AZ ELMÉLETI FIZIKA ÉS TECHNIKA SORFEJTÉSEI ÁLTAL ELÉRHETŐ MEGKÖZELÍTÉSEK NAGYSÁGRENDJÉRŐL

ALEXITS GYÖRGY r. tag

Előadta az 1950. december 1-én tartott osztályülésen

Az elméleti fizika és a technika számos problémájának alapja a következő, hullámegyenlet néven ismert másodrendű parciális differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Ennek a differenciálegyenletnek megfelelő kerületi feltételek melletti megoldása teszi lehetővé a húrok, hártyák, pálcák, lemezek, héjszerkezetek rezgéseinek leírását, nagy szerepet játszik továbbá a rezgőkörök elméletében, de a kvantummechanikában is alapvető jelentőségű. Mindebből világos, hogy a hullámegyenlet matematikai tárgyalása számos, elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt fontos kérdés megoldásánál alapvető jelentőségű.

A hullámegyenlet megoldásának szokásos módszere abban áll, hogy az

$$u(t, x, y, z) = T(t)\, X(x)\, Y(y)\, Z(z)$$

előállításból kiindulva, a T, X, Y, Z függvényekről kimutatjuk, hogy azok megfelelő másodrendű, lineáris, közönséges differenciálegyenleteknek tesznek eleget, s az $u\ (t, x\ y, z)$ függvény pedig ezek sajátfüggvényei szerint haladó sorba fejthető. Az említett fizikai és technikai problémák megoldása tehát megkívánja a következő matematikai probléma tárgyalását:

Legyenek $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ egy másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet sajátfüggvényei; a megfelelő tulajdonságokkal rendelkező, adott $f(x)$ függvény a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = f(x)$$

egyenletesen és abszolút konvergens sorba fejthető. A sorfejtés c_n együtthatói *elvileg* könnyen kiszámíthatók a

$$c_n = k_n^{-1} \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx$$

képlet alapján, ahol

$$k_n = \int_a^b \varphi_n^2(x)\, dx.$$

A számítás *tényleges* keresztülvitele általában nehéz és hosszadalmas, ezért igyekszünk a sorból minél kevesebb tagot kiszámítani. Ahhoz azonban, hogy exakt módszerrel megállapíthassuk, hányadik tag után szabad megállnunk anélkül, hogy a gyakorlati probléma természetéből adódó hibakorlátot túllépnénk, meg kell tudnunk becsülni a hátralevő tagok ki nem számítása következtében elkövetett hibát. Az említett elméleti és gyakorlati problémák tehát a következő matematikai kérdés megoldását követelik tőlünk:

Bevezetve az

$$s_n(x) = \sum_{k=o}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

jelölést, megállapítandó az $|f(x) - s_n(x)|$ *hibakorlátja bármely* n *index mellett.*

Bármennyire fontos is ez a probléma, ma még az a helyzet, hogy teljesen kielégítő, gyakorlatilag is használható eredmények csupán abban az esetben állnak rendelkezésünkre, ha a $\varphi_n(x)$ sajátfüggvények sin nx vagy cos nx alakúak. illetőleg bizonyos feltételeknek eleget tevő ortogonális polinomok. Pedig gyakorlati szempontból fontos volna hasonló eredményeket elérni akkor is, ha a $\varphi_n(x)$ sajátfüggvények rendszerét a Bessel-függvények, vagy a Laguerre-, illetve Hermite-polinomok alkotják.

A trigonometrikus függvények esetében

$$s_n(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=o}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

alakú, ahol a_k és b_k a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény Fourier-együtthatói. Ennek az esetnek rendkívül kiterjedt irodalmából kiemeljük a következő szerzők műveit: *Lebesgue, Bernstein, Jackson, De la Vallée-Poussin, Krilov, Kolmogorov, Ahiezer, Krein, Favard, Nyikolszkij, Sz.-Nagy Béla.* A számos ismert eredmény közül példaként bemutatjuk a következő, gyakorlatilag talán leghasználhatóbb tételt:

Ha a 2π *szerint periodikus* $f(x)$ *függvény r-edik deriváltja minden pontban eleget tesz az*

$$|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x)| \leqq M\,|x' - x|^{\alpha} \qquad (0 < \alpha \leqq 1)$$

Lipschitz-feltételnek, akkor

$$\operatorname{Max} |f(x) - s_n(x)| \leqq \frac{AM \log n}{n^{r+\alpha}},$$

ahol A explicite megadható abszolút állandó.

E tétel és a még ismert többi eredmény alapján felmerül a következő megfordított probléma: ha ismeretes a Max $|f(x) - s_n(x)|$ hibakorlát n-től függő nagyságrendje, milyen következtetéseket lehet ebből levonni a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény és deriváltjai folytonossági viszonyaira vonatkozóan? Ez a kérdés nemcsak elméletileg igen fontos, hanem gyakorlati szempontból is érdekes, mert előfordulhat, hogy az $f(x)$ függvény tulajdonságait egyáltalában nem ismerjük, csupán $f(x)$ explicite megadott Fourier-sorát; ha pedig ebből a sorfejtésből $f(x)$ és deriváltjai folytonossági viszonyaira tudunk következtetni, akkor ezzel felvilágosítást kaphatunk a vizsgált fizikai vagy technikai jelenség természetére is. Így pl. $f(x)$ deriváltjának esetleges nem-folytonos volta jelenthet törést vagy szakadást a vizsgált anyagi folyamatban.

A probléma felvetése és a legfontosabb idevágó eredmények *Bernstein*től származnak. E tárgykörben ismert eredményeik vannak a következő szerzőknek: *Bernstein, De la Vallée-Poussin, Natanszon, Krilov, Alexits, Zygmund, Zamansky.* A problémára vonatkozó számos ismert tétel közül bemutatjuk a következőt:

Ha van olyan $f(x)$-hez konvergáló $T_0(x), T_1(x), \dots, T_n(x), \dots$ trigonometrikus polinomsorozat, melyben $T_n(x)$ pontosan n-edrendű, és ha

$$\operatorname{Max} |f(x) - T_n(x)| \leqq \frac{K}{n^{r+\alpha}} \quad (K = \text{konst.}, 0 < \alpha < 1),$$

akkor a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvénynek van r-edik deriváltja, és az eleget tesz egy

$$|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x)| \leqq M\,|x' - x|^{\alpha}$$

alakú Lipschitz-feltételnek.

A trigonometrikus függvények mellett még aránylag elég messzemenő eredményeket ismerünk akkor, ha $\varphi_n(x)$ egy teljes ortogonális és normált polinomrendszer n-edik tagja. Ez annyit jelent, hogy egy alapintervallumban, amely az egyszerűség kedvéért legyen $-1 \leqq x \leqq 1$, adva van egy $w(x) > 0$ súlyfüggvény, ez egyértelműen meghatároz egy $p_n(x)$ n-ed fokú polinomot, ha kikötjük, hogy x^n együtthatója legyen pozitív és teljesüljön a

$$\int_{-1}^{+1} w(x)\, p_i(x)\, p_j(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}$$

ortogonalitási és normálási feltétel. Ez esetben

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, p_k(x),$$

ahol

$$c_k = \int_{-1}^{+1} w(x)\, f(x)\, p_k(x)\, dx.$$

Ilyen típusú speciális polinomokra *Bernstein*nek van számos eredménye; az újabb irodalomból elsősorban *Szegő* és *Geronimusz* munkáit kell megemlítenünk. Az általános esetben *Alexits* kezdte meg a kérdés vizsgálatát; módszerét *Sz.-Nagy Béla* javította meg, ennek felhasználásával sikerült a következő jól használható és teljesen általános eredményt elérni (*Alexits*, I. Magyar Matematikai Kongresszus):

Ha $f(x)$ a $-1 \leqq x \leqq 1$ intervallumban r-szer differenciálható és r-edik deriváltja egy *α-ad rendű Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor a*

$$\operatorname*{Max}_{-1+h \leqq x \leqq 1-h} \left| f(x) - s_n(x) \right| \leqq \frac{K_h \log n}{n^{r+\alpha}} \qquad (K_h = \text{konst.})$$

hibabecslés érvényes minden olyan $-1+h \leqq x \leqq 1-h$ belső részintervallumban, ahol $w(x)$ is korlátos, és a $p_n(x)$ polinomok is egyenletesen korlátosak.

Eszerint tehát az ortogonális polinomsorokkal elérhető megközelítés az alapintervallum belsejében nagyjából ugyanolyan jó, mint amilyen a Fourier-soré. Ezzel azonban egyelőre el is értük erre a problémakörre vonatkozó, gyakorlatilag is használható ismereteink határát, ami azért jelent nagy hiányt, mert éppen a technikus számára legfontosabb Bessel-függvények, valamint a Laguerre- és Hermite-polinomok szerint haladó sorfejtésekkel való megközelítésekre vonatkozóan az eddigiek alapján semmit sem tudunk mondani. Igaz ugyan, hogy *Jackson* és tanítványai a Sturm-Liouville-függvények szerinti kifejtésekre vonatkozóan bebizonyították azt, hogy ha $f(x)$ és deriváltjai bizonyos feltételeknek tesznek eleget, akkor a megközelítés nagyságrendje ez esetben Bn^{-r}, de e tételek csupán a B állandó létezését bizonyítják be anélkül, hogy annak nagyságát az adott feltételek alapján explicite meg lehetne határozni. Az ilyen, elméletileg egyáltalában nem érdektelen eredmény a gyakorlat számára semmit sem használ, mert ha B nagyságát explicite nem ismerjük, nem állapíthatjuk meg, hogy az n-edik taggal befejezve a sorfejtés kiszámítását, nem követtünk-e el a megengedettnél nagyobb hibát.

A további kutatások számára talán útmutatóul szolgálhat a következő, *Lebesgue*től származó módszer:

Legyen az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban definiált $\varphi_n(x)$ ortogonális és normált függvények rendszere olyan, hogy minden n-re létezzék egy

$$\Phi_n(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \ldots + a_n \varphi_n(x)$$

függvény, mely eleget tesz a

$$\operatorname{Max} |f(x) - \Phi_n(x)| \leqq \operatorname{Max} |f(x) - \Psi_n(x)|$$

egyenlőtlenségnek bármilyen lineáris kombinációja is $\Psi_n(x)$ az első $n+1$ φ-függvénynek. Első teendőnk megállapítani, hogy az $f(x)$ függvények egy C osztályára nézve mekkora az

$$E_n(f) = \operatorname{Max} |f(x) - \Phi_n(x)|$$

érték. Ha ez sikerült, mint ahogy *Bernstein*nek polinomok esetében sikerült, akkor megállapítandó az ortogonális és normált $\varphi_n(x)$ függvények rendszeréhez tartozó

$$L_n(x) = \int_a^b \left| \sum_{k=o}^{n} \varphi_k(t)\, \varphi_k(x) \right| dt,$$

úgynevezett Lebesgue-függvények felső korlátja, melyet λ_n-nel fogunk jelölni. Figyelemmel arra, hogy

$$\operatorname{Max} \left| \Phi_n(x) - s_n(x) \right| \leq \operatorname{Max} \int_a^b \left| \Phi_n(t) - f(t) \right| \left| \sum_{k=o}^{n} \varphi_k(t)\, \varphi_k(x) \right| dt \leq E_n(f)\, \lambda_n,$$

azonnal következik, hogy

$$\operatorname{Max} |f(x) - s_n(x)| \leq \operatorname{Max} |f(x) - \Phi_n(x)| + \operatorname{Max} |\Phi_n(x) - s_n(x)| \leq E_n(f)\,(1 + \lambda_n).$$

Ez a módszer vezetett sikerre a $-1 \leq x \leq 1$ intervallumban definiált ortogonális polinomok szerint haladó sorfejtések maradéktagjának hibabecslésénél, és remélhető, hogy ilyen módon sikert érhetünk el akkor is, ha a végtelen intervallumban definiált Laguerre- vagy Hermite-polinomok szerint haladó sorfejtéseket vizsgáljuk.

Műszaki Egyetem
III. Matematikai Tanszéke, Budapest.

IRODALOM

A tárgyalt kérdés-komplexus irodalma igen nagy, ezért e helyen még a legfontosabb eredeti művek felsorolására sem vállalkozhatunk. Az egyes kérdésekről jó tájékoztatót nyujtanak a következő művek:

Ахиезер Н. М.: Лекции по теории аппроксимации. Москва, 1947.
Jackson D.. The theory of approximation. New-York, 1930.
Натансон И. П.: Конструктивная теория функции. Москва, 1950.
Николский С. М.: Математика в СССР за тридцать лет. Москва, 1948. 288—318 *l.*