmazást említek meg: elektroncsöveknél a katódból kilépő elektronok száma Poisson-eloszlást mutat, a kilépő elektronok sebességeloszlása szintén ismeretes. A kilépő elektron sebességtől, a cső geometriai adataitól és az anódfeszültségtől függ, hogy mennyi ideig tartózkodik az elektron a térben (az egyszerűség kedvéért diodák esetére szorítkozunk). Ezen adatok ismeretében kiszámítható annak az időtartamnak, mint valószínűségi változónak az eloszlása is, ameddig az elektron a katód és anód közti térben tartózkodik (futásidő). Ha most azt kérdezzük, hogy az elektroncső bekapcsolása után t idővel hány elektron lesz a katód és anód közötti térben, az előbb tárgyalt problémával matematikailag azonos problémára jutunk, és így fenti eredményeink erre a kérdésre is választ adnak, mégpedig a legáltalánosabb feltételek mellett.

Az elmondottakkal képet kívántam adni a valószínűségszámítás néhány gyakorlati alkalmazásáról és ezen belül a Poisson-féle eloszlással kapcsolatos kérdésekről. Az idő rövidsége miatt természetesen csak néhány kiragadott, de jellemző példa vázolására szorítkozhattam.[16]

Magyar Tudományos Akadémia,
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] Гнеденко Б. В.: Теория вероятностей и познание реального мира. Успехи математических Наук V. 1. (1950) 1–23.

[2] *Rényi A.:* A szovjet matematika 30 éve. I. A valószínűségszámítás megalapozásáról. Matematikai Lapok. I. (1) 27—64.

[3] *Kolmogorov, A.:* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse d. Math. u. Grenzgebiete II. (3) Berlin, 1933.

[4] Хинчин А. Я.: Математические основы статистической механики, Москва-Ленинград, 1943.

[5] Хинчин А. Я.: Об аналитическом аппарате физической статистики Труд. Мат. Инст. им. В. А. Стеклова, *33* (1950). 1–54. Статистическая механика как задача теории вероятностей, Успехи математических наук. V. 3. (1950) 3—46. Ez a két munka magyar fordításban is megjelent »Hincsin: A statisztikai mechanika analitikus módszerei« címen (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951, 96. o.)

[6] *de Moivre A.:* De Mensura Sortis, Phil. trans. *27.* (1711) 213—264.

[7] *Poisson S. D.:* Recherches sur la probabilité des jugements. 1837.

[8] *Bortkiewitz L. v.:* Das Gesetz der kleinen Zahlen, Leipzig, 1898.

[9] *Mises R. v.:* Über die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse. Zeitschrift f. angewandte Math. u. Mech. *1.* (1921) 121—124.

[10] *Pollaczek—Geiringer H.:* Zeitschrift f. angewandte Math. u. Mech. *8.* (1928) 292—309. l.

[11] *Eggenberger F.* u. *Pólya G.:* Zeitschrift f. angewandte Math. u. Mech. *3.* (1923) 279—289.

[12] *Khintchine A.:* Ergebnisse d. Math. u. Grenzgebiete, Berlin. II, *4.* (1933)

[13] *Jensen A.:* An elucidation of Erlang's statistical works through the theory of stochastic processes (The Life and Works of A. K. Erlang) Copenhagen, (1948) 23—1000.

[14] *Fry T. C.:* Probability and its Engeering Uses, New York 1928.

[15] *Palm C.:* Ericcson Technics, Stockholm, *44* 6943, 1—1890.

[16] A fenti előadásban vázolt eredmények részletes bizonyítását a Publicationes Mathematicae, Debrecen c. folyóiratban fogom közölni.