A KASZKÁDFOLYAMATOK EGY STATISZTIKAI PROBLÉMÁJÁRÓL

JÁNOSSY LAJOS r. tag

Előadta az 1950. november 30-án tartott osztályülésen

1. §. *Bevezetés*

Előadásom célja egy példát adni a matematikai statisztika alkalmazásairól a kísérleti fizika egyik problémakörében.

A kozmikus sugárzás terén találkozunk ú. n. kaszkádfolyamatokkal. A legismertebb példa az ú. n. elektron-foton-kaszkád. Ha egy elektron abszorbens rétegre esik, energiáját elveszíti, részben ionizáció alakjában, de főleg úgy, hogy nagy energiájú fotonokat bocsát ki. A fotonok azután az atommagok elektromos terében elnyelődnek, és pozitív-negatív elektronpárokat hoznak létre. Ezek az elektronok folytatják a folyamatot mindaddig, amíg az elektronok számával arányosan növekvő ionizáció végülis az egész energiát a folyamatból kivonja és a folyamat végére jut. Meg kell jegyeznünk, hogy a kaszkád nemcsak elektronnal, hanem fotonnal is kezdődhet.

A másik fontos kaszkádfolyamat a nukleonok kaszkádja. Nukleonnak nevezzük közös néven a protont és a neutront. Itt egy gyorsan mozgó nukleon egy nyugvó nukleonnal ütközik. Az ütközés eredménye egy mezon kibocsátása, és ezenkívül az eredetileg nyugvó nukleon ütközés által impulzust vesz fel, az ütköző nukleon energiája pedig csökken. A mezon szerepe a további folyamatban nem lényeges. Ezzel szemben a két nukleon (az eredeti és meglökött) tovább fejleszti a kaszkádot. A kaszkád akkor ér véget, amikor az energia nagyobb része a mezonok és a lassú nukleonok között szétoszlik.

A nukleon-kaszkádnál matematikailag és fizikailag kétféle probléma merül fel. A hidrogén kivételével a nukleonok nem egyenként lépnek fel, hanem csoportosan, atommagokban összefogva. A nukleon-kaszkád egyetlen egy atommagban is kifejlődhet. Erre a folyamatra *Heitler*rel[1] együtt mutattunk rá pár évvel ezelőtt. Azóta azt is megmutattuk, hogy a fotografikus emulziókban található ú. n. áthatoló csillagok e folyamat alapján jól magyarázhatók. A mi felfogásunk éles ellentétben áll *Heisenberg* felfogásával, aki szerint a »csillagok« egyetlen nukleon-nukleon ütközésből keletkeznek, melynek során egy nukleon majdnem összes energiáját elveszíti és sok mezont bocsát ki egyszerre. Meg vagyunk győződve arról, hogy az általunk feltételezett folyamat (amit mi plurális mezonkeltésnek nevezünk) helyesen írja le a tényeket. A fenti példát annak bizonyítására hoztam fel ilyen részletesen, hogy ezen keresztül is megmutassam a kaszkádfolyamatok statisztikai elemzésének fontosságát elvi jelentőségű kérdések tisztázásánál.

Azok a nukleonok, amelyek az atommagból kiszabadulnak, képesek további atommagokkal ütközni és újból egy-mag-kaszkádokat létre hozni. Ilyen módon több egy-mag-kaszkádból újabb folyamat keletkezik, melyet összetett kaszkádnak nevezünk. Az összetett kaszkádfolyamatot például számláló csövekkel figyelhetjük meg.

2. §. *A kaszkád statisztikai megfogalmazása*

A kaszkád folyamatok ütközései valószínűségi törvények szerint történnek, és azért a folyamat maga nagy ingadozásokat mutat. Egyszerű példa : egy nagy energiájú elektron egy bizonyos rétegben átlagosan mondjuk egy millió részecskét vált ki. De megtörténhetik az is, hogy az első részecske útja során nem jut egy atommag közelébe sem. Ebben a kivételes esetben kaszkád nem keletkezik és millió részecske helyett csak egy részecskét találunk (a primér részecskét).

Azon diffúziós egyenleteket, melyekből az átlagokra következtetéseket lehet levonni, *Bhabha* és *Heitler* állították fel 1937-ben. Később *Landau* és *Rumer* szovjet tudósok kimutatták, hogy ezen egyenletek megoldásait a *Laplace*-féle transzformáció segítségével kényelmes alakban lehet megadni. *Tamm* és *Bjelenky* módszereket dolgoztak ki arra, hogyan lehet az ionizációs energiaveszteséget is pontosan bevezetni a számolásokba. Sok más tudós is közreműködött a probléma megoldásában, mint pl. *Bhabha* és *Csakrabarty* indus matematikusok.

Kiderült azonban, hogy nem elég csak az átlagokra érvényes diffúziós egyenleteket megadni. Mint már előbb említettük, az ingadozások igen fontosak és ezért olyan általánosabb egyenletek kívánatosak, amelyek a valószínűségi eloszlásokra vonatkoznak.

Uhlenbeck és munkatársai olyan egyenleteket állítottak fel, melyek segítségével a másodrendű momentumokat is meg lehet állapítani.

Az eredeti egyenletek alakja a következő :

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{N}(x) = L\left(\overline{N}(x)\right). \tag{1}$$

$\overline{N}(x)$ a részecskék átlagos száma x vastagságú abszorbens után ; L egy adott lineáris operátor. Az Uhlenbeck-típusú egyenlet alakja a következő :

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{N^2}(x) = L^{(1)}\left(\overline{N^2}(x) + M\left(\overline{N}(x)\right)\right). \tag{2}$$

Most $\overline{N^2(x)}$ a részecskék száma négyzetének átlaga (másodrendű momentum); $L^{(1)}$ és M megadott operátorok, melyek közül $L^{(1)}$ lineáris.

Bhabha, tovább általánosítva a fenti egyenleteket, a következő alakú egyenletrendszerhez jutott :

$$\frac{\partial}{\partial x} \overline{N^k}(x) = L^{(k-1)}\left(\overline{N^k}(x)\right) + M\left(\overline{N}(x), \overline{N^2}(x), \ldots \overline{N^{k-1}}(x)\right) \qquad k = 1,2,3\ldots \tag{3}$$

A (3) egyenletek alapján $\overline{N}(x)$, $\overline{N^2}(x), \ldots$ stb. rendre kiszámíthatók, és ezekből a momentumokból, legalábbis elvben, a valószínűségi eloszlást ki lehet számítani. Gyakorlatban már a második momentum kiszámítása is igen sok munkát igényel, és így ez az eljárásmód nem sok sikerrel kecsegtet.

Egy évvel ezelőtt sikerült egy egyenletet felállítanom, melyben maga a valószínűségi eloszlás szerepel ismeretlenként. Az (1), (2), (3) egyenletek mind speciális esetei ezen általánosabb egyenletnek, melyeket a továbbiakban G-egyenleteknek fogunk nevezni. Ennek származtatását és sajátságait részletesen megadtam[2] és Akadémiánk májusi ülésén elő is adtam. Ezért itt csak az egyenletek felírására szorítkozhatom. Az egyszerűség kedvéért ehelyütt csak a nukleon-kaszkád egyenletét írom fel.

Jelöljük $\varphi(\varepsilon, n; x)$-szel annak a valószínűségét, hogy x vastagságú réteg után pontosan n olyan nukleon legyen található, melynek energiája nagyobb, mint εE_0, ahol E_0 a primér nukleon energiája. Bevezetjük a következő generátorfüggvényt

$$G(\varepsilon, x; \lambda) = \sum_{n=o}^{\infty} \lambda^n \varphi(\varepsilon, n; x). \tag{4}$$

(Később G-nek csak azokat a változóit fogjuk feltüntetni, amelyek a kérdéses összefüggésben lényegesek.) A nukleon-kaszkádra vonatkozó G-egyenlet a következő:

$$\frac{\partial G(\varepsilon)}{\partial x} = \int_0^1\int_0^1 \left\{ G\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) G\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon''}\right) - G(\varepsilon) \right\} w(\varepsilon', \varepsilon'')\, d\varepsilon'\, d\varepsilon'' \tag{5}$$

$w(\varepsilon' \varepsilon'')\, d\varepsilon'\, d\varepsilon''\, dx$ a valószínűsége annak, hogy egy E energiájú nukleon egyetlen ütközést szenvedjen dx úton, és az ütközés utáni két nukleon energiája $\varepsilon' E$, $(\varepsilon' + d\varepsilon') E$ és $\varepsilon'' E$, $(\varepsilon'' + d\varepsilon'') E$ intervallumokba essen. Itt föltesszük, hogy az ütközési hatáskeresztmetszet csak a primér és szekundér energiák viszonyától függ.

$\lambda = 1$ esetében (4) jobboldala a teljes valószínűséget fejezi ki és értéke ezért az egység. Tehát

$$G(\varepsilon, x; \lambda = 1) = 1 \tag{6}$$

azonkívül

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1} = \overline{N}(\varepsilon, x), \quad \left(\frac{\partial^2 G}{\partial^2 \lambda}\right)_{\lambda=1} = \overline{N^2}(\varepsilon, x) - \overline{N}(\varepsilon, x),$$

és általában

$$\left(\frac{\partial^k G(\varepsilon, x)}{\partial (\log \lambda)^k}\right)_{\lambda=1} = \overline{N^k}(\varepsilon, x). \tag{7}$$

Differenciáljuk (5)-t λ-szerint k-szor és utána helyettesítsük $\lambda = 1 - t$. Így (7) segítségével megkapjuk a (3) egyenlet explicit alakját.

A G-egyenlet numerikus megoldása részleteiben egyelőre ismeretlen. (5)-t mindenesetre numerikus integráció útján lépésről-lépésre lehet megoldani. A megoldások részletesen számot adnának a kaszkádeloszlás alakjáról.

Megjegyezzük, hogy

$$\varphi(n, \varepsilon; x) = \left(\frac{1}{n!}\frac{\partial^n G}{\partial \lambda^n}\right)_{\lambda=0}. \tag{8}$$

Kis n értékek esetében $\left(\frac{\partial^n G}{\partial \lambda^n}\right)_{\lambda=0}$ rekurziós módszerrel kiszámítható. Nagy n értékek számára pedig célszerű komplex integrációt használni, éspedig

$$\varphi(n, \varepsilon; x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\lambda=0} \lambda^{-n-1} G(x)\, d\lambda. \tag{9}$$

A komplex integrál kiszámítását a nyeregpont integrációs módszer szerint hajtjuk végre.

*

A G-egyenletet komplikáltabb folyamatokra is lehet általánosítani. Nemrég megmutattam *Messel* volt munkatársammal együtt, hogy a G-egyenletet összetett nukleon-kaszkádokra is lehet általánosítani.

Ebben az esetben, ha most Γ-t írunk G helyett, kapjuk a következőket:

$$\frac{\partial \Gamma(\varepsilon)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left\{ \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right) \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_n}\right) - \Gamma(\varepsilon) \right\} w_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n)\, d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_n, \tag{10}$$

ahol $w_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n)\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n\, dx$ annak a valószínűsége, hogy egy E energiájú nukleon dx úton egy maggal ütközik, és ott egy olyan kaszkádot hozzon létre, amelynél a magból n olyan nukleon lép ki, melyek mindegyike $\varepsilon_i E$, $(\varepsilon_i + d\varepsilon_i) E$ (ahol $i = 1, 2, \ldots, n$) intervallumok egyikébe esik.

A $w_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n)$ függvényt összefüggésbe lehet hozni $w(\varepsilon', \varepsilon'')$-vel. Erre a célra az egy-mag-kaszkádot kell megvizsgálni. Ha nem kívánjuk a Γ-kat megállapítani, hanem megelégszünk csupán a momentumokkal, t. i.

$$\left(\frac{\partial^k \Gamma(\varepsilon, x)}{\partial (\log \lambda)^k}\right)_{\lambda=1} = \overline{H^k}(\varepsilon_1 x), \tag{11}$$

akkor nem szükséges a bonyolult w_n-függvények explicit ismerete, mint ezt a következőkben megmutatjuk.

Ha $\lambda = 1$—t helyettesítünk be (10)-be, akkor látjuk, hogy, mivel $\Gamma(\varepsilon, x; \lambda = 1) = 1$ következésképpen $\partial \Gamma(\varepsilon, x; \lambda)/\partial x)_{\lambda=1} = 0$, és (10)-nek λ-szerinti deriváltja ilyen alakú:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \Gamma(\varepsilon)}{\partial x}\right)\right\}_{\lambda=1} = \int_0^1 \left\{\frac{\partial \Gamma(\varepsilon/\varepsilon_1)}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^1 \ldots \int_0^1 w_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n)\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \Gamma(\varepsilon)}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 w_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n)\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n \right\} d\varepsilon_1 . \tag{12}$$

Egyszerűen lehet meggyőződni arról, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^1 \ldots \int_0^1 w_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n)\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n = \overline{N}(\varepsilon)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 w_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n)\, d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_n = a, \tag{13}$$

ahol $\overline{N}(\varepsilon)\, d\varepsilon$ azon nukleonok átlagos száma, melyek az εE, $(\varepsilon + d\varepsilon) E$ energia-intervallumba esnek, és amelyek egy E energiával kezdődő egy-mag-kaszkádból származnak. Továbbá a a teljes ütközési hatáskeresztmetszete egy-mag-nukleon ütközésnek (11), (12), (13) segítségével a következő eredményt kapjuk:

$$\frac{\partial \overline{H}(\varepsilon)}{\partial x} = \int_0^1 \left\{ \overline{H}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right) \overline{N}(\varepsilon_1) - a \overline{H}(\varepsilon) \right\} d\varepsilon_1 \tag{14}$$

A (14) egyenletből látjuk, hogy a $\overline{H}$ átlagos az egy egyenletet nyerünk, ha $\overline{N}(\varepsilon)$-t, t. i. az egy-mag-kaszkád átlagos részecske számát ismerjük.

Ilyen módon ki lehet mutatni továbbá, hogy $\overline{H^k}(\varepsilon, x)$ egyenletében a bonyolult w_n kifejezhető az egyszerűbb $\overline{N^k}(\varepsilon)$ függvények segítségével. Ez annyit jelent, hogy az összetett kaszkád momentumai visszavezethetők az egy-mag-kaszkád megfelelő momentumaira.

Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézete,
Kozmikus Sugárzási Osztálya.

IRODALOM

[1] *Heitler W.* és *Jánossy L.:* Proc. Phys. Soc. *A 62* (1949), 669, *A 62* (1949), 374. Helvetica, Phys. Acta *23* (1950), 417.

[2] *Jánossy L.:* Proc. Phys. Soc. *A, 63* (1950), 241, *Messel H.:* Proc. Ir. Ac. és Proc. Phys. Soc. *A, 63* (1950), 1101.