A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI A CSILLAGÁSZATBAN

FÖLDES ISTVÁN

Előadta az 1950. december 1-én tartott osztályülésen

A valószínűségszámítás és a matematikai statisztika módszerei széleskörű alkalmazásra találnak a csillagászati problémák hosszú sorának diszkussziójánál. Ezek a problémák fizikai természetük alapján is igen széles skálát ölelnek fel, és nem kevésbbé változatos képet kapunk, ha a megoldásokat a matematikai metodika szempontjából tekintjük át. E rövid referátumnak tehát nem lehet célja, hogy kimerítően felsorolja a statisztikus módszer összes csillagászati alkalmazásait. Ehelyett csupán egyes olyan alkalmazások felemlítésére és rövid jellemzésére kell szorítkoznom, melyek nevezetes eredményeket adnak, és a módszer szempontjából nézve is jellegzetesek és tipikusak.

A problémák egyik csoportja az égitestek valamely rendszeréhez tartozó individuumok helyzeti, illetve sebességi eloszlásának megállapításában áll, olyan esetekben, amikor ez az eloszlás nem állapítható meg közvetlen megfigyelésekből, azonban megállapítható egy másik mennyiség eloszlása, amely a vizsgált eloszlással összefüggésbe hozható. A klasszikus paradigmát erre a típusra a stellárstatisztika Schwarzschild-féle alapegyenlete szolgáltatja.

Jelentse $A(m)dm$ azon csillagok számát egy ω térszögben, amelyeknek látszólagos magnitudói m és $m+dm$ közé esnek; jelentse továbbá $\varphi(M)dM$ azon csillagok viszonylagos számát, melyeknek abszolút magnitudoi M és $M+dM$ közé esnek. A $\varphi(M)$ függvényt fényességi függvénynek nevezzük, és feltesszük, hogy a következőképpen van normálva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(M)\, dM = 1;$$

$\varphi(M)\, dM$ eszerint annak a valószínűségét jelenti, hogy egy tetszőlegesen kiszemelt csillag abszolút magnitudója M és $M+dM$ közé essék. Jelentse végül $D(r)$ a térfogategységben levő csillagok számát a Naptól r parszeknyi távolságban. Mivel valamely csillag m látszólagos és M abszolút magnitudoja között az $M = m - 5 \log r + 5$ összefüggés áll fenn, azért valamely r távolságra levő csillag látszólagos magnitudoja akkor és csak akkor esik m és $m+dm$ közé, ha abszolút magnitudója $m - 5 \log r + 5$ és $m - 5 \log r + 5 + dm$ közé esik; eszerint annak valószínűsége, hogy az r távolságra levő $\omega\, r^2\, dr$ térfogatú térelemben levő tetszőlegesen kiszemelt csillag látszólagos magnitudoja

m és $m + dm$ közé essék, $\varphi(m - 5 \log r + 5)\, dm$-mel egyenlő és következőleg az ebben a térelemben levő olyan csillagok várható száma, melyeknek látszólagos magnitudoja m és $m + dm$ közé esik, $D(r)\, \omega\, r^2\, dr\, \varphi(m - 5 \log r + 5) dm$-mel egyenlő. Ebből r-re integrálva kapjuk a Schwarzschild-féle egyenletet :[1]

$$A(m) = \omega \int_0^\infty D(r)\, \varphi(m - 5 \log r + 5)\, r^2\, dr$$

Ha $A(m)$ és $\varphi(M)$ ismertek, akkor ebből az integrálegyenletből a $D(r)$ függvény kiszámítható.

További, ehhez a kategóriához tartozó problémák a következők : valamely csillagrendszer csillagai saját mozgásainak és radiális sebességeinek észlelt eloszlásából meghatározni a térbeli sebességek eloszlását ; az extragalaktikai ködök észlelt látszólagos elliptikus alakjai excentricitásainak eloszlásából meghatározni a (forgási ellipszoid alakú) ködök meridiánmetszetei excentricitásainak eloszlását ; valamely centrálisan szimmetrikus gömbhalmaz távcsőben észlelt képének sűrűségi eloszlásából meghatározni a térbeli sűrűségi eloszlást.[2] Tágabb értelemben ide sorolhatók *Laplace*, illetve *Schiaparelli* annak a valószínűségére vonatkozó vizsgálatai, hogy egy megfigyelhető üstökös, mely a térnek valamely meghatározott pontján át tetszőleges sebességgel halad keresztül, elliptikus, illetve hiperbolikus pályán mozogjon. A válasz, melyet az égi mechanika kéttestproblémájának eredményei erre a kérdésre adnak, attól függ, hogy a kérdéses pontban a sebességeknek milyen eloszlását tételezzük fel abban a rajban, melyhez a megfigyelt üstökösök tartoznak ; ezért tehát az elliptikus pályák észlelt viszonylagos gyakoriságából visszakövetkeztethetünk a tényleges sebességeloszlásra. Ez fényt derít az üstökösök eredetének kérdésére.[3]

Egy meteorraj radiánsának megállapításával kapcsolatban[4] a problémák egy másik típusához jutunk :

Ha k egyenlő területű tartomány felett n pontot találomra osztunk el, akkor mekkora lesz azon tartományok várható száma, melyek m $(0 \leq m \leq n)$ pontot tartalmaznak? Ez a várható érték $\binom{n}{m}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-m} k^{1-m}$.

Kozmogóniai vonatkozása miatt szeretnék kissé részletesebben kitérni egy csillag legközelebbi szomszédja távolságának eloszlására.[5]

Tegyük fel, hogy a térfogategységbe eső csillagok átlagos száma egyenlő n-nel, és jelentse $w(r)\, dr$ annak a valószínűségét, hogy egy csillag távolsága legközelebbi szomszédjától r és $r + dr$ közé essék. Ez egyenlő annak a valószínűségével, hogy egy csillag sincs a vizsgált csillag körül írt r sugarú gömbön belül, megszorozva annak a valószínűségével, hogy az r és $r + dr$ sugarú gömbök között van csillag. Ezért tehát

$$w(r)\, dr = \left(1 - \int_0^r w(r)\, dr\right) 4\pi r^2\, n\, dr,$$

ahol n a térfogategységbe eső csillagok átlagos száma. Innen

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{w(r)}{4\pi r^2 n}\right) = -w(r) = -4\pi r^2 n \frac{w(r)}{4\pi r^2 n},$$

$$\frac{d}{dr}\log\frac{w(r)}{4\pi r^2 n} = -4\pi r^2 n,$$

$$\frac{w(r)}{4\pi r^2 n} = e^{-\frac{4\pi r^3 n}{3}} . C;$$

azonban $\frac{w(r)}{4\pi r^2 n} \to 1$, ha $r \to O$; ezért tehát $C = 1$ és

$$w(r) = 4\pi r^2 n\, e^{-\frac{4\pi r^3 n}{3}}.$$

Ez a formula arra való hivatkozással is belátható, hogy adott n átlagos sűrűség mellett egy v térfogatú térrészben foglalt csillagok száma Poisson-féle eloszlást mutat a $\lambda = vn$ paraméterrel,[5] tehát annak a valószínűsége, hogy ebben a térrészben ne legyen csillag, $\lambda^0 \frac{e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda} = e^{-vn}$; az r sugarú gömbre alkalmazva ez egyenlő $e^{-\frac{4\pi r^3}{3} n}$-nel.

Az a kritika, melyet *Ogorodnyikov* a Naprendszer keletkezésének *Jeans—Chamberlin—Moulton*-féle elmélete felett gyakorolt,[6] lényegében szintén a legközelebbi szomszéd távolsága eloszlásának most tárgyalt kérdésével függ össze. Jelöljük a Tejútrendszert alkotó csillagközeg sűrűségét megint n-nel. Tegyük fel, hogy ebben a közegben egy C csillag mozog. Ha eltekintünk a perturbációs hatásoktól, ezt a mozgást egyenesvonalúnak tekinthetjük. Jelentse $w(r)\,dr$ annak a valószínűségét, hogy az a legkisebb távolság, melyre C egy s hosszúságú út megtétele folyamán a közeg valamely csillagát megközelíti, r és $r + dr$ közé essék. Ha C kezdeti és véghelyzetén, valamint az e pontokat összekötő s hosszúságú egyenesdarabnak a C kezdeti helyzetétől egész számú egységnyi távolságra levő pontjain át erre az egyenesdarabra merőleges sikokkal a közegből s számú, egységnyi vastagságú szeletet hasítunk ki (s-et az egyszerűség kedvéért egész számnak véve), és minden egyes szeletbe eső csillagokat az illető szelet valamelyik határoló síkjára vetítjük, akkor ezen a síkon a vetületek sűrűsége egyenlő lesz n-nel; ha pedig mind az s szelet összes csillagait egyazon, az említett határoló lapokkal párhuzamos síkra vetítjük, akkor ezen a síkon a vetületek sűrűsége egyenlő lesz ns-sel és a $w(r)\,dr$ valószínűség egyúttal annak a valószínűsége is lesz, hogy e síkon találomra felvett pontnak a legközelebbi csillagvetülettől mért távolságra r és $r + dr$ közé essék. Így tehát az előbbi háromdimenziós probléma kétdimenziós analogonjára jutunk. A $w(r)$ függvény számára a

$$w(r)\,dr = \left[1 - \int_0^r w(r)\,d\,r\right] 2\pi rnsdr$$

egyenlet adódik, ahonnan

$$w(r) = 2\pi n s r e^{-\pi n s r^2};$$

Ez az eredmény szintén belátható a következőképpen is: $w(r)\,dr$ annak valószínűségével egyenlő, hogy az s magasságú és r sugarú hengerben ne legyen csillag (ez a valószínűség a Poisson-eloszlásra való hivatkozással egyenlő $e^{r^2 \pi s n}$-nel), megszorozva annak a valószínűségével, hogy az ezen hengert burkoló dr vastagságú hengergyűrűben legyen csillag (ennek valószínűsége $n 2\pi r s\, d r$).

Nyilván

$$P(r \leq a) = \int_0^a w(r)\,dr = \Big[-e^{-\pi n s r^2} \Big]_0^a = 1 - e^{-\pi n s a^2};$$

ha azt akarjuk, hogy $P(r \leq a) \geq 10^{-k}$ legyen, akkor tehát kell, hogy

$$1 - e^{-\pi n s a^2} \sim \pi n s a^2 \geq 10^{-k}$$

legyen. (A közelítő formula használata jogosult, mert a lejjebb közölt adatok alapján $nsa^2 \ll 1$).

a-nak a Jeans-féle elmélet szerint a bolygóképződéshez megkövetelt értéke $6{,}4 \cdot 10^{13}$ cm; s legyen a Tejútrendszer átmérője, vagyis 25 kiloparszek $=$ $= 7{,}7 \cdot 10^{22}$ cm; a Nap környezetében a csillagok tényleges sűrűsége $n_0 = 0{,}1$ parszek$^{-3} = 3{,}4 \cdot 10^{-57}$ cm^{-3}. Az előbbi feltétel ekkor a következőkép írható:

$$\frac{n}{n_0} \geq 3 \cdot 10^{5-k}$$

Ha $k = 2$-t írunk, akkor tehát az aktuális sűrűségnél 3000-szer nagyobb sűrűségnek kellene fennállnia ahhoz, hogy a Galaktika egész átmérőjén való keresztülhaladás alkalmával egy bolygórendszer keletkezésének valószínűsége legalább $\frac{1}{100}$ legyen. A Jeans-féle elmélet szerint tehát egy bolygórendszer egészen kivételes jelenség volna a Tejútrendszerben, mivel a csillagok relatív sebességeinek átlagos értékét tekintve világos, hogy a Tejútrendszer létezésének ideje (néhány milliárd év) alatt a csillagok zöme legfeljebb csak a Tejútrendszer átmérőjével egyenlő nagyságrendű utat futhatott be. Ez a konkluzió pedig ellentmond annak a ténynek, hogy az utóbbi időben sikerült egyes közeli csillagoknál a saját mozgások periodikus változásaiból bolygók jelenlétét megállapitani. A Jeans-féle ú. n. planetezimális kozmogóniai elmélet tehát tarthatatlan.

Ennek az eredménynek mélyreható ideológiai jelentőségére is szeretnék néhány szóval kitérni. A Föld kitüntetett helyzetére vonatkozó vallásos tan évszázadok óta egyik központi kérdése volt annak a harcnak, melyet a tudomány az egyház reakciós filozófiája ellen folytatott. *Kopernikus* és *Galilei* eszméit háromszáz évig azért üldözték, mert cáfolták azt a dogmát, hogy a Föld, az ember teremtésének és megváltásának színhelye, szükségképpen a világ közepe.

A Föld megkülönböztetett szerepének ezt az idealista téveszméjét támasztotta fel új alakban a planetezimális kozmogóniai hipotézis, mely arra a következményre vezet, hogy a Föld csaknem az egyedüli égitest, amely élőlények által lakható. A tudomány és az egyház harcának másik központi kérdésére, a világ egyetlen kreatív aktussal való teremtésének dogmájára *Ambarcumian* vizsgálatai adják meg a választ. Ezeket előadásom végén fogom röviden vázolni.

A legközelebbi szomszéd távolságának eloszlásából azonnal meghatározhatjuk azt a $W(|F|)$ eloszlási függvényt, amely annak a valószínűségét adja meg, hogy valamely csillagra valamely pillanatban a csillagközeg legközelebbi csillagának gravitációs vonzása következtében ható F erő nagysága $|F|$ és $|F| + d|F|$ közé essék.[5] Ennek az erőnek abszolút értéke $|F| = GMr^{-2}$, ahol G a gravitáció állandója, r a legközelebbi szomszéd távolsága, M pedig a tömege (egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a közegcsillagok mind egyenlő tömegűek). Az imént azt találtuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a legközelebbi szomszéd távolsága r és $r + dr$ közé essék,

$$w(r)\,dr = 4\pi r^2 n e^{-\frac{4\pi r^3 n}{3}}\,dr$$

(n az átlagos sűrűséget jelenti); az $|F|$ mennyiség eloszlását nyilván úgy kapjuk meg, hogy ebben a kifejezésben r-et $|F|$-fel és dr-t $d|F|$-fel fejezzük ki:

$$r = \left(\frac{GM}{|F|}\right)^{1/2},$$

$$dr = \frac{1}{2}\,\frac{(GM)^{1/2}}{|F|^{3/2}}\,d|F|,$$

ahonnan

$$W(|F|)\,d|F| = 2\pi (GM)^{3/2} n |F|^{-5/2} e^{\frac{4\pi (GM)^{3/2} n}{3|F|^{3/2}}}\,d|F|;$$

nyilván

$$W(|F|) \sim 2\pi (GM)^{3/2} n |F|^{-5/2},$$

ha $|F| \to \infty$.

Ha nem csupán a legközelebbi szomszédot vesszük tekintetbe, hanem a közeg összes csillagainak együttes hatását vizsgáljuk, akkor a sztochasztikus problémák egy másik nevezetes típusát kapjuk. Ezt azzal jellemezhetjük, hogy egy olyan valószínűségi változó eloszlását keressük, amely igen nagyszámú független valószínűségi változó szuperpoziciójának eredménye.[5]

A vizsgált csillag tömegegységére az egész csillagközeg összes csillagainak vonzása folytán ható $\mathfrak{F}$ gravitációs erőt úgy tekinthetjük, hogy két részből tevődik össze: az egyik a közeg csillagainak rendszerétől, mint egésztől, a másik a csillag közvetlen környezetétől származik. Az előbbi levezethető egy

$\mathfrak{B}(\mathbf{r}, t)$ potenciálból, mely a közegcsillagok »kisímított« térbeli eloszlását reprezentálja; a vizsgált csillag tömegegységére ennek folytán ható erő

$$K(\mathbf{r}, t) = \text{grad}\, \mathfrak{B}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathfrak{B}(\mathbf{r}, t) = G \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{M\, n(\mathbf{r}_1, M, t)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|}\, dM\, d\mathbf{r}_1,$$

ahol $n(\mathbf{r}_1, M, t)\, dM$ az M és $M + dM$ közé eső tömegű csillagok sűrűségét adja, mint az $\mathbf{r}_1$ helyzetvektor és a t idő függvényét. Ez az erő lassan változó folytonos függvénye a helynek és időnek. Ehhez járul a csillag közeli szomszédaitól származó (szintén a csillag tömegegységére vonatkoztatott) $F(t)$ fluktuáló erő, amely azt eredményezi, hogy a csillagra ható aktuális erő eltér a grad $\mathfrak{B}$ értéktől. Könnyűszerrel elvégezhető egy durva becslés ezen erő fluktuációinak sebességét illetően; ezek a csillagközeg sűrűségének a vizsgált csillag környezetében mutatkozó fluktuációival függnek össze. Ha e csillag körül egy nem túl nagy σ térfogatelemet tekintünk, melyben csak viszonylag kevés közegcsillag van, akkor az ebben foglalt csillagok számának az $n\sigma$ átlagos érték körüli ingadozásai egy Poisson-féle eloszlás által vannak szabályozva. Egy fluktuáció átlagos tartama nyilván olyan nagyságrendű, mint az az átlagos T idő, amely alatt két csillag a csillagok közti átlagos $\bar{r}$ távolságra távolodik el egymástól:

$$T = \frac{\bar{r}}{\bar{V}},$$

ahol $\bar{V}$ a két csillag közti relatív sebességek átlaga. Nyilván

$$\bar{r} = \int\limits_0^\infty r\, w(r)\, dr = \int\limits_0^\infty 4\, \pi\, r^3\, n\, e^{-\frac{4\pi r^3 n}{3}}\, dr$$

$$= \frac{1}{(4\, \pi\, n/3)^{1/3}} \int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^{1/3}\, dx = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4\, \pi\, n}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} = 0{,}55396\, n^{-\frac{1}{3}};$$

eszerint

$$T = \frac{0{,}55\, n^{-\frac{1}{3}}}{\bar{V}};$$

beírva $\bar{V}$-nek és n-nek a stellárstatisztikából ismert, a Nap környezetére vonatkozó értékeit:

$$\bar{V} = 50\ \text{km/sec}, \quad n = 0{,}1\ \text{parsec}^{-3},$$

kapjuk, hogy

$$T = 6.10^4\ \text{év}.$$

Ez igen kicsiny idő a galaktikai rotáció periódusához (kb 200 millió évhez) képest; a közegcsillagok sűrűségi fluktuációi és ennélfogva a csillagra ható erő ingadozásai is igen gyorsan változnak a többi fizikai paraméterek változásainak sebességeihez képest. Vannak tehát olyan Δt időközök, melyeknek folyamán K ($\mathbf{r}$, t) csak infinitezimálisan kis értékkel változik, azonban ugyanakkor igen nagyok az $F(t)$ fluktuációinak T átlagos tartamához képest, úgyhogy $F(t)$ és $F(t+\Delta t)$ között nem lesz semmiféle korreláció. Ha tehát a csillag tömegegységére ható F erő kifejezését a következő alakban írjuk:

$$\mathfrak{F} = K(\mathbf{r}, t) + F(t),$$

ez a reláció teljesen analóg lesz a Brown-féle mozgás Langevin-féle egyenletével; itt is K ($\mathbf{r}$, t) egy szisztematikus tag, mely a kisimított térbeli eloszlás gravitációs terétől származik, $F(t)$ pedig a közeli szomszédok hatását feltüntető sztochasztikus tag, mely K ($\mathbf{r}$, t)-hez képest igen gyorsan változik. A csillag sebességének egy az előbbi jelentésű Δt időköz alatt bekövetkezett megváltozása számára a következő kifejezést írhatjuk fel:

$$F\,\Delta t = K\,\Delta t + \delta(t+\Delta t\,;\,t),$$

ahol

$$\delta\,(t+\Delta t\,;\;t) = \int_{t}^{t+\Delta t} F(u)\,d\,u$$

és az előbb mondottakból következik, hogy $\delta\,(t+\Delta t\,;t)$ és $\delta\,(t+2\,\Delta t\,;t+\Delta t)$ között nincs korreláció. Ahhoz, hogy a sebesség ilyen megváltozásának értékét kiszámíthassuk, szükség van az

$$F(t) = G\sum \frac{M_i\,\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3}$$

erő statisztikus tulajdonságainak, vagyis a $W(F)$ eloszlási függvénynek az ismeretére. (Mivel F a különböző irányok közt egyenletesen oszlik el, azért a $W(F)$ és a $W(|F|)$ eloszlási függvények a következőkép függenek össze egymással: $W(|F|) = 4\,\pi\,|F|^2\,W(F)$.) Az $F(t)$ kifejezésében az összegezés a vizsgált csillag egy bizonyos környezetéhez, pl. egy R sugarú gömbhöz tartozó összes közegcsillagokra terjesztendő ki; mivel azonban csak a közeli csillagok játszanak számottevő szerepet, azért a csillag környezetében észlelt sűrűséget formálisan a végtelenig extrapolálhatjuk és az összegezést az egész térre terjeszthetjük ki. Így a keresett $W(|F|)$ eloszlás, az ú. n. Holtsmark-eloszlás végtelen sok független változó ismert eloszlásából számítható egy *Markov*tól származó általános módszer[7] alkalmazásával. Az így nyert eredmény nagy $|F|$-ekre ugyanazt az aszimptotikát adja, mint a fenti eljárás, melynél csak a legközelebbi szomszéd hatását vettük figyelembe (ha az ottani eredményünkben az egyenlő tömegűeknek feltételezett közegcsillagok közös M tömege helyébe az átlagos tömeget írjuk). Valószínűnek látszik, hogy ha a két legközelebbi szomszédot vesszük figyelembe, akkor már kisebb $|F|$-ekre is a Holtsmark-eloszlásnak egy elég jó közelítését kapjuk.

Ilyen típusú és az előbbivel rokon természetű probléma a csillagrendszerek relaxációs idejének kiszámítása is, vagyis azon időtartamé, melynek folyamán a rendszer csillagai közti közeli találkozások sztochasztikus kumulatív hatása a mozgások irányának eltérítése, illetve az energiakicserélődés, vagyis a végső »termodinamikai« egyensúlyi állapothoz való közeledés szempontjából már nem hanyagolható el a kisimított sűrűségi eloszlásnak megfelelő, skaláris potenciálból leszármaztatható gravitációs tér szisztematikus hatása mellett, vagyis amikor az e potenciál alapján számított pálya, illetve az energia állandóságát kifejező integrál már közelítőleg sem lesz érvényes. Ennek a problémának legexaktabb megoldása *Chandrasekhartól* származik[8], a Tejútrendszer relaxációs ideje 10^{14} év nagyságrendű. *Ogorodnyikov* rámutatott arra, hogy a relaxációs idő egyúttal a Tejútrendszer szétesésének felezési idejét is jelenti.[9]

A sztochasztikus problémáknak egy további nevezetes típusához jutunk, ha az előbbinél pontosabb fogalmazásban vetjük fel az F erő fluktuációi sebességének, vagyis egy fluktuációs állapot átlagos tartamának kérdését. Tegyük fel, hogy F-nek valamely adott t_0 időpontban egy meghatározott értéke van. Ha a dt idő elég rövid, akkor F-nek a $t_0 + dt$ időbeli értéke nyilván erősen függni fog a t_0-beli értékétől; ezt a jelenséget nevezte *Smoluchowski* valószínűségi utóhatásnak.[10] Kérdés, hogy átlagosan mekkora időnek kell eltelnie, míg az F erő értéke már nem lesz számottevő korrelációban a t_0 időpontban észlelt értékével? Ez az időtartam, a fluktuáció átlagos tartama jellemzi azt, hogy az egyes fluktuációs állapotok milyen gyorsan váltakoznak. Hogy ezt az időtartamot kiszámíthassuk, ismernünk kell az

$$W\left(F, \frac{dF}{dt}\right)$$

kettős eloszlási függvényt. *Chandrasekhar* és *Neumann* megmutatták,[11] hogy ez is meghatározható a Markov-féle módszerrel.

Az izolált csillagrendszerek általános dinamikájának problémája a következő: adva van egy t_0 időpontban a rendszer csillagainak térbeli eloszlása és a tér minden pontjában a sebességek eloszlása az $f(x, y, z, u, v, w, t_0)$ függvénnyel; meghatározandó bármely t időpontra vonatkozólag az $f(x, y, z, u, v, w, t)$ eloszlás. Az f fügvénynek ki kell elégitenie a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

egyenletet[12]; ez a Liouville-tétel egyszerű folyománya és azonos a gázelmélet Boltzmann-egyenletével, ha abban a közeli szomszédok kölcsönhatását kifejező tagokat, az úgynevezett átmeneti és ütközési függvényeket elhagyjuk, ami a rendkívül hosszú relaxációs időt figyelembevéve, jogosnak tekinthető; ebben az egyenletben u, v és w a sebesség komponenseit jelentik, $\mathfrak{B}$ pedig a gravitációs potenciál, mely egy izolált rendszer esetében kizárólag a rendszer tagjaitól származik, tehát eleget kell tennie a

$$\nabla^2 \mathfrak{B} = -4\pi G M \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, u, v, w, t)\, du\, dv\, dw$$

Poisson-egyenletnek (egyszerűség kedvéért itt a csillagok tömegeit megint egyenlőknek vettük és M-mel jelöltük). A stellárdinamika alapproblémájában tehát egy eloszlásnak az időtől való függését kell meghatározni, ha ismerjük az eloszlást valamely kezdeti időpontra vonatkozólag. Az így megfogalmazott probléma teljes megoldása tetszőleges $f(x\ y, z, u, v, w, t_0)$ függvény esetében eddig még nem sikerült.

Végül lépten-nyomon alkalmazzák az asztrofizikában és a stellárdinamikában a statisztikus mechanikának a termodinamikai egyensúlyi állapot meghatározására szolgáló egyenleteit[13] (pl. a molekuláknak egy atmoszférából, valamint egy csillagnak egy csillaghalmazból való kifutásának és az atmoszféra elvesztésének, illetve a halmaz felbomlásának kérdései; az in tersztelláris anyag egy csillag által történő »befogásának« (kaptációjának) problémája *Smidt* kozmogóniai elméletével kapcsolatban; az elemi részek ütközéseinek és a szubatomáris energiának az ütközések alkalmával való felszabadulásának, vagyis a csillagok energiaprodukciójának kérdései stb.). Ebben az összefüggésben elsősorban a disszociatív egyensúlyi állapot feltételét kifejező egyenleteknek (speciálisan a Saha-egyenletnek) nagyjelentőségű alkalmazásait kell említenem: a spektráltípusok Fowler-féle elméletét, mely az egyes típusokra jellemző színképvonalak fellépését az ionizáció különböző fokaival magyarázza meg; *Eddington* és *Strömgren* vizsgálatait a csillagok vegyi összetételére vonatkozólag; végül a kettős csillagok és nyilt halmazok disszociatív egyensúlya kérdéseinek döntő szerep jut *Ambarcumian* kozmogóniai vizsgálataiban.[14] A disszociatív egyensúly egyenletéből kiszámítható, hogy a Tejútrendszerben jelenleg az egyes csillagok számához viszonyítva kb. 1 milliószorta több kettős csillag van, mint amennyi volna akkor, ha a kettős csillagok felbomlásának és összeállásának ellentétes folyamatai között egyensúly állna fent; ebből következik, hogy a kettős csillagok zöme nem keletkezhetett véletlen találkozások alkalmával a már meglevő csillagokból való összeállás által, mert ebben az esetben százalékos előfordulási gyakoriságuk nem haladhatná meg a disszociatív egyensúlyi állapotnak megfelelő értékét. A nyilt halmazokra és az *Ambarcumian* által felfedezett ú. n. csillagtársulásokra ez a fortiori érvényes; mivel pedig másrészt ezek a társulások nagymértékben instabilisek: életkoruk legfeljebb néhány millió év, azért ebből következik, hogy a társulások tagjaiként szereplő csillagok maguk sem lehetnek ennél idősebbek, következőleg a Galaktika csillagai nem keletkezhettek mindannyian egy időben.

Befejezésül megemlítem, hogy *Ogorodnyikov* [9] a Gibbs-féle statisztikus mechanikát úgy általánosította, hogy közvetlenül alkalmazható legyen egy forgó stacionárius galaktikát alkotó csillaggázra, és kimutatta, hogy valamely pont környezetében a lokális centroidhoz viszonyított csillagsebességek ellipsziodális, ú. n. Schwarzschild-féle eloszlása azonos a kanonikus eloszlással.

Budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem,
Csillagászati Intézete.

IRODALOM

[1] *Waldmeier M.:* Einführung in die Astrophysik, Basel 1948, 235.
[2] *Zeipel H. v.:* Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires XXV., F 29, (1908).
[3] *Charlier C. V. L.:* Application de la théorie des probabilités à l'astronomie, Paris 1931, 1. fejezet.
[4] *Hoffmeister C.:* Meteorströme, Leipzig 1948.
[5] *Chandrasekhar S.:* Reviews of Modern Physics, *15.* 1 (1943).
[6] Огородников К. Ф. : Доклады Академии Наук СССР. *LXVI.* (1949). 3.
[7] *Markov A. A.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig 1912, 16. és 33. §.
[8] *Chandrasekhar S.:* Astrophysical Journal *93.* (1941).
[9] Огородников К. Ф! : Успехи Астрономических Наук *IV.* (1948).
[10] Smoluchowski M. v.: Phys. Zeitschrift *17,* 557 (1916).
[11] *Chandrasekhar S.* és *Neumann, J. v.:* Astroph. J. *95* (1942), I. II. ib., *97* (1943).
[12] *Chandrasekhar S.:* Principles of Stellar Dynamics, Chicago 1942, 85.
[13] *Fowler R. H.:* Statistical Mechanics, 2. kiadás, Cambridge, 1936, XV. és XVII. fejezet.
[14] Амбарцумиан В. А.: Эволюция звезд и астрофизика, Ереван 1947. I. függelék.