GÉP EGYÜTTÁLLÁSOK VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TÁRGYALÁSA TEKINTETTEL A VÁRAKOZÁSI IDŐKRE

TAKÁCS LAJOS

Előadta az 1950. november 30-án tartott osztályülésen

Ez a munka olyan problémákkal foglalkozik, melyek a gyakorlatban gépek együttállásánál fordulnak elő, ezenkívül a telefonbeszélgetések egy bizonyos kérdésénél is alkalmazhatók.

A probléma a következőkép hangzik:

Több működő gépet egyetlen kezelő szolgál ki. Ha valamelyik gépen hiba keletkezik, a gép leáll, és mindaddig nem indul meg, amíg a hibát ki nem javították. A kezelő a leállás után azonnal hozzákezd a javításhoz, és addig folytatja, míg csak álló gép van.

Ha egyetlen személy több gép kezelésével foglalkozik, akkor az egy gépre jutó állási idő nagyobb, mint egy gép kezelése esetén, mivel a javítási idő alatt leálló újabb gépeknek addig kell várakozniok, amíg a javítás az előző gépeken befejeződik, és sor kerül rájuk.

A kérdés, melyre feleletet fogunk adni, a következő:

m számú gépnél mennyi lesz a gyártási idő alatt, $(0, t)$ időközben a *javításra fordított átlagos (várható) idő*: $\bar{\vartheta}_m$, *a leállások átlagos száma*: $\bar{x}_m$, *a gépállások átlagos időtartama*: $\bar{\tau}_m$.

Legyen annak a valószínűsége, hogy egy működő gép t és $t+dt$ időpontok között leálljon: dt/λ, azaz legyen minden időpont a gépleállásra egyenlően valószínű. Egyetlen hiba javítási ideje legyen: 1. állandó α időtartamú, 2. bármely ξ és $\xi + d\xi$ közé eső időtartamú: $e^{-\xi/\alpha}\dfrac{d\xi}{\alpha}$ valószínűséggel.

Tárgyalásunk konkrétizálására gondoljunk a következő példákra:

1. A szövőgépeknél egyetlen személy m számú gépet kezel, ha valamelyik gépen fonalszakadás történik, a gép leáll. Annak a valószínűsége, hogy egy működő gép t és $t+dt$ időpontok között leálljon: dt/λ. A kezelő leállás után azonnal hozzákezd a kötéshez és addig folytatja, míg álló gép van. Egy kötés α ideig tart.

2. Telefonbeszélgetéseknél előfordul az az eset, hogy valamely háziközpont m számú készüléke hívásait egy külső vonal továbbítja. Annak a valószínűsége, hogy valaki egy készüléken t és $t+dt$ időpontok között hívást akar kezdeni, legyen dt/λ. Ha a külső vonal nem szabad, úgy a hívó addig vár, amíg sor kerül

rá. A kiszolgálás történjék hívási sorrendben. Legyen annak a valószínűsége, hogy egy beszélgetés időtartama ξ és $\xi + d\,\xi$ közé essék: $e^{-\xi/a}\frac{d\xi}{a}$. Ez a probléma megegyezik a gépek együttállásának problémájával, csupán a leállás helyére híváskezdés, a javítási idő helyére pedig beszélgetési idő lép.

A feladat tárgyalása a valószínűségszámításban a stohasztikus folyamatok körébe esik.

Jelöljük $f(t, x)$-szel annak a valószínűségét, hogy t időpontban éppen x gép álljon. Ha $x \geqq 1$, úgy a gépek közül egy javítás alatt van. Ekkor:

A javításra fordított átlagos idő $(0, t)$ *időközben:*

$$\bar{\vartheta}_m = \int_0^t [1 - f(t, 0)]\, dt. \tag{1}$$

Ugyanis $f(t, 0)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy t időpontban egyetlen gép se álljon, $1 - f(t, 0)$ annak a valószínűsége, hogy legalább egy gép álljon. Ha legalább egy gép áll, akkor egy közülük éppen javítás alatt van, ennélfogva $1 - f(t, 0)$ integrálja a gyártási időtartamra szolgáltatja a javításra fordított átlagos időt.

A leállások átlagos száma $(0, t)$ *időközben:* Annak a valószínűsége, hogy t és $t + dt$ időpontok között leálljon egy gép:

$$g(t)\, dt = \sum_{x=0}^{m} f(t, x) \frac{(m - x)\, dt}{\lambda} = \frac{[m - a(t)]}{\lambda}\, dt,$$

ahol

$$a(t) = \sum_{x=0}^{m} x f(t, x)$$

jelenti a t időpontban álló gépek átlagos számát. Ugyanis t és $t + dt$ időpontok között leállhat egy gép úgy, hogy t időpontban x gép áll, aminek a valószínűsége $f(t, x)$ és a működő $(m - x)$ gép közül dt idő alatt egy gép leáll, aminek a valószínűsége: $\frac{(m - x)\, dt}{\lambda}$. Az összetett esemény valószínűsége a kettő szorzata és ezt összegezve minden x-re kapjuk a keresett valószínűséget.

Következésképpen a leállások átlagos száma:

$$\bar{x}_m = \int_0^t g(t)\, dt = \frac{mt}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int_0^t a(t)\, dt. \tag{2}$$

A gépállások átlagos időtartama $(0, t)$ *időközben:* Az x-szeres állások átlagos időtartama: $\int_0^t f(t, x)\, dt$. Ez okoz $x \int_0^t f(t, x)\, dt$ időtartamú gépállást. A gépállások összes időtartama egyenlő ezek összegével, minden x-re, azaz:

$$\bar{\tau}_m = \sum_{x=0}^{m} x \int_0^t f(t, x)\, dt = \int_0^t a(t)\, dt. \tag{3}$$

Ezt az előzővel összevetve:

$$\bar{\tau}_m + \lambda \bar{x}_m = mt$$

-re jutunk, ami egyszerű összefüggést fejez ki a gépállások átlagos időtartama és száma között.

Meghatározandó tehát $f(t, x)$. Jelentse $g(t, x)\,dt$ $(x = 1, 2, \ldots, m)$ annak a valószínűségét, hogy t időpontban x gép álljon és azok közül egynek a javítása t és $t + dt$ időpontok között befejeződjék. Ebben az esetben $f(t, x)$-re az alábbi differencia-differenciál egyenletet írhatjuk fel:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda}\left[(m-x)\,f(t,x)-(m-x+1)\,f(t,x-1)\right]+g(t,x+1)-g(t,x). \tag{4}$$

Ugyanis:

$$f(t+dt,x) = f(t,x-1)\,\frac{(m-x+1)\,dt}{\lambda} + \left[f(t,x) - g(t,x)\,dt\right].$$

$$\left[1 - \frac{(m-x)\,dt}{\lambda}\right] + g\,(t,x+1)\,dt.$$

Annak a valószínűsége, hogy $t + dt$ időpontban x gép álljon, úgy jöhet létre, hogy t időpontban $x - 1$ gép áll, és a működő gépek közül dt idő alatt egy leáll; vagy t időpontban x gép áll és dt idő alatt nem fejeződik be javítás, és a működő gépek közül nem áll le egy sem; vagy t időpontban $x + 1$ gép áll és dt idő alatt egynek közülük befejeződik a javítása. Az elsőnél magasabbrendű végtelen kis mennyiségeket elhagytuk.

$f(t, x)$ átlagára $a(t)$-re, mely formuláinkban explicite szerepel, a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\frac{d\,a(t)}{dt} = \frac{m}{\lambda} - \frac{a(t)}{\lambda} - \sum_{x=1}^{m} g\,(t, x) \tag{5}$$

Ugyanis fennáll:

$$a(t+dt) = a(t) + \frac{[m - a(t)]}{\lambda}\,dt - \sum_{x=1}^{m} g\,(t,x)\,dt$$

A $t + dt$ időpontban álló gépek átlagos számát megkapjuk, ha a t időpontban álló gépek átlagos számához hozzáadjuk a dt idő alatt leálló gépek átlagos számát, és levonjuk a kijavított gépek átlagos számát.

A $g(t, x)$ meghatározására szolgáló egyenlet a speciális javítási időtől függ.

1. α időtartamú javítási idők esetén:

$$g\,(t,x) = f\,(t-\alpha,0)\,\frac{m}{\lambda}\binom{m-1}{x-1}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\lambda}}\right)^{x-1} e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(m-x)} + \sum_{j=2}^{x+1} g\,(t-\alpha, j).$$

$$\binom{m-j+1}{x-j+1}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\lambda}}\right)^{x-j+1} e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(m-x)} \text{ ha } t \geqq \alpha \tag{6}$$

és

$$g(t,x)=0, \text{ ha } t<\alpha.$$

Ugyanis annak a valószínűsége, hogy t időpontban x gép álljon, és közülük egynek a javítása befejeződjék dt idő mulva, úgy jöhet létre, hogy vagy $t-\alpha$ időpontban nem áll gép, és a következő dt idő alatt leáll egy gép, és a következő α idô alatt még $x-1$; vagy $t-\alpha$ időpontban áll j ($j=2, \dots x+1 \leqq m$) gép, azok közül egynek a javítása befejeződik dt idő elteltével, és a működő $m-j+1$ gép közül α idő alatt leáll $x-j+1$. Itt annak a valószínűsége, hogy egy működő gép α időtartam alatt nem áll le: $e^{-\alpha/\lambda}$, hogy leáll: $1-e^{-\alpha/\lambda}$.

2. $e^{-\xi/\alpha}\dfrac{d\xi}{\alpha}$ valószínűségi eloszlású javítási idők esetén:

$$g(t,x)\,dt=f(t,x)\,\frac{dt}{\alpha}. \tag{7}$$

Ekkor ugyanis annak a valószínűsége, hogy egy esemény (javítás, beszélgetés) dt időtartam alatt befejeződjék, függetlenül az esemény kezdőpontjától, mint azt *A. K. Erlang* először észrevette: $\dfrac{dt}{\alpha}$.

Az átlagokra a következő összefüggéseket írhatjuk fel, kihasználva a speciális javítási időket.

1. esetben:

$$a(t)=a(t-\alpha)+\int_{t-\alpha}^{t}\frac{[m-a(t)]}{\lambda}\,dt-[1-f(t-\alpha,0)], \text{ ha } t\geqq\alpha \tag{8}$$

és

$$a(t)=m\left(1-e^{-\frac{t}{\lambda}}\right), \text{ ha } t\leqq\alpha.$$

Ugyanis, ha $t-\alpha$ időpontban átlagosan $a(t-\alpha)$ gép áll, úgy $a(t)$-t megkapjuk, ha hozzáadjuk a leálló gépek átlagos számát: $\int_{t-\alpha}^{t} g(t)\,dt$-t és kivonjuk a kijavított gépek átlagos számát, ami $1-f(t-\alpha,0)$, mert ha $t-\alpha$ időpontban egyetlen gép sem áll, úgy nem is lesz kijavítva egy sem $(t-\alpha, t)$ közben, míg ha legalább egy gép áll, úgy az biztosan ki lesz javítva.

2. esetben

$$\frac{d\,a(t)}{dt}=\frac{[m-a(t)]}{\lambda}-\frac{1}{\alpha}\,[1-f(t,o)] \tag{9}$$

Ez az általános (5) egyenletből nyerhető, ha abban a következő helyetesítéssel élünk

$$\sum_{x=1}^{m} g(t,x)=\frac{1}{\alpha}\sum_{x=1}^{m} f(t,x)=\frac{1-f(t,o)}{\alpha}$$

A probléma tárgyalása az 1. esetben differencia-differenciál egyenletrendszer megoldására vezet, a 2. esetben m-edrendű lineáris differenciálegyenlet megoldására.

Amint láthatjuk, a minket érdeklő: $\bar{\vartheta}_m$, $\bar{x}_m$, $\bar{\tau}_m$ mennyiségek kiszámításához csupán $f(t, 0)$ és $a(t)$ ismeretére van szükségünk. Ha $f(t, 0)$ ismeretes, úgy az átlagokra vonatkozó egyenlet segítségével meghatározható $a(t)$, mégpedig az 1. esetben egy differenciál- és egy differenciaegyenlet megoldásával, a 2. esetben egy differenciálegyenlet megoldásával.

Ha feltételezzük, hogy a gépek végtelen hosszú idő óta, $(-\infty, t)$ intervallumban működnek, és a $(0, t)$ intervallumban számítjuk a fenti mennyiségeket, úgy $\lim\limits_{t \to \infty} f(t, x) = f(x)$ és $\lim\limits_{t \to \infty} g(t, x) = g(x)$-szel számolhatunk. Ekkor azt mondjuk, hogy stacionárius állapot (egyensúlyi állapot) jött létre. Ekkor az álló gépek átlagos száma:

$$a = \lim_{t \to \infty} a(t) = \sum_{x=o}^{m} x f(x)$$

Ha $\lambda \ll t$, azaz a gyártási időtartam sokkal nagyobb λ-nál, úgy nem követünk el durva hibát, ha stacionárius állapottal számolunk. A különbség annyi, hogy most az időszámítás kezdetén van a álló gép, míg az előző szerint nincs álló gép. Tekintve, hogy a konvergencia exponenciális jellegű, ha t elég nagy, úgy a különbség rendkívül kicsiny.

Stacionárius állapottal számolva:

$$\bar{\vartheta}_m = [1 - f(0)]\, t, \tag{10}$$

$$\bar{x}_m = \frac{(m-a)\, t}{\lambda}, \tag{11}$$

$$\bar{\tau}_m = at, \tag{12}$$

ahol a számára (8) és (9) egyenletekből mind az első, mind a második esetben:

$$\frac{(m-a)}{\lambda} = \frac{[1 - f(o)]}{a} \tag{13}$$

adódik. Ekkor ugyanis a függvények konstansok lesznek, idő szerinti deriváltjaik pedig zérusok.

Elegendő tehát $f(0)$ meghatározása az 1. és 2. esetben:

1. Legyen

$$g(x) = \frac{m}{\lambda} f(o)\, \varphi(x) \;\; \textit{és} \;\; e^{\frac{a}{\lambda}} = u,$$

úgy (6) egyenlet stacionárius esetben:

$$\varphi(x) = \binom{m-1}{x-1}\left(\frac{u-1}{u}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{u}\right)^{m-x} + \sum_{j=2}^{x+1} \varphi(j)\binom{m-j+1}{x-j+1}\left(\frac{u-1}{u}\right)^{x-j+1}\left(\frac{1}{u}\right)^{m-x}$$

$$(x = 1, 2, \ldots, m)$$

Mindkét oldalt összegezve x-re, 1-től m-ig, azt nyerjük, hogy $\varphi(1) = 1$, melynek segítségével sorjában meghatározható: $\varphi(2), \ldots, \varphi(m)$.

$$\sum_{x=1}^{m} g(x) = \frac{m}{\lambda} f(o) \sum_{x=1}^{m} \varphi(x) = \frac{(m-a)}{\lambda} = \frac{[1-f(o)]}{a}$$

(5) és (13) fennállása következtében. Innen $\sum_{x=1}^{m} \varphi(x) = G_m(u)$ jelöléssel:

$$f(o) = \frac{1}{1 + \frac{ma}{\lambda} G_m(u)} \tag{14}$$

Speciálisan:

$$G_1(u) = 1$$
$$G_2(u) = u$$
$$G_3(u) = u^3 - u^2 + u$$
$$G_4(u) = u^6 - u^5 - u^4 + 3u^3 - 2u^2 + u$$
$$G_5(u) = u^{10} - u^9 - u^8 + 4u^6 - 2u^5 - 4u^4 + 6u^3 - 3u^2 + u$$

2. $g(x) = f(x)\frac{1}{a}$ folytán a (4) egyenlet stacionárius esetben:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} f(1) = \frac{m}{\lambda} f(o) \\ \frac{1}{a} f(x+1) - \left(\frac{1}{a} + \frac{m-x}{\lambda}\right) f(x) + \frac{(m-x+1)}{\lambda} f(x-1) = o \quad (x = 1, 2, \cdots, m) \end{cases}$$

Ennek megoldása:

$$f(x) = x!\binom{m}{x}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^x f(o)$$

$\sum_{x=0}^{m} f(x) = 1$ következtében:

$$f(o) = \frac{1}{\sum_{x=o}^{m} x!\binom{m}{x}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^x}. \tag{15}$$

Mindkét esetben:

$$\overline{\vartheta_m} = [1 - f(0)]\, t, \tag{16}$$

$$\overline{x_m} = \frac{[1 - f(0)]}{a} t, \tag{17}$$

$$\overline{\tau_m} = \left[m - \lambda \frac{(1 - f(0))}{a}\right] t \tag{18}$$

ahol $f(0)$-t az első esetben (14), a második esetben (15) egyenlet definiálja.

Hincsin »O szrednyem vremenyi prosztoja sztankov« című cikkében* általános eljárást ad a gépek átlagos várakozási idejének kiszámítására, bármilyen javítási idők mellett, stacionárius állapotot feltételezve. *Hincsintől* általános esetben levezetett γ várakozási idő a mi speciális eseteinkben:

1. és 2. esetben egyaránt:

$$\gamma = \frac{m\,a}{1 - f(0)} - (a + \lambda) \tag{19}$$

γ segítségével $\overline{\vartheta_m}$, $\overline{x_m}$, $\overline{\tau_m}$ könnyen kiszámíthatók.

Amíg Hincsin stacionárius állapot esetén általános eljárást ad a várakozási idő kiszámítására, addig tárgyalásunkban nem stacionárius állapotra vonatkozó olyan egyenletekből indulunk ki, melyek kihasználják a javítási idő speciális tulajdonságát. Ezekből határátmenet segítségével számítjuk ki a stacionárius állapotra vonatkozó $\overline{\vartheta_m}$, $\overline{x_m}$, $\overline{\tau_m}$ értékeket.

A fenti adatok birtokában, ismerve a gyártásra vonatkozó költségeket, eldönthető, hogy hány gépet gazdaságos egyetlen kezelőre bízni, illetve, hogy háziközpontoknál hány készüléket szabad egy külső vonalra kapcsolni, ha azt akarjuk, hogy a várható várakozási idő egy bizonyos értéken alul maradjon.

Magyar Tudományos Akadémia,
Alkalmazott Matematikai Intézete.

* А. Я. Хинчин: Математический Сборник 40 (1933) 119.