

MAGASABBFOKÚ ALGEBRAI EGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSÁRÓL

TURÁN PÁL lev. tag

Előadta az 1950. december 1-én tartott osztályülésein

Magasabbfokú algebrai egyenletek megoldásának szükségességére a geometria, a csillagászat, a statisztika, az elméleti fizika és gyakorlati technika számos kérdése vezet. Az elsőre vonatkozólag elég a másodrendű felületek főtengelyei irányának meghatározására utalnom. A csillagászati alkalmazásokra már az a tény is utal, hogy az olyan n -edfokú algebrai egyenleteket, melyek egy számokból álló n -edrendű determinánsból úgy keletkeznek, hogy az átlós elemek mindegyikéből x -et levonunk, szekuláris egyenleteknek nevezzük. A statisztikára vonatkozólag csak Gumbel német statisztikus vizsgálataira utalok, a népesedés statisztikájára vonatkozólag. Jól ismert a mechanikából, hogy egy véges sok tömegpontból álló rendszert egyensúlyi helyzetéből kissé kimozdítva, a mozgás meghatározására egy magasabbfokú algebrai egyenlet megoldása szükséges, ahol a komplex gyökök is lényeges szerepet játszanak. A technikai fizikából vett két igen érdekes példát köszönhetek Egerváry professzor közlésének. Az első egy tengelyen forgó n darab kerékre vonatkozik. Az új. n. kritikus szögsebességek meghatározása egy $2n$ -edfokú algebrai egyenletből történik. A későbbiek szempontjából nem érdektelen már most megjegyeznünk, hogy itt gyakorlatilag legfontosabb a legkisebb kritikus szögsebesség értéke, ami a megfelelő algebrai egyenlet legkisebb gyökének meghatározását kívánja. A másik példa n számú induktíve kapcsolt rezgőkörre vonatkozik, ami sok technikai problémában jön elő; a jelenség leírása itt is $2n$ -edfokú algebrai egyenletre vezet, ahol természetesen éppen a komplex gyökök meghatározása a fontos. Hogy e kérdés valóban foglalkoztatja a fizikusokat, azt pl. Schäfke német fizikus értekezése is mutatja, mely 1948-ban jelent meg a Mathematische Nachrichten c. berlini akadémiai folyóiratban; ebben a két rezgőkör esetét részletesen tárgyalja. A spektroszkópiából jól ismert, hogy egy vonalas színekép mágneses térben egyszerű vonalakra esik szét, és így a multiplált termék szétbomlásának vizsgálata magasabbfokú algebrai egyenlethez vezet. Mindezen tények és a matematika sok belső teoretikus kérdése érthetővé teszik azt a sok erőfeszítést, mely a babilóniaiak óta történt az algebrai egyenletek megoldására. Nem lehet itt célom, hogy e fejlődést még csak nagy vonalaiban is vázoljam; már eleve csak azokra a megoldási módokra szűkítem mondanivalóimat, melyek numerikus kiszámításra alkalmas közelítő módszerekkel foglalkoznak. Ezek nagyjából három csoportra oszthatók. Az elsőbe a Newtonnal kezdődő iterációs módszerek tartoz-

nak. Maga a Newton-féle eljárás abban áll, hogy az $f(x) = 0$ egyenlet megoldására kiindulunk az $y = f(x)$ görbe egy $(x_1, f(x_1))$ pontjából, és itt meghúzzuk az érintőt. Ha az érintő $x = x_2$ -ben metszi az abszcissa-tengelyt, akkor azt az eljárást az $(x_2, f(x_2))$ pontra alkalmazzuk és így tovább. Ennek az eljárásnak — és az összes többi iterációs eljárásnak — több hátránya van. Az első az, hogy az eljárás általában nem konvergens a kezdőérték tetszőleges megválasztása esetén. Ez áll elő pl. minden olyan valós együtthatós polinomnál valós kezdőérték mellett, melynek nincs valós gyöke, amit persze a megoldandó egyenletből nem lehet előre tudni. Itt tehát nem egyes polinomok extravaganciáiról van szó. És, ha az eljárás valós gyök esetén esetleg konvergál is, általában nem lehet megmondani egy bizonyos k -számú lépés után, hogy a gyök a k -adik lépés eredményétől legfeljebb milyen távol van. Reménytelen feladat ezt az eljárást úgy módosítani, hogy adott ε precíziót előírva *ettől függően fix* számú lépésben vagy egy valós gyöknek ε -nyi környezetébe jussunk, vagy állíthassuk, hogy nincsen valós gyök. Komplex gyökök esetén mindeme nehézségek még lényegesen fokozódnak. A második típusúak egyike, mely már komplex gyökök meghatározására is alkalmas, *Melentyev* szovjet matematikustól való — én *Hajós* professzor közléséből ismerem. Ez abban áll, hogy a megoldandó $f(z) = 0$ egyenletbe z helyett $(x_0 + iy)$ -t írunk valamilyen fix x_0 -val és az euklidesi algoritmussal megkeressük a

$$Rf(x_0 + iy)$$

$$If(x_0 + iy)$$

legnagyobb közös osztóját. Ha van ilyen, és az $(y - y_0)^k$ alakú, akkor $(x_0 + iy_0)$ $f(z)$ -nek épp k -szoros gyöke. Ha a legnagyobb közös osztó nem ilyen egyszerű alakú, akkor tehát egy újabb egyenlet *valós* gyökeinek meghatározására van szükség. Ha a legnagyobb közös osztó nulladfokú, akkor más x_0 értékekkel ismétелendő az eljárás, és interpolációval olyan x_0 -t kell keresni, melynél az euklidesi algoritmus utolsó maradéka 0. A fellépő operációk egyszerűsége mellett azonban egy adott ε precízióhoz tartozó operációk száma itt sem korlátozható, és így a közelítőérték approximációjának foka általában nem ítéлhető meg. A módszerek harmadik csoportja, melyet itt kissé részletesebben óhajtok diszkutálni, *Bernoulli* *Dánieltől* indult ki. Az ő gondolatát a XIX. század elején egymástól függetlenül és kb. egyidőben lényegesen továbbfejlesztették *Dandelin*, *Lobachevskij* és *Graeffe*; az irodalomban a módszer *Graeffe—Bernoulli* módszer néven ismert. Ha a megoldandó egyenlet $f_0(z) = 0$, és gyökei $z_1, z_2, \dots, z_n$, akkor e módszer első lépése abban áll, hogy képezi rekurzíve az

$$f_{l+1}(z) = (-1)^n f_l(\sqrt{z}) f_l(-\sqrt{z})$$

kifejezéseket, az ú. n. Graeffe-transzformáltakat $l = 0, 1, \dots, (v-1)$ -re. Könnyen belátható, hogy $\sqrt{z}$ fellépése csak látszólagos, minden Graeffe-transzformált n -edfokú polinom, melynek együtthatóit tehát ismerjük és a v -edik transzformált gyökei éppen

$$z_1^{2^v}, z_2^{2^v}, \dots, z_n^{2^v}.$$

Ekkor, ha

$$f_v(z) = a_{0,v} + a_{1,v}z + \dots + a_{n,v}z^n \quad (1)$$

és pl.

$$|z_1| < |z_2| < \dots < |z_n|, \quad (2)$$

akkor

$$|z_j| = \lim_{v \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j-1,v}}{a_{j,v}} \right|^{2^{-v}}, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Ily módon a gyökök *abszolút értékei* elvben meg volnának határozva; magukat a gyököket meghatározhatjuk, ha olyan h helyet találunk, hogy

$$|z_1 - h| < |z_2 - h| < \dots < |z_n - h| \quad (4)$$

legyen; ekkor a $\varphi(\xi) = f_v(\xi + h) = 0$ gyökei $\xi_v = z_v - h$ ($v=1, 2, \dots, n$), (2) teljesül, azaz $\varphi(\xi)$ v -edik Graeffe-transzformáltját

$$\varphi_v(\xi) = \sum_{j=0}^n b_{j,v} \xi^j$$

-vel jelölve

$$|z_j - h| = |\xi_j| = \lim_{v \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{j-1,v}}{b_{j,v}} \right|^{2^{-v}} \quad (5)$$

Tehát a z_j gyökök csak a (3) és (5) alatti megfelelő körök metszéspontjai lehetnek; hogy ezek közül melyik felel meg, az *elvileg* helyettesítéssel nyerhető.

A fenti eljárással kapcsolatban, mely eléggé átment a gyakorlatba, rögtön több kérdés adódik. Először is nincs módszerünk annak eldöntésére, hogy (2) teljesül-e, tehát a módszer hogyan alkalmazható. E kifogás érdekes módon explicite csak 1939-ben merült fel *San-Juan* egy dolgozatában; *Runge* enciklopédia-cikkében még egy szó sincs a módszer érvényességi korlátozásáról és még *Fricke* 1924-ben megjelent algebraja a *Graeffe-Bernoulli*-módszert ismertetve óvatosan bár, de úgy ír, a (2) feltevésről, mintha azt el lehetne hagyni. Pedig könnyű olyan polinomot találni, melyre a módszer kimondottan rossz eredményre vezet. Legyen $f_0(z) = z^3 - 1$. Ennek minden Graeffe-transzformáltja önmaga, azaz a (3) alatti límeszek vagy értelmetlenek, vagy értékük 0 a helyes 1 helyett. Másrészt fenti h meghatározására sincs módszerünk. Továbbá a (3) és (5) alatti formulák gyakorlati számításra már csak azért sem alkalmasak, mert bennük límesz szerepel. Gyakorlati számításra csak úgy lehetnének alkalmasak, ha adott ε precízióhoz meg lehetne adni ε -tól és akár az egyenlettől függő olyan v -t, hogy v Graeffe-lépéssel már egy gyök ε -nyi pontossággal meghatározható.

Az előbbi példa szerint még az sem várható az általános esetben, hogy ilyen módon a gyökök *abszolút értékei* approximálhatók legyenek a mondott értelemben. Az előző példa kézenfekvő módosításával könnyű tetszőlegesen nagy ν -höz oly egyenletet konstruálni, melyre (2) teljesül, és mégis ν Graeffe-lépés után a kapott

$\left| \frac{a_{j-1,\nu}}{a_{j,\nu}} \right|^{2^{-\nu}}$ számok $|z_j|$ -től $\frac{1}{10}$ -nél messzebb vannak; vagyis még (2) teljesülése esetén sem elégti ki a módszer a gyakorlati számolásra vonatkozó elvi követelésünket.

A Graeffe-Bernoulli-módszer olyan módosítása, mellyel az összes gyökök a fenti értelemben approximálhatók, mindmáig nem ismert. Ha ellenben a gyökök *abszolút értékeinek* approximációjára szorítkozunk, akkor e feladatot *San-Juan* első eredményei után *Ostrovski* oldotta meg tőle függetlenül, 1940-ben, egy 160 oldalas dolgozatban. Ez persze egyben megoldja a valós gyökök approximációjának hasonló alakban felvetett kérdését is. *Ostrovski* eljárása a Newton-majoráns fogalmán alapszik. Egy $f(z) = c_0 + \dots + c_n z^n$ polinom Newton-féle majoránsán azon pozitív együtthatós

$$M(f) = \sum_{j=0}^n T_j z^j$$

polinomot érti, mely pl. grafikusan a következőkép szerkeszthető meg: Képezzük a

$$P_j = (j, \log |c_j|) \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (6)$$

pontokat és ezek legkisebb konvex majoránsát. Ez úgy történik, hogy $(0, \log |c_0|)$ -ből kiindulva meghúzzuk a pozitív abszcissa-tengellyel legkisebb, esetleg negatív szöget alkotó olyan félsugarat, hogy az összes P_j -k még ez alatt legyenek, de már legalább egy P_{j_1} ezen rajta legyen. Ha a rajtalevő P_j -k közül a legkisebb abszcisszájú $(j_1, \log |c_{j_1}|)$, akkor az ebből kiinduló félsugarak közül vegyünk megint olyat, hogy az összes j_1 -nél nagyobb indexű P_j -k ez alatt fekszenek, de legalább egy P_{j_2} rajta legyen s. i. t. Ez a processzus véges sok lépésben befejeződik, a kapott törtvonal felülről konvex, P_0 -ból indul ki, és P_n -ben végződik. Akkor ezen törtvonalnak a j abszcisszához tartozó ordinátája lesz $\log T_j$ (azaz $|c_0| = T_0, |c_n| = T_n$). Ezen T -k segítségével tudja *Ostrovski* az $f_0(z) = a_0 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n = 0$ egyenlet $z_1, z_2, \dots, z_n$ gyökeinek abszolút értékeit közelítőleg meghatározni. Ismertessük eredményét rövidség kedvéért csak a legnagyobb abszolút értékű $|z_n|$ esetében. $f_0(z)$ -nek első ν Graeffe-transzformáltját képezve legyen

$$M(f_\nu) = \sum_{j=0}^n T_{j,\nu} z^j$$

az $f_\nu(z)$ ν -edik Graeffe-transzformált Newton-majoránsa, ahol persze $T_{n,\nu} = 1$

Ekkor $|z_n|$ közelítő értéke egyszerűen $T_{n-1, \nu}^{2^{-\nu}}$ lesz, éspedig úgy, hogy

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2^{-\nu}} \leq \frac{|z_n|}{T_{n-1, \nu}^{2^{-\nu}}} \leq 2^{2^{-\nu}} \quad (7)$$

A többi gyökökre hasonló egyenlőtlenségeket adott meg. Ezek jelentősége nemcsak abban áll, hogy az approximáció foka ebben az elméletben először volt becsülhető, hanem, hogy az alsó és felső becslések függetlenül $f_0(z)$ együtthatóitól, csak a fokától és ν -tól függnek. Ha pl. egy hetedfokú egyenletnél $|z_7|$ -et 1%-nyi pontossáig akarjuk megközelíteni — ami praktikus célokra megfelel —, ez elérhető, ha 8 Graeffe-lépést teszünk, függetlenül attól, hogy milyenek az egyenlet együtthatói; a szükséges elemi operációk száma persze szintén *előre megadható*.

Az eljárás keresztülvitelénél hibaforrás a rajzolás is. Ennek kiküszöbölésére *Ostrowski* tisztán aritmetikus módszert is megad. Nyilván elég az előbbi poligon csúcsait ismerni; ezek abszcisszáit nevezi főindexeknek. Egy $(j, \log |a_j|)$ pont $0 < j < n$ mellett akkor és csak akkor lesz csúcsa a poligonnak, azaz j akkor és csak akkor lesz főindex, ha

$$\min_{0 < \mu \leq n-j} \left| \frac{a_j}{a_{j+\mu}} \right|^{\frac{1}{\mu}} > \max_{0 < \mu \leq j} \left| \frac{a_{j-\mu}}{a_j} \right|^{\frac{1}{\mu}}$$

Ez az eljárás legkellemetlenebb része; a gyökvonások a közönséges típusú számológépekkel direkt nem végezhetők el, és az eljárás legalább n és legfeljebb n^2 számú gyökvonást tesz szükségessé. Tehát annak ellenére, hogy az eljárás elméletileg már semmi kívánnivalót nem hagy maga után, szükség van olyan eljárásra, mely a kívánt elméleti előnyök mellett kevesebb gyökvonást igényel, és így gyakorlatilag jobban használható.

Egészen másirányú vizsgálatok kapcsán, *Ostrowski* eredményeinek ismerete előtt, vettem észre, hogy ilyen eljárás valóban található, sőt ilyen eljárások egész skálája adható meg. Bizonyítások nélkül csak egy ilyen szabály megadására fogok szorítkozni, mely azonban karakterisztikus, és ennek numerikus keresztülvitelére vonatkozó megjegyzésekre, összehasonlítva azt *Ostrowski* módszerével. Ha ismét $f_0(z) = 0$ n -edfokú egyenlet a megoldandó, melyben az n -edfokú tag együtthatója 1, és melynek $z_1, \dots, z_n$ gyökeire $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|$, akkor $|z_n|$ approximációjára készítsük el most is először $f_0(z)$ első ν Graeffe-transzformáltját. Ha az utolsó

$$\tilde{f}_\nu(z) = a_{0,\nu} + a_{1,\nu}z + \dots + a_{n-1,\nu}z^{n-1} + a_{n,\nu}z^n, \quad a_{n,\nu} = 1,$$

akkor képezzük az $S_1, S_2, \dots, S_{2n}$ mennyiségeket az

$$\begin{aligned}
S_1 + a_{n-1, \nu} &= 0 \\
S_2 + a_{n-1, \nu} S_1 + 2a_{n-2, \nu} &= 0 \\
&\vdots \\
S_n + a_{n-1, \nu} S_{n-1} + \dots + na_{0, \nu} &= 0 \\
&\vdots \\
S_{2n} + a_{n-1, \nu} S_{2n-1} + \dots + a_{0, \nu} S_n &= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

rekurzív formulák alapján. Ekkor $|z_n|$ közelítő értéke $\left(\max_{1 \leq j \leq 2n} |S_j|^{\frac{1}{j}} \right)^{2^{-\nu}}$ lesz ;

pontosabban szólva

$$\left(\frac{1}{n} \right)^{2^{-\nu}} \leq \frac{|z_n|}{\left(\max_{1 \leq j \leq 2n} |S_j|^{\frac{1}{j}} \right)^{2^{-\nu}}} \leq 2^{-\nu} \tag{10}$$

Ami a hibakorlátokat illeti, a határok (10)-ben pontosan megegyeznek az Ostrovski-féle határokkal ; nagyon valószínű azonban, hogy (10)-ben a felső korlát 1-gyel pótolható. Ezt abban a speciális esetben, mikor $f_0(z)$ valós együtt-hatós, és ennek maximális abszolút értékű gyökei között van valós is, valóban be is lehetett bizonyítani a nácik által 22 éves korában meggyilkolt, rendkívül tehetséges barátom, *Schweitzer Miklós* egy gondolata segítségével, melyet velem 1942-ben közölt levélben. Az a skálája az ilyen szabályoknak, melyekre céloztam,

abban áll, hogy a $|z_n|$ -et approkszimáló kifejezést $\left(\max_{1 \leq j \leq cn} |S_j|^{\frac{1}{j}} \right)^{2^{-\nu}}$ alakban

vesszük fel, ahol c egy numerikus állandó, mely ≥ 1 ; a felső hibakorlát (10)-ben növekvő c -vel valószínűleg csökkenthető.

Térjünk át a számítási eljárás elemzésére és Ostrovski módszerével való praktikussági összehasonlításra. $G(x) = \sum_{\nu=0}^n d_{\nu} x^{\nu}$ polinom Graeffe-transzformáltjának képzése a $G(x) G(-x)$ szorzás elvégzéséből áll, ami $\binom{n+2}{2}$ számú

szorzást jelent számológépen. Ez a szám rögtön csökkenthető azon észrevétel által, hogy e szorzat a páros és páratlan kitevőjű hatványok szétválasztásával

$$\left(\sum_{2\nu \leq n} d_{2\nu} x^{2\nu} + \sum_{2\nu+1 \leq n} d_{2\nu+1} x^{2\nu+1} \right) \left(\sum_{2\nu \leq n} d_{2\nu} x^{2\nu} - \sum_{2\nu+1 \leq n} d_{2\nu+1} x^{2\nu+1} \right)$$

alakba írható, azaz

$$\left(\sum_{2\nu \leq n} d_{2\nu} x^{2\nu} \right)^2 - \left(\sum_{2\nu+1 \leq n} d_{2\nu+1} x^{2\nu+1} \right)^2$$

ami csak $\left(2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \left(2 + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right)$ számú szorzást jelent, tehát kb. felét az

előbbinek. Bizonyos körülmények között lényegesen megrövidíti a Graeffe-transzformált meghatározását Pál Sándornak, az Alkalmazott Matematikai Intézet tagjának egy szellemes megjegyzése, amellyel ez a meghatározás számok szorzására vezethető vissza azon egyetlen feltevés mellett, hogy az együtthatók véges tizedestörtek. Ez persze rögtön maga után vonja azt, hogy alkalmas számmal való szorzással minden együttható egész lesz. A polinomot mindjárt ebben az alakban felvéve, a Graeffe-transzformált képzése nyilván négy olyan szorzás elvégzését jelenti, melyben pozitív együtthatós polinomokat kell összeszorozni; elég tehát pozitív együtthatós polinomok szorzására szorítkozni.

Ha ezek

$$\sum_{\nu=0}^{m_1} r_{\nu}' x^{\nu}, \quad \sum_{\nu=0}^{m_2} r_{\nu}'' x^{\nu}, \quad 0 \leq r_{\nu}' \leq K, \quad 0 \leq r_{\nu}'' \leq K, \quad (11)$$

akkor először is határozzuk meg azon legkisebb egész k -t, melyre

$$10^k > (m_1 + 1)(m_2 + 1)K^2. \quad (12)$$

Pál gondolata abban áll, hogy a két összeszorozandó (11) alatti polinomba x helyett 10^k -t tesz, és egyszerűen a kapott számokat szorozza össze számológépen. A (12) feltétel teljesülése biztosítja, hogy a kapott szorzatban a legkisebb helyiértékű k jegy alkotta szám lesz a szorzatpolinom konstans tagja, a következő k jegy alkotta szám a szorzatpolinomban x együtthatója s i. t.

A módszer következő lépése az S_{ν} -k számítása a (9) alatti rekurzív képletekből. Mivel itt csak összeadásokról és szorzásokról van szó, számológéppel dolgozva e lépés nem okoz elvi nehézséget. Itt legfeljebb arról lehet szó, hogy vajjon nem elég-e már az első n -darab S értékének ismerete ahhoz, hogy egy (10)-hez hasonló szabály legyen felállítható, ami a számítás lényeges rövidítését jelentené. Ilyen szabályt valóban találtam; azonban $|z_n|$ közelítő-értéke

gyanánt $\left(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j| \right)^{\frac{1}{j}}$ -t véve a (10) alatti helyett, jelenleg csak a $\left\{ \frac{1}{\log 2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right\}^{2^{-\nu}}$ mennyiséget tudom biztosítani, mint felső relatív hibakorlátot. Nagyon valószínű, hogy ez is helyettesíthető $2^{2^{-\nu}}$ -vel, sőt esetleg $c^{2^{-\nu}}$ -vel, ahol c egy n -től független numerikus állandó, mely < 2 .

A befejező lépés az egyetlen, ahol gyökvonás kell. Ezek száma a (10) alatti szabály alkalmazásával $2n$, ami az előbb mondottak szerint n -re is csök-

kenthető, míg *Ostrovski* módszerével e szám a legkedvezőbb esetben $n + 1$, és a legkedvezőtlenebb esetben $n^2 + 1$, ami tehát lényegesen nagyobb lehet. Ez annál is inkább esik a latba, mert mind a Graeffe-transzformáltak együtthatói, mind az S_ν számok igen nagyok, tehát a logaritmussal való gyökvonás komoly hibaforrás, a számológép pedig nem tud direkte közelítő k -adik gyököt vonni egy a számból, csak az

$$x_{e+1} = \frac{1}{k} \left\{ (k-1) x_e + \frac{a}{x_e^{k-1}} \right\}$$

iteráció segítségével. Egyáltalán az a tény, hogy olyan nagy számok lépnek fel a Graeffe-transzformáltak képzésénél, mind *Ostrovski* módszerét, mind a (10) alatti szabály alkalmazását csak igen nagy kapacitású számológépeknél teszi praktikussá. Az együttható-kerekítésnek természetes módszere, mint *Ostrovski* kimutatta, a Graeffe-transzformáltak képzésénél igen nagy hibákra vezet. *Ostrovski* példája

$$\Phi(z) = (z-1)^4, \quad \Lambda(z) = \Phi(z) - 4 \cdot 9 \cdot 10^{-5} z^2.$$

Ekkor $\Phi(z)$, ill. $\Lambda(z)$ 5-ik Graeffe-transzformáltjai

$$\Phi_5(z) = (z-1)^4, \quad \Lambda_5(z) = z^4 - 12,8z^3 + 24,1z^2 - 12,8z + 1,$$

melyek eltérése szemlátomást lényeges. Tehát a Graeffe-transzformáltak pontosan számolandók, legfeljebb az utolsót kivéve. Más a helyzet az S_j -k számításánál. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy valós együtthatós $f_\nu(z)$ -ről van szó. (9) első egyenletéből $a_{n-1,\nu}$ megfelelő kerekítésével S_1 -re alsó és felső becslés nyerhető. Ezek segítségével (9) második egyenletéből S_2 -re nyerünk alsó és felső becslést; pl. az alsó becslést úgy, hogy S_1 helyébe az előbb nyert $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{alsó} \\ \text{felső} \end{smallmatrix} \right\}$ becslést írjuk, aszerint, hogy $a_{n-1,\nu} \left\{ \begin{smallmatrix} \text{negatív} \\ \text{pozitív} \end{smallmatrix} \right\}$. Ezt folytatva, minden S_j -re *egyszerűen kezelhető* alsó és felső közelítő értékeket nyerhetünk hibakorlátokkal, azaz a

$$\max_{1 \leq j \leq 2n} |S_j|^T$$

-re alsó és felső becslés nyerhető. Ez persze az $|z_n|$ -re (10) által adott korlátokat valamivel rontja, de még mindig *explicité megadható* korlátokat ad számára.

A módszernek egy további előnye is lehet *Ostrovskiéval* szemben. Mint tudjuk, a szpektroszkópiában fellépő csupa valós gyökű szekuláris egyenletek olyanok, hogy az együtthatók nem számok, hanem bizonyos paraméterek függvényei. Tegyük fel, pl. hogy az együtthatók egy t paraméter racionális függvényei. Ekkor, *Ostrovski* módszerét követve, a paraméter különböző értékei mellett a Newton-poligonok egészen mások lehetnek, úgy, hogy a gyököknek t -től való függése egyáltalán nem áttekinthető. A (10) alatti módszert alkalmazva mind a Graeffe-transzformáltak együtthatói, mind az S_ν -k, t -nek *explicité meg-*

adott racionális függvényeiként jelentkeznek. Vagyis az $|S_n|^{\frac{1}{n}}$ mennyiségek, mint t -nek egyszerű alakú függvényei állanak előttünk, és ezek felső burkolója adja a maximális abszolút értékű gyök függését t -től *uralható hibával*.

Távol áll tőlem, hogy fenti eredmények gyakorlati alkalmazhatóságát túlbecsüljem, bár kétségtelen, hogy bizonyos esetekben jól használhatók lesznek és az alapelv esetleg egy megoldógép konstrukciójának alapjául szolgálhat. Arról sem akarok itt beszélni, hogy az a módszer, mellyel ezeket a megállapításokat nyertem, a matematika milyen más részeiben ad új és érdekes eredményeket. Csak arról akarnék még néhány szót szólni, hogy milyen célkitűzések vezettek ehhez a módszerhez. A célkitűzések lényegileg a prímszámok eloszlására vonatkoztak, ezt pedig az, aki a tiszta és az alkalmazott matematika éles elválasztását tartani akarná, feltétlenül a tiszta matematika körébe sorolná. Még jobban körülhatároltan a Riemann-féle zeta-függvényre vonatkoztak, mely már eddig is az analízis oly sok fejezetének adott erős impulzusokat; gondoljunk csak *Hadamard*, *Lindelöf* és *H. Bohr* munkáira. Az előbb vázolt eredmények mégis azt mutatják, hogy az e célkitűzések által létrehozott módszerek oly kérdéseknél is tudnak új szempontokat és eredményeket produkálni, melyeket a technikai gyakorlat vet fel. Ezen eredmények tehát újabb szerény alátámasztást adnak ahhoz az állításhoz, hogy a tiszta és alkalmazott tudomány közti határ egyáltalán nem éles. És itt nem is arra gondolok, amit legtöbbször érvül szoktak felhozni, hogy a tiszta matematika egyes alkotásait, mint pl. a csoportelméletet, csak jóval felfedeztetésük után alkalmazták direkte a fizikában. Senki sem gondol arra, hogy egy hidrogénatom energianívói közül a prímszám indexűek valamilyen fizikai sajátsággal vannak kitüntetve. De arra igenis lehet gondolni — mint ahogy az jelen esetben is történt —, hogy *módszerek*, melyeket pl. prímszámelméleti kérdések megoldására csináltak, alkalmazhatók lesznek gyakorlati kérdések, vagy olyan elméleti kérdések megoldásában, melyek a gyakorlathoz közelebb állanak. Van erre a magaménál sokkal jobb példa is. *Vinogradov* szintén prímszámproblémák, elsősorban a nevezetes Goldbach-sejtés megoldására alkotta meg hatalmas erejű trigonometrikus-szita módszerét, és *Linnik* alkalmazni tudta a *módszert* a valószínűségszámításban, a matematikának abban a fejezetében, melyben minden tétel predesztinálva van gyakorlati alkalmazásra. De e gondolatokkal tulajdonkép nyitott kapukat döngetek. Bővebb fejtegetésük teljesen felesleges; a tények önmagukért beszélnek.

Budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete.