A KŐTÖRÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TÁRGYALÁSÁHOZ

SZÉKELY GÁBOR

Előadta az 1950. december 1-én tartott osztályülésen

A. N. Kolmogorov szovjet matematikus egy 1941-ben megjelent dolgozatában[1] az aprítási folyamatoknál keletkező szemcsék logaritmikus normális megoszlását igazolta. *Kolmogorov* elméletét speciálisan a kőtörésre *Rényi Alfréd*[2] alkalmazta. Bizonyos egyszerűsítő, de a lényegen nem változtató feltevések mellett kimutatta, hogy gépileg zúzott kő szemnagyság szerinti eloszlása közelítően logaritmikusan normális, és meghatározta a zúzási folyamathoz szükséges energiamennyiséget.

Mindkét szerző feltételezi, hogy adott anyagban a meghatározott arányban való törés valószínűsége független a nagyságtól. Tárgyalási módjuk között az eltérés az, hogy *Kolmogorov* a zúzást folytonos stochasztikus Markov-folyamatként interpretálja, *Rényi Alfréd* viszont diszkrét stochasztikus Markov-folyamatnak tekinti. Diszkrét Markov-folyamaton a következőt értjük: adva van egy rendszer, melynek állapota lépésenként változik, a változás a véletlentől függ, és annak a valószínűsége, hogy az n-edik lépésnél a rendszer egy bizonyos állapotba kerüljön, kizárólag attól függ, hogy az $(n-1)$-edik lépésnél melyik állapotban volt. A kőtörés is ilyen Markov-folyamat. Továbbá ismeretes az, hogy ha nagyszámú egymástól független véletlen ok hatása összeadódik, és ha az egyes okok hatása az összeghez képest kicsiny, a centrális középértéktétel értelmében az összeg megoszlása közelítőleg normális. A kőtörés esetében e véletlen okok hatásai szorzódnak, tehát a logaritmusaik összegeződnek, és ezért jön létre közelítőleg logaritmikusan normális eloszlás.

Érdekes lenne megvizsgálni a zúzást azon hipotézis mellett — különös tekintettel a golyósmalmok őrlési folyamatára — hogy a nagyobb szemcse törésének valószínűsége nagyobb, mint a kisebb szemcséé. Ebben az esetben a folyamat ugyanis nem Markov-féle, és tárgyalásmódja az előbbinél bonyolultabbá válik. Kérdés, hogy a szemcsék nagyság szerinti eloszlása logaritmikusan normális lesz-e az új hipotézis mellett is?

Jelen dolgozat célja, hogy a zúzás folyamatának olyan tárgyalási módját mutassa be, amely lehetővé teszi az előbb felvetett hipotézis megvizsgálását. Ez utóbbiról, amelynek kidolgozása még folyamatban van, itt nem kívánok beszámolni, a dolgozat csupán a *Rényi Alfréd* cikkében tárgyalt problémára szorítkozik, azonos hipotézis mellett, de más tárgyalásmódban, amennyiben a törési mozzanatot másképpen definiálom. A valóságban lejátszódó törés más elemi törési mozzanatok sorozatára való felbontása a végeredményen nem változtat, viszont a problémának bizonyos szempontból előnyös interpretálását teszi lehetővé.

Valamely anyag összetörése által milyen lesz a szemcsék nagyság szerinti eloszlása? Induljunk ki egy egységnyi élű kockából. A törés műveletét a következő séma szerint képzelhetjük el: az első törési mozzanatnál a kocka szétesik nyolc $1/2$ élhosszúságú kockára. A további törési mozzanatoknál mindig egy kockát választunk ki találomra, és azt nyolcadoljuk a már ismertetett módon. A valószínűségszámítási tárgyalás azt mutatja, hogy a zúzás útján nyert szemcsék nagyság szerinti eloszlása messzemenően független mind a zúzási folyamat elkezdése előtti kezdeti eloszlástól, mind a szemcsék alakjától. Így válik lehetővé egy ilyen egyszerű törési modell választása, mely a felvetett probléma teljesen elemi valószínűségszámítási tárgyalására vezet. Kérdés, hogy N törési mozzanat után mi lesz a szemcseátmérők valószínűségi eloszlása, ha egyenlően valószínűnek tekintjük bármely szemcse kiválasztását?

Jelöljük az $\frac{1}{2^k}$ élhosszúságú kocka előfordulási valószínűségét $W_N(k)$-val, az N-edik törési mozzanatnál.

Az $\frac{1}{2^k}$ átmérőjű kocka gyakoriságának várható értéke az $(N+1)$-edik törési mozzanatnál a következőképpen fejezhető ki az N-edik lépésnél fellépő várható értékkel:

$$\begin{aligned}(7N+1)\,W_{N+1}(k) = {} & W_N(k-1)\,[(7N-6)\,W_N(k)+8]+\\ & + W_N(k)\,[(7N-6)\,W_N(k)-1]+ \\ & + [1-W_N(k-1)-W_N(k)]\,(7N-6)\,W_N(k) = \\ & = 7(N-1)\,W_N(k)+8\,W_N(k-1).\end{aligned} \tag{1}$$

Ugyanis az első törési mozzanat után 8 kockánk van, a második után 15, az N-edik után $7N+1$; továbbá az $\frac{1}{2^n}$ átmérőjű kocka gyakoriságának várható értéke az $(N+1)$-edik törési mozzanatnál attól függ, hogy mit húztam az N-edik törési mozzanatnál: ez a várható érték N-nél $(7N-6)\,W_N(k)$, és ha $\frac{1}{2^{n-1}}$ átmérőjűt húztam, hozzá kell még adnom nyolc $\frac{1}{2^k}$ átmérőjűt, ha $\frac{1}{2^n}$ átmérőjűt húztam, egyet le kell vonnom, és végül ha sem $\frac{1}{2^k}$ sem $\frac{1}{2^{k-1}}$ átmérőjűt nem húztam, ez a várható érték nem változik; ezek a megfelelő húzási valószínűségekkel szorozva és összegezve, szolgáltatják az $\frac{1}{2^k}$ átmérőjű kocka gyakoriságának várható értékét az $(N+1)$-edik törési mozzanatnál.

Vezessük be a $W_N(k)$ valószínűségek generátorfüggvényét:

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N(k)\, t^k = U_N(t). \tag{2}$$

1) és (2)-ből következik, hogy

$$(7N+1)\, U_{N+1}(t) = 7(N-1)\, U_N(t) + 8t\, U_N(t), \tag{3}$$

és így

$$U_{N+1}(t) = \frac{7(N-1)+8t}{7N+1}\, U_N(t) = \left(1 + \frac{8(t-1)}{7N+1}\right) U_N(t);$$

$U_1(t) = 1$ kezdeti feltételre megoldva kapjuk, hogy

$$U_N(t) = \left(1 + \frac{8(t-1)}{7(N-1)+1}\right)\left(1 + \frac{8(t-1)}{7(N-2)+1}\right) \cdots \left(1 + \frac{8(t-1)}{8}\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{N-1} \left(1 + \frac{8(t-1)}{7j+1}\right). \tag{4}$$

Ha ezt t hatványai szerint sorba fejtjük, a keresett valószínűségeket nyerjük.

Az $U_N(t)$ generátorfüggvény logaritmusában $t = e^x$-et helyettesítve, annak x szerinti első, illetve második deriváltja az $x = 0$ helyen szolgáltatja az átlagot (m), illetve a szórásnégyzetet (σ^2).

Kiszámítva nyerjük:

$$m = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{8}{7j+1} \quad \text{és} \quad \sigma^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{8}{7j+1} - \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{8}{7j+1}\right)^2.$$

Az eloszlásfüggvény aszimptotikus értékét akarjuk kiszámítani, $N \to \infty$-re. Generátorfüggvényünket írjuk át karakterisztikus függvénnyé.

Legyen

$$U_N(e^{ix}) = F_N(x) = \sum_k W_N(k)\, e^{ixk} = \prod_{j=1}^{N-1} \left(1 + \frac{8(e^{ix}-1)}{7j+1}\right), \tag{5}$$

és vezessük be a z aszimptotikusan normalizált változót:

$$z = \frac{k - \sum_{1}^{N-1} \frac{8}{7j+1}}{\sqrt{\sum_{1}^{N-1} \frac{8}{7j+1}}}$$

A z változó karakterisztikus függvénye:

$$G_N(x) = e^{-ix\sqrt{\Sigma\frac{8}{7j+1}}} F_N\left[\frac{x}{\sqrt{\Sigma\frac{8}{7j+1}}}\right] =$$

$$= e^{-ix\sqrt{\Sigma\frac{8}{7j+1}}} \prod_{j=1}^{N-1}\left[1+\frac{8\left(\exp.\frac{ix}{\sqrt{\Sigma\frac{8}{7j+1}}}-1\right)}{7j+1}\right]. \tag{6}$$

Ebből némi számolással adódik:

$$\log G_N(x) = -\frac{x^2}{2} + O\left(\frac{x^3}{\log N}\right), \tag{7}$$

tehát, ha N elég nagy, a szemcseátmérők logaritmusainak eloszlásfüggvénye közelítőleg normális lesz.

Magyar Tudományos Akadémia,
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] Колмогоров А. Н.: Доклады Академии Наук СССР. *31* (1941). 99—101.
[2] *Rényi A.:* Építőanyag *2.* (1950) 177—183.