

A NOMOGRÁFIA ALKALMAZHATÓSÁGÁNAK HATÁRAIRÓL

HAJÓS GYÖRGY lev. tag

Előadta az 1950. december 1-én tartott osztályülésen

A matematika alkalmazásai között különleges helyet foglal el a nomográfia. A nomográfia három- vagy többváltozós kapcsolatok grafikus ábrázolásával foglalkozik. Az alkalmazott matematika e fejezetének elsősorban az a különlegessége, hogy a nomogrammok használata rendkívül gyors és áttekinthető. Nem állítjuk azonban, hogy a nomogrammok elkészítése is könnyű és gyors munka. A nomogrammok előnyeinek tulajdonítható, hogy a matematikát alkalmazó tudományoknál — itt elsősorban a műszaki alkalmazásokra gondolunk — újabban is egyre gyakrabban használják a nomogrammokokat. Hazai irodalmunkban ez a jelenség nem annyira szembeszökő. Ennek oka az, hogy egyrészt a matematikát alkalmazók nem ismerik eléggé a nomográfia hatóképességét, másrészt a matematika művelői közül kevesen foglalkoztak ezzel a tudományággal. Ennek az előadásnak célja e tényeknek megfelelően kettős: egyrészt részleteket kíván ismertetni a nomográfia alkalmazhatóságára vonatkozólag, másrészt szeretné a matematikusok figyelmét a nomográfiára s annak problémái felé terelni. E nagy célokat egy rövid előadás keretében lehetetlen elérni, s így megelégszünk néhány olyan gondolat közlésével, amely kitűzött célunk felé vezet.

A nomográfia hátrányai között első helyen azt kell emlitenünk, hogy sok egyszerű kapcsolatnak nomografikus ábrázolása nehéz, sőt sokszor lehetetlen. A »lehetetlen« szót a később mondandók fogják pontosabban körvonalazni. Éppen ezért a nomográfia kutatóinak elsődleges területe annak vizsgálata, hogy milyen kapcsolatokat hogyan ábrázolhatunk nomogramm segítségével. Előadásunk is ezt a kérdést tárgyalja. Az ismertetés és kedvkeltés céljával soroljuk fel azokat a kutatási irányokat, amelyek e kérdés megoldása felé vezetnek. A szakirodalom közhelyeit fogjuk ily módon rendszerbe, azokat legfeljebb néhány egyéni gondolattal megtoldva.

A nomográfia alkalmazhatóságának határaitra vonatkozó kutatási irányok közül a következőket soroljuk fel: 1. Adott nomogrammfajtánál megállapítandó az ilyen nomogrammal ábrázolható kapcsolatok normálmalakja. 2. Kereshetjük annak feltételét, hogy egy kapcsolat mikor ábrázolható adott nomogrammfajttal. 3. Ugyanezt a kérdést felvethetjük a kapcsolatoknak egy szűkebb osztályán belül (pl. algebrai kapcsolatokra). 4. Egy nomogrammfajttal ábrázolható ismert kapcsolattípusra példákat kereshetünk a valóban gyakorlati

területeken. 5. Ha már tudjuk, hogy egy kapcsolat adott nomogram-fajttával ábrázolható, kérdezhetjük, hogy milyen elrendezés mellett lesz ez az ábrázolás a legjobb. 6. Ha tudjuk, hogy egy kapcsolat adott nomogram-fajttával nem ábrázolható, felvethetjük a kérdést, hogy vajjon mégis mi a kapcsolatnak legjobb közelítő ábrázolása ilyen nomogrammal.

Mindezeknél a vizsgálati irányoknál nomogram-fajtákról beszéltünk. Ismeretes, hogy a nomogramoknak igen sokféle fajtájuk van, sőt nehéz volna úgy körülhatárolni a nomográfiát, hogy e körülhatároláson belül minden ábrázolásmódot felsorolhassunk. Itt még a legszokottabb nomogram-fajtáknak leírásával sem foglalkozunk. Legfeljebb megemlítjük, hogy nem kívánjuk tárgyalásunkat elvileg valamilyen nomogram-fajtára, vagy a nomogram-fajták egy csoportjára korlátozni. Így nem foglalunk állást a görbesereges és pontsoros nomogramoknak ismeretes vitájában sem. Ha mégis többet szólnunk a pontsoros nomogramokról, ez csak azért van, mert ezeknek problematikája gazdagabb és az ilyenek általánosításával előálló pont-sereges nomogramok alkalmazhatósági határa sokváltozós kapcsolatoknál határozottan tágabb.

A továbbiakban röviden szólnunk a felsorolt hat irány mindegyikéről. Nem módszeres tárgyalásról, hanem inkább ismertetésről lesz szó. E szempontokat annál is inkább hasznos sorra venni, mert a nomográfia irodalma sajnálatos módon vegyíti ezeket a szempontokat. A nomográfia kutatóinak, alkalmazóinak és használóinak szempontjai sokszor igen különbözők. Talán elmondhatjuk, hogy a nomográfia irodalmának sajnálatos áttekinthetetlensége a sokféle szemponttal közeledők együttműködésének hiányából ered.

1. *Adott nomogram-fajtánál kereshetjük azoknak a kapcsolatoknak normálalakját, amelyek ilyen nomogrammal ábrázolhatók*, azaz kereshetünk olyan általános kapcsolattípust, amely magában foglalja az adott nomogram-fajttával ábrázolható kapcsolatoknak mindegyikét, de csak ezeket.

Ennek a feladatnak elvégzése ritkán okoz nagyobb nehézséget, s az ismert egyszerűbb nomogram-fajtákra közismertek az eredmények. Itt ízelítőt akarva adni a nomográfia hatóerejéről, csak felsorolunk néhány idevágó eredményt. Párhuzamos egyenesesereges, valamint sugársoros Descartes-féle nomogramokra s egyben három párhuzamos egyenestartójú pontsoros, valamint három egymással nem párhuzamos egyenestartójú pontsoros nomogramra a keresett normálalak a következőknek bármelyike:

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0, \quad f_1 f_2 f_3 = 0, \quad f_1 + f_2 + f_3 = f_1 f_2 f_3.$$

Itt és a következőkben a nomográfia jelölésmódjának megfelelően az indexek azt jelölik, hogy a függvény mely változóktól függ. Többváltozós függvényre több index utal. Ha ugyanazt a betűt különféle indexekkel szerepeltetjük, akkor e függvények között semminemű rokonságot nem feltételezünk. Tehát közönséges jelöléssel a mondott normálalakok közül az elsőt így írjuk:

$$f(z_1) + g(z_2) + h(z_3) = 0.$$

Ezek s az ilyen alakra hozható kapcsolatok ábrázolhatók csak a fentebb felsorolt nomogramm-fajtákkal.

Általános egyenessereges nomogrammal s egyben általános pontsoros nomogrammal ábrázolható kapcsolatok normálalakja

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & 1 \\ g_1 & g_2 & 1 \\ h_1 & h_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Egyenestartójú pontsorral egymáshoz kapcsolt pontsoros nomogrammból összetett nomogrammal ábrázolható kapcsolatok normálalakja

$$\frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = \frac{f_3 + f_4}{g_3 + g_4}.$$

Ezek ábrázolásánál tehát már négy (általában görbetartójú) pontsort használunk s egy kottázatlan egyenest.

Pontseregnek nevezzük a kétkottás pontoknak egy összességét. Ilyen pontsereget azokkal a vonalakkal adhatunk meg, amelyeknek mentén az egyik kotta nem változik, tehát két görbesereggel. Két pontsereggel és egy egyenestartójú pontsorral ábrázolható kapcsolatok normálalakja

$$f_5 = \frac{f_{12} + f_{34}}{g_{12} + g_{34}}.$$

Ha két ilyen nomogrammot közös egyenestartóval egyesítünk, akkor már nyolcváltozós kapcsolatok ábrázolására alkalmas nomogrammot kapunk. Az ilyen nomogrammal ábrázolható kapcsolatok normálalakja

$$\frac{f_{12} + f_{34}}{g_{12} + g_{34}} = \frac{f_{56} + f_{78}}{g_{56} + g_{78}}.$$

2. *Kereshetjük annak feltételét, hogy egy kapcsolat ábrázolható-e adott nomogramm-fajtával.* Tehát olyan differenciálegyenleteket állíthatunk fel, amelyek teljesülése az ábrázolhatóságnak szükséges és elégséges feltétele.

Ez a vizsgálati irány rendkívül nehéz problémákat vet fel. Elég itt a pontsoros nomogrammal ábrázolható háromváltozós kapcsolatokra felvetett kérdésre utalnunk. Másrészt viszont az ilyen vizsgálatok alig nyújtanak gyakorlatilag hasznos adalékot a nomográfiának. Rendkívül hosszadalmas, magasrendű parciális differenciálegyenletek adódnak, s így a próbálkozás többnyire sokkal hamarabb vezet eredményhez, mint az ilyen egyenletekbe való helyettesítés. Elvileg természetesen nem kifogásolható a megfelelő differenciálegyenletek keresése, csupán gyakorlati jelentőségük csekély. Az ilyen természetű vizsgálatról itt nem is szólunk, többet.

3. *Kereshetjük annak feltételét, hogy egy szűkebb csoportba tartozó kapcsolat mikor ábrázolható megadott nomogramm-fajtával.* Tehát az előző kérdést vetjük

fel, de nem nagy általánosságban, hanem a kapcsolatoknak egy szűkebb osztályára. Az ilyen vizsgálatok már gyakorlati szempontból is hasznosabbnak mutakozhatnak.

Ilyen természetű vizsgálat vezetett a nomográfia egyik legtetszetősebb eredményéhez: Ha csak linearizált háromváltozós kapcsolatokkal foglalkozunk, tehát olyan $F_{123} = 0$ alakú kapcsolatokkal, melyeknél bármely z_i változóra nézve az F_{123} függvény

$$F_{123} = f_i F_{jk} + g_i G_{jk} + h_i H_{jk}^{(3)}$$

alakban írható, akkor az említett eredmény azt mondja ki, hogy minden olyan linearizált kapcsolat ábrázolható pontsoros nomogrammal, amelynek nomografikus rendszáma (*Soreau* terminológiáját használva) négy, azaz amelyiknél a fentebbi előállításban két változó esetében is csak két tag lép fel (pl. $H_{13} = H_{23} = 0$).

Az ilyen típusú eredmények vezetnek el olyan vizsgálatokhoz, hogy vajjon hogyan dönthető el, hogy egy kapcsolat beletartozik-e abba a szűkebb osztályba, amelyről vizsgálatunk szólt. Így pl. kérdezhetjük, hogy egy kapcsolatról hogyan dönthető el, hogy vajjon linearizált-e, vagy pedig linearizálható-e. Az ilyen vizsgálat már visszakanyarodik az előző pontban említett irányhoz, s az ott mondottakat itt is elismételhetnők. Megemlítjük mégis — egyben a fellépő parciális differenciálegyenletek bonyolult voltára is példát nyújtva — hogy pl. annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy kétváltozós F függvény $f_1 f_2 + g_1 g_2 + h_1 h_2$ alakban legyen írható, a következő tizenkettedrendű parciális differenciálegyenlet teljesülése (ahol az indexek parciális deriváltakat jelölnek):

$$\begin{vmatrix} F & F_1 & F_{11} & F_{111} \\ F_2 & F_{12} & F_{112} & F_{1112} \\ F_{22} & F_{122} & F_{1122} & F_{11122} \\ F_{222} & F_{1222} & F_{11222} & F_{111222} \end{vmatrix} = 0.$$

4. *Adott nomogramm-fajttal ábrázolható kapcsolatok között a gyakorlati életben is kereshetünk hasznos példákat.* Illetőleg inkább: a gyakorlati élet által nyújtott kapcsolatokat vizsgálhatjuk, hogyan tudjuk ábrázolni azokat, s így példákat kereshetünk a különféle nomogramm-fajtákra.

Talán különösnek tűnik ebben az elméleti szempontokat is kidomborító előadásban egy ilyenféle vizsgálati iránynak még a megemlítése is. Viszont gyakorlatilag ez az irány rendkívül hasznos. Kétségtelen tény, hogy a nomográfia elméleti felkészültsége még nem elégíti ki a gyakorlatot, viszont sok olyan elméletileg gyártott kapcsolatfajta tud ábrázolni, amilyenre a gyakorlati életből még nem, vagy csak alig találtak példákat. S ennek a ténynek okát nem annyira a példák valódi hiányában, hanem inkább abban sejtjük, hogy kevés elméletileg is felkészült ember találkozott a gyakorlatban felmerülő példákkal, illetőleg a valóban gyakorlati példák ismerői nem ismerik a nomográfia elméleti felkészültségét.

Természetesen — éppen a mondott ok miatt — az ilyen vizsgálat többek együttműködését kívánja meg és sok munkával jár. Itt említjük meg, hogy az ilyen vizsgálat Tudományos Akadémiánk Alkalmazott Matematikai Intézetének programjában szerepel.

5. *Ha már tudjuk, hogy egy kapcsolat egy nomogrammfajttal ábrázolható, kérdezhetjük, hogy vajon milyen elrendezés mellett lesz az ábrázolás a legjobb.* Ugyanis projektív transzformáció még a pontsoros nomogrammoknak sem árt, s így az elrendezésnek valóban nagy sokféleségével állunk szemben. Viszont sokféle elrendezés válik gyakorlatilag haszontalanná azért, hogy a leolvasás a leolvasott skála sűrűsége, vagy a metsző egyenes hajlásszögének kicsinysége miatt nagyon pontatlan.

Ezt a feladatot a nomogrammok szerkesztői próbálkozással szokták megoldani. Felvilágosítást kapunk e kérdés megoldására, ha meggondoljuk, hogy valójában v vastagságú egyenesek metszésénél a két egyenes áthatása egy rombusz, s ennek hossza az egyik egyenes irányában mérve $v \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, ahol α az egyenesek hajlásszögét jelöli. A leolvasás pontosságát az az érték szolgáltatja, amely ennek a hosszának a leolvasott skálán megfelel. Így arra az eredményre jutunk, hogy a nomogramra fektetett egyenesnek a leolvasott skálával való hajlásszögét α -val jelölve, s a leolvasott skálán kellő kis értékváltozásnak megfelelő elmozdulást t -vel jelölve, az elrendezés jóságát

$$t \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

méri, legjobb elrendezésnél ezt az értéket kell maximálisnak választani. Ennek a megválasztásnak határt szab a nomogramm nagysága. Korlátozott papírtérjedelem mellett az optimális elrendezés megkeresése nem könnyű, de mindenképpen hasznos feladat.

6. *Ha már tudjuk, hogy egy kapcsolat nem ábrázolható adott nomogrammfajttal, kereshetjük a kapcsolatnak ilyen nomogrammal való legjobb közelítő ábrázolását.* Ez a feladat természetesen akkor lép fel elsősorban, amikor a kapcsolatot nemcsak éppen egy bizonyos kiszemelt nomogramm-fajttal, hanem egyáltalában nem tudtuk ábrázolni. Ez a helyzet sok olyan kapcsolatnál, amelyet a gyakorlat ábrázolni kíván. Viszont a gyakorlatot tökéletesen kielégíti az olyan ábrázolás, amelyik ugyan elvileg kifogásolható, de csak a gyakorlat által megkövetelt pontosságot nem zavaró csekély hibát követ el. Sőt sokszor jól alkalmazható az olyan ábrázolás is, amelyik ugyan korántsem szolgáltat pontos értéket, még gyakorlati szempontból sem, viszont gyorsan felvilágosítást nyújt a keresett érték nagyságrendjére vonatkozólag. Egy másik terület, ahol a közelítő nomogrammok alkalmazása szükséges, a tapasztalati függvények ábrázolása.

Ha még a közelítő nomogramokat is a nomográfiába soroljuk, akkor elmondhatjuk, hogy a nomográfia nem ismer »lehetetlent«. Viszont a közelítő nomogramok megválasztása igen körülményes és nehézkes feladat. Ha csak háromváltozós kapcsolatoknak egyenestartójú pontsoros nomogramokkal való közelítő ábrázolásával akarunk foglalkozni (vagy ami ugyanazt a kérdést veti fel: egyenessereges nomogramokkal való közelítő ábrázolással), már akkor is nehéz problémával találkozunk. Itt csak ez utóbbi kérdés geometriai hátterét kívánjuk megvilágítani.

Egy háromváltozós kapcsolat a térben egy felülettel ábrázolható. Ennek a felületnek a gyakorlat megkívánta korlátok egy darabját jelölik ki. Ezt a felületdarabot kell olyan felülettel megközelítenünk, amely a jelzett módon ábrázolható kapcsolatnak felel meg. Az $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ alakú egyenlettel bíró felületek jönnek itt szóba, s ezeknek sokasága korántsem tekinthető át egyszerűen. Hiszen ebbe a sokaságba tartoznak pl. a koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyű másodrendű felületek is. A mondott közelítő nomogramfajtáknak egy csoportjához tehát úgy juthatunk el, hogy az ábrázolandó kapcsolatot szemléltető felületdarabot megközelítjük egy hozzá simuló, tengelyekkel párhuzamos főtengelyű másodrendű felülettel.

Nem akartuk a sokféle vizsgálati iránynak egyikét sem részleteiben tárgyalni, ezt a keret nem is engedte volna. Megelégedtünk a szempontok felsorolásával s a módszerek ismertetésével. Ilyen módon igyekeztünk a bevezetőben említett célokat legalább kis részben megvalósítani.

*Magyar Tudományos Akadémia,
Alkalmazott Matematikai Intézete.*