A KINETIKUS GÁZELMÉLET BIZONYOS KÉRDÉSEIRŐL

EGERVÁRY JENŐ r. tag és TURÁN PÁL lev. tag

Kőnig Dénes és Szűcs Adolf emlékének

Előadva az 1951 márc. 5.-én tartott osztályülésen

1. Mint jólismert, a kinetikus gázelmélet a gázokat igen nagy n számu (10^{23} nagyságrendű pro dm^3) mozgó részecske összességének fogja fel. Ha ezek

$$x_{\nu,0},\ y_{\nu,0},\ z_{\nu,0} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

kezdeti koordinátáit és

$$\dot{x}_{\nu,0},\ \dot{y}_{\nu,0},\ \dot{z}_{\nu,0} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

kezdősebességeit megadottnak vesszük, akkor a mechanika alapelvei szerint a rendszer $t > 0$ időpontokban már meg van határozva. De ilyen módon levezetni a gázok legegyszerűbb tulajdonságait a legnagyobb nehézségekbe ütközött mindmáig. Egy ilyen tulajdonság pl. az, hogy egyáltalán beszélhetünk a gáz sűrűségéről, mely külső behatások nélkül nem függ az időtől „kevés" időponttól eltekintve. Ez azt jelenti, a természet a gázrészecskék összetorlódását csak kevés időpontban engedi meg; ha pl. egy ilyen időpontot választunk kezdeti időpontnak, akkor ebből kiindulva „rövid" időn belül helyreáll az egyensúly, a részecskék „egyenletes" eloszlása a gáztérben. Ezt azonban levezetni a mechanika alapelveiből nem sikerült. Az első ezirányu eredmény *H. Steinhaus** lengyel matematikustól származik, aki egy egyszerű modell esetén vizsgálta a kérdést. A részecskék az ő modelljében pontszerűek, egyenlő tömegűek, köztük vonzó vagy taszító erőt nem vesz figyelembe, részecskék közti ütközések nincsenek; a részecskék egy kocka alakú mozdulatlan edénybe vannak bezárva és annak falain a rugalmas ütközés szabályai szerint verődnek vissza. Ezesetben a részecskék a falon való ütközéstől eltekintve egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek; *Steinhaus* modelljében ezen sebességek lineáris függetlenségét is felteszi még. Ezen modellre *Steinhaus* szigorúan ki tudta mutatni, hogy legalább a részek tömegközéppontja a kocka középpontjának „közelében" marad a $0 < t < T$ időtartam alatt, kivéve „aránylag kevés" időt. Ezen állítás a részecskék egyenletes eloszlásánál kevesebbet állít, abból levezethető; belőle azonban a részecskék egyenletes eloszlása nyilván nem következik. *Steinhaus* eredménye mégis jelentős, mert megcáfolja azt a hiedelmet, hogy a kinetikus gázelmélet alap-

* H. Steinhaus: Sur les fonctions independantes (VII.) Studia Math. T. X (1948) p. 1—20. Szerzők figyelme e tárgyra *Rényi Alfrédnek* „A valószínűségszámítás megalapozásáról" c. dolgozata alapján irányult, mely a Matematikai Lapok 1949. I. évfolyamában jelent meg. Ehelyütt fejezzük ki köszönetünket úgy neki, mint *Jánossy Lajos* és *H. Steinhaus* professzoroknak értékes megjegyzéseikért.

kérdéseiben a mechanika alapelvei a részecskék nagy száma miatt nem alkalmazhatók, újabb alapfeltevésekre van szükség. Vagy, ahogy ő még találóbban kifejezi „... notre example peut donc servir pour réfuter un préjugé assez répandu, a savoir que l'ignorance de l'état initial ait la force magique necessaire pour engendrer les formules désirées et qu'on ne peut pas faire de statistique sinon au dépens de la connaissance des trajectoires individuelles. ...".

2. A következőkben egyik hasonló modell esetén a részecskék egyenletes eloszlását fogjuk kimutatni, (persze „kis" összhosszú időintervallumoktól eltekintve). A **3.** pontban ismertetni fogjuk a tárgyalásunk alapjául szolgáló modellt; ezt azon kettős követelmény szem előtt tartásával értelmeztük, hogy egyrészt a számítások technikai része ne legyen túltengő, másrészt a fizikai realitásnak minél több vonatkozásban megfeleljen. A **4.** pontban a modellre vonatkozó megjegyzések lesznek éspedig arra vonatkozólag is, hogy a modell milyen megkötéseitől lehetne megszabadulni a számítások komplikálása árán, az **5.** pontban e dolgozat eredményét egy előbbi dolgozatunkéval hasonlítjuk[1] össze. A **6. 7.** és **8.** pontok a tétel kimondását, a bizonyításhoz szükséges segédfogalmakat ill. a *Koksma—Szüsz* és *Kőnig—Szűcs*-féle segédtételeket fogják tartalmazni és végül a **9. 10. 11. 12.** pontok a tétel bizonyítását.

3. A részecskék legyenek most is pontszerűek egyenlő tömegűek, melyek között vonzó vagy taszító erők nem lépnek fel és melyek egy π-oldalú mozdulatlan kockaalakú edénybe vannak zárva. A falon az ütközések most is rugalmas ütközésnek megfelelőek; ha a beesés egy élre, vagy éppen egy csúcsba történik, akkor értelmezzük őket folytonossági meggondolások alapján. A részecskék közötti rugalmasnak feltételezett binär ütközéseket minden további nélkül megengedjük; a ternär vagy magasabbrendű ütközéseknél, melyek száma „kicsi" a binär-ekhez képest, tegyük fel, hogy minden részecske egyszerűen folytatja útját, mint ahogy azt a csillagászatban fel szokták tenni. A részecskék kezdeti helyzetére vonatkozólag nem teszünk fel semmit; a kezdősebességeket viszont vegyük fel

$$\begin{aligned} x_{j,0} &= a(n)(1+jb(n)) \\ y_{j,0} &= a(n)(1+jb(n))\sqrt{2} \qquad j=1,2,\ldots,n \\ z_{j,0} &= a(n)(1+jb(n))\sqrt{3} \end{aligned} \tag{3.1}$$

alakban, ahol

$$a(n)=n^{\frac{2}{3}} \qquad\qquad b(n)=n^{-\frac{101}{100}} \tag{3.2}$$

4. A binär és ternär ütközések közötti megkülönböztetés csak látszólagos. Ha ugyanis pontosan két egyenlő tömegű részecske rugalmasan ütközik, akkor, mint ismeretes, azok egyszerűen felcserélik irányaikat és sebességeiket; azaz ha a részecskék indexeit felcseréljük az ütközés pillanatában, akkor mondhatjuk, hogy a két részecske folytatja útját, mintha mi sem történt volna. Vagyis a jelzett körülmények között a mozgás tényleg olyan, mintha ütközés esetén önáthatók volnának és így az ütközésektől látszólag teljesen eltekinthetünk éppúgy, mint *Steinhaus* modelljében. Modellünk azonban épp ezért egyben hátrányban van *Steinhaus* modelljéhez képest, mint azt *H. Steinhaus* megjegyezte. Az ő modelljénél minden részecske helyzete minden időpontban megadható, azaz az ő modellje egy teljesen determinisztikus modell. A mi modellünkben ez nem áll teljesen; megmarad azonban egy hasonló, gyengébb tulajdonsága, melyet gyenge determinizmusnak nevezhetünk. Nevezzünk két részecskét a $t=t_1$ pillanatban konjugáltnak, ha ők már előbb összeütköztek és terjeszszük ki e kapcsolatot tranzitivvá azáltal, hogy, ha a_1 részecske a_2-vel konjugált, a_2 pedig a_3-al a $t=t_1$ pillanatban, akkor a_1-et a_3-al is konjugáltnak tekintsük. Ezen fogalom bevezetésével modellünk gyenge-determinisztikus volta abban áll, hogy egy fix a_i részecskére és $t=t_2$ időpontra csupán egy olyan (ξ, η, ζ) térbeli pontot tudunk megadni, melyen vagy a_i vagy valamelyik konjugáltja áll.

Modellünk legkevésbbé természetes vonása kétségtelenül a (3.1)—(3.2) kezdősebességeloszlás. Ehhez két dolgot jegyezhetünk meg. Az első az, hogy eleddig az is kétséges volt, hogy egy szigorú matematikai kép tudja-e *egyáltalán* imitálni a természetet abban, hogy benne részecskék tetszőleges kaotikus kezdeti rendezetlenségből „hosszú“ időn át egyenletesen eloszlottba menjenek át „kevés“ idő híján. Tehát a következők jelentősége abban áll, hogy valamelyest alátámasszák azt a véleményt, hogy *elvileg* a kinetikus gázelmélet alaptényei *tisztán mechanikailag* nyerhetők; a valószínűségi meggondolások csupán a matematikai nehézségek áthidalására valók, melyek már a kockától különböző alakú edény esetén fellépnek e problémában is. A másik az, hogy a bizonyítás kis módosításával kiadódnék az is, hogy a (3.1)—(3.2) sebességeloszlásnak a $6n$-dimenziós sebességtérben *egy egész környezete* adható meg úgy, hogy azok mellett a részecskék egyenletes eloszlására mondottak lényeges változás nélkül fennmaradjanak. Ezen környezetet megkaphatjuk, ha a (3.1)—(3.2)-ben szereplő $1, \sqrt{2}$ ill. $\sqrt{3}$ tényezőket oly $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$-al helyettesítjük, melyekre

$$|\vartheta_1-1| \leq n^{-10}, \quad |\vartheta_2-\sqrt{2}| \leq n^{-10}, \quad |\vartheta_3-\sqrt{3}| \leq n^{-10} \tag{4.1}$$

Hasonló a *Steinhaus* által megadott kezdősebességekre nem állhat fenn, mert a $6n$-dimenziós sebességtér bármely pontjának tetszőleges kis környezete tartalmaz csupa racionális koordinátájú pontot, ami nyilván nem egy *Steinhaus* által megadott pont. A megadott sebességek olyanok, hogy kb. egyenlők, a realitásnak megfelelően és értékeik is reálisak; ilyen kezdeti sebességeloszlások nagyobb osztályait is ki lehetne jelölni, de ezzel sem foglalkozunk itt. *Rényi* és *Steinhaus* azon kérdésére azonban, hogy a hosszú ideig egyenletes eloszlást biztosító kezdősebességek bizonyos értelemben mindenütt sűrűn vannak-e eloszolva a sebességtérben, ezideig nem tudunk válaszolni.

A részecskék pontszerűségére vonatkozó feltevés a szereplő időtartam végessége miatt elvileg elejthető. Ha u. i. a részecskék „elég kicsik“, akkor a kezdőhelyzet alkalmas választása mellett még az is elérhető, hogy a modell az előre kijelölt időtartamon belül ütközésmentes legyen. Ezzel sem fogunk foglalkozni itt.

5. E dolgozat a [1] alattinak bizonyos értelemben folytatása. A [1] alatti dolgozatban a matematikai lényeg lehető kidomborítására helyeztük a fősúlyt, a becslések minimumra csökkentésével. Ennek megfelelően a választott kezdeti sebességek abnormisan nagyok voltak. E dolgozat becslései komplikáltabbak; ezen az áron vihető keresztül a módszer reálisabb kezdősebességek mellett. A javítás a (11.9) formulában mutatkozik meg; az itt szereplő $\sqrt{m}$-faktor ott $m^{3/2}$ volt. A modellel kapcsolatos több megjegyzés [1]-ben nem szerepelt. Viszont az ottani ütközésmentes és nem-ütközésmentes A és B modellek helyett itt csak az utóbbit tárgyaljuk. Ennek oka az, hogy a modellnek nem a determinisztikus voltát tartjuk leglényegesebbnek, hanem azt a követelményt, hogy az egyenletes eloszlás ténye a mechanika alapelveiből levezethető legyen.

6. Mielőtt kimondanánk tételünket pontosan, mondjuk meg, mit értünk a részecskék egyenletes eloszlásán a $t = t_0$ időpontban az E-kockában, ahol E legyen az

$$x = 0, \pi \quad y = 0, \pi \quad z = 0, \pi \tag{6.1}$$

síkok által behatárolva. Legyen K az

$$\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1, \quad \alpha_2 \leqq y \leqq \beta_2, \quad \alpha_3 \leqq z \leqq \beta_3 \tag{6.2}$$

által értelmezett tégla és K^* a K köbtartalma; jelöljük továbbá $N(t_0, K)$-val a részecskék számát K-ban a $t = t_0$ időpontban. Az n részecskét akkor és csak akkor fogjuk E-ben egyenletesen eloszlottnak nevezni $t = t_0$-ra, ha minden K-ra

$$\left| \frac{N(t_0, K)}{n} - \frac{K^*}{\pi^3} \right| \leqq n^{-\frac{1}{10}}. \tag{6.3}$$

A valóságban $n^{-\frac{1}{10}} \sim 10^{-2}$-nagyságrendű, ami 1%-os ingadozásnak felel meg.

Ennek segítségével most már kimondhatjuk tételünket.

A **3.**-*ban értelmezett gázmodell részecskéi a*

$$0 < t < n^{\frac{1}{4}} \tag{6.4}$$

időközben a (6.3) értelemben egyenletesen vannak eloszolva, kivéve oly időintervallumokat, melyek összhossza

$$< c_1 n^{\frac{41}{300}} \log n, \tag{6.5}$$

*ahol c_1 (és később $c_2, c_3 \ldots$) n-től független numerikus állandó.**

7. Milyen módon lehet a kérdést analitikailag megfogni? Ehhez *Kőnig Dénes* és *Szűcs Adolf* [2] egy gondolata segít hozzá. Ez arra az esetre vonat-

* A tétel ebben a formájában csupán *matematikai* tétel, mert a c_1 állandó numerikus értékét nem adja meg, csupán az n-től való függésre nyujt felvilágosítást. Annak persze nincs akadálya, hogy a becsléseket numerikusan vigyük keresztül, ami azonban a dolgozat terjedelmét megkétszerezné.

kozik, mikor egyetlen P pontról van szó, mely E-ben mozog (x_0, y_0, z_0) kezdőhelyzetből kiindulva, $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ kezdősebességgel és a falakon rugalmasan visszaverődik és kritériumot ad meg arra vonatkozólag, hogy az így mozgó pont milyen t' időpontokban tartózkodik E-nek egy előre adott K téglájában. Kritériumuk, mely elegáns geometriai okoskodással nyerhető, a következő. Jelentse E' azon kockát, melyet az

$$x=0, 2\pi \quad y=0, 2\pi \quad z=0, 2\pi \tag{7.1}$$

síkok határolnak és két téglát K'-t és K''-t, melyek élei $< 2\pi$ és melyek az

$$\alpha_1' \leqq x \leqq \beta_1' \qquad \alpha_2' \leqq y \leqq \beta_2' \qquad \alpha_3' \leqq z \leqq \beta_3'$$

ill.

$$\alpha_1'' \leqq x \leqq \beta_1'' \qquad \alpha_2'' \leqq y \leqq \beta_2'' \qquad \alpha_3'' \leqq z \leqq \beta_3''$$

által vannak határolva, akkor nevezzünk kongruensnek mod E', ha a szó közönséges értelmében

$$\alpha_j' \equiv \alpha_j'' \bmod 2\pi, \qquad \beta_j' \equiv \beta_j'' \bmod 2\pi, \qquad \gamma_j' \equiv \gamma_j'' \bmod 2\pi$$
$$j=1, 2, 3.$$

Egy fix K' téglával ilyen értelemben kongruens téglák összességét jelöljük $Q(K')$-vel. Ha adva van a (6.1) alatti E kockában egy K tégla, azt *Kőnig* és *Szűcs* tükrözik az

$$x=\pi, \qquad y=\pi, \qquad z=\pi$$

síkokra, az

$$(x=\pi, y=\pi), \qquad (x=\pi, z=\pi), \qquad (y=\pi, z=\pi)$$

élekre és a

$$(\pi, \pi, \pi)$$

pontra vonatkozólag; ezáltal a (7.1) alatti E' kockában nyerik a

$$K_1(\equiv K), K_2, K_3, \ldots, K_8 \tag{7.2}$$

téglákat, melyek egymáshoz idegenek. Mármost ahelyett, hogy N pontnak E-ben a valóságban lefolyó mozgását tekintenék, tekintik ehelyett az

$$x=x_0+\dot{x}_0 t, \qquad y=y_0+\dot{y}_0 t, \qquad z=z_0+\dot{z}_0 t$$

által adott mozgást; kritériumuk egyszerűen azt mondja ki, hogy P akkor és csak akkor van K'-ban a $t=t'$ időpontban, ha az

$$x=x_0+\dot{x}_0 t', \qquad y=y_0+\dot{y}_0 t', \qquad z=z_0+\dot{z}_0 t'$$

által adott pont benne van a

$$Q(K_1)(\equiv Q(K)),\ Q(K_2), \ldots, Q(K_8)$$

halmazok valamelyikében, vagyis a

$$\sum_{j=1}^{8} Q(K_j) \tag{7.3}$$

halmazban.

Mivel modellünk előbbi szerint olyan, hogy az ütközésektől eltekinthetünk a részecskék eloszlása szempontjából, ez rögtön redukálja részecskéinknek a

$t=t'$ időpontba való eloszlásának kérdését arra, hogy — az (1.1) és (1.2) alatti jelöléssel élve — az

$$x_\nu = x_{\nu,0} + \dot{x}_{\nu,0}t', \qquad y_\nu = y_{\nu,0} + \dot{y}_{\nu,0}t', \qquad z_\nu = z_{\nu,0} + \dot{z}_{\nu,0}t' \tag{7.4}$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, n$$

pontok közül hány esik bele a (7.3) halmazba. Ezek $F(n, Q)$ száma nyilván könnyen nyerhető lesz, ha ismerjük azok számát, melyek $Q(K)$-ba esnek; elég tehát ezt vizsgálni. Jelöljük ezt $F(n, K)$-val.

8. Ha (7.4) *véges* pontsorozat helyett végtelen sorozat áll, akkor e kérdés vizsgálata *H. Weyl* [3] szerint

$$\sum_{j=1}^{N} e^{i(\nu_1 x_j + \nu_2 y_j + \nu_3 z_j)}$$

alakú összegek becslésére vezethető vissza, ahol ν_1, ν_2, ν_3 fix egészek és az összeg viselkedése $N \to \infty$-re vizsgálandó. Véges pontsorozat esetén *Weyl* kritériumában a limeszt nyilván egyenlőtlenséggel kell valami módon pótolni. Először *Van der Corput* és *Koksma* találtak ilyen tételt; ennek bizonyítását [4] csak az egydimenziós esetre vázolták, a k-dimenziós eset bizonyítását nem publikálták. 1948-ban egészen más kérdésekkel kapcsolatban jutottunk [5] ugyanehhez a kérdéshez *Van der Corput* és *Koksma* eredményéről való tudomás nélkül; módszerünket azóta egymástól függetlenül kiterjesztették a k-dimenziós esetre *Koksma* [6] és *Szüsz Péter** disszertációjában. Eredményük az itt egyedül szükséges három-dimenziós esetben kis módosítással a következő.

Az előző pont jelöléseivel, ha m egész és $\geqq c_3$, akkor megfelelő numerikus c_2-vel

$$\left| F(n, K) - \frac{K^*}{(2\pi)^3} n \right| \leq c_2 \left(\frac{n}{m+1} + \right.$$
$$\left. + \sum_{|h_1| \leqq m} \sum_{|h_2| \leqq m} \sum_{|h_3| \leqq m} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)} \left| \sum_{j=1}^{n} e^{i(h_1 x_j + h_2 y_j + h_3 z_j)} \right| \right). \tag{8.1}$$

9. Most rátérhetünk (6.4)—(6.5) alatti állításunk bebizonyítására.

A **7.** végén említett $F(n, K)$ gyanánt azon részecskéket véve, melyek az edényben $t = t_0$ időpontban K-ba esnek, adódik (8.1)-ből, ha $m = m(n)$ egész, akkor

$$\left| F(n, K) - \frac{K^*}{(2\pi)^3} n \right| < c_2 \left(\frac{n}{m+1} + \right.$$
$$+ \sum_{|h_1| \leqq m} \sum_{|h_2| \leqq m} \sum_{|h_3| \leqq m} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)} \cdot$$
$$\left. \cdot \left| \sum_{j=1}^{n} e^{i\{h_1 x_{j,0} + h_2 y_{j,0} + h_3 z_{j,0} + t_0 a(n)(1+j b(n))(h_1 + h_2\sqrt{2} + h_3\sqrt{3})\}} \right| \right)$$

* Ennek egy rövid kivonata meg fog jelenni az I. Magyar Mat. Kongresszus kiadványában „Az egyenletes eloszlás egy problémájáról" címen. Ebből a (8.1) alatti c_2 könnyebben becsülhető meg.

ill.

$$\left|F(n,Q)-\frac{K^*}{\pi^3}n\right|<8c_2\left(\frac{n}{m+1}+\right.$$

$$+\sum_{|h_1|\leqq m}\sum_{|h_2|\leqq m}\sum_{|h_3|\leqq m}\frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)}\cdot$$

$$\left.\cdot\left|\sum_{j=1}^{n} e^{i\{h_1x_{j,0}+h_2y_{j,0}+h_3z_{j,0}+t_0a(n)(1+jb(n))(h_1+h_2\sqrt{2}+h_3\sqrt{3})\}}\right|\right).$$

Bevezetve a rövidebb

$$\sum_{j=1}^{n} e^{i\{h_1x_{j,0}+h_2y_{j,0}+h_3z_{j,0}+ta(n)(1+jb(n))(h_1+h_2\sqrt{2}+h_3\sqrt{3})\}}=\psi(t,h_1,h_2,h_3)$$

jelölést és $F(n, Q)$ helyett az időtől való függést kifejező $N(t, Q)$-t használva fenti egyenlőtlenség a következőbe megy át

$$\left|N(t,Q)-\frac{K^*}{\pi^3}n\right|<8c_2\left(\frac{n}{m+1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{|h_j|\leqq m,\ j=1,2,3\\ h_1h_2h_3\neq 0}}\frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)}|\psi(t,h_1,h_2,h_3)|\right),$$

ahol $m=m(n)>c_3$, függését pontosan később fogjuk meghatározni. Ha még $T=T(n)$-ről is csak később diszponálunk véglegesen, t-szerinti integrációval adódik

$$\Delta(T)\equiv\int_0^T\left|N(t,K)-\frac{K^*}{\pi^3}n\right|dt\leq 8c_2\left\{\frac{nT}{m+1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{|h_1|\leqq m\\ h_1h_2h_3\neq 0}}\sum_{|h_2|\leqq m}\sum_{|h_3|\leqq m}\frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)}\int_0^T|\psi(t,h_1,h_2,h_3)|\,dt\right\}. \tag{9.1}$$

De a *Cauchy*-féle egyenlőtlenségből

$$\left(\int_0^T|\psi(t,h_1,h_2,h_3)|\,dt\right)^2\leq T\int_0^T|\psi(t,h_1,h_2,h_3)|^2\,dt\leq T^2n+$$

$$+T\sum_{\substack{1\leqq j_1,\,j_2\leqq n\\ j_1\neq j_2}}\left|\int_0^T e^{ia(n)t(j_1-j_2)b(n)(h_1+h_2\sqrt{2}+h_3\sqrt{3})}dt\right|<T^2n+$$

$$+4T\sum_{1\leqq j_1<j_2\leqq n}\frac{1}{a(n)(j_2-j_1)b(n)|h_1+h_2\sqrt{2}+h_3\sqrt{3}|}<nT^2+$$

$$+\frac{1}{a(n)b(n)|h_1+h_2\sqrt{2}+h_3\sqrt{3}|}4Tn\log n,$$

azaz

$$\int_0^T |\psi(t, h_1, h_2, h_3)|\, dt \leq T\sqrt{n} + 2\sqrt{\frac{Tn\log n}{a(n)b(n)|h_1+h_2\sqrt{2}+\sqrt{3}|}}.$$

Ezt (9.1)-be téve adódik

$$J(T) < 8c_2\Big\{\frac{nT}{m+1} + 9T\sqrt{n}\log^2 m +$$

$$+ 2\sqrt{\frac{Tn\log n}{a(n)b(n)}} \sum_{|h_1|\leq m} \sum_{|h_2|\leq m} \sum_{\substack{|h_3|\leq m \\ h_1h_2h_3\neq 0}} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)} \cdot \tag{9.2}$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{|h_1+h_2\sqrt{2}+h_3\sqrt{3}|}}\Big\}.$$

10. (9.2) jobboldalán álló összeg legyen S és foglalkozzunk ennek megbecslésével. Előbb kimutatjuk, hogy, ha a_1 és a_2 az 1, 2, 3 számok közül vett két különböző és

$$Z = \sum_{|h_1|\leq m} \sum_{\substack{|h_2|\leq m \\ h_1h_2\neq 0}} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)} \frac{1}{\sqrt{|h_1\sqrt{a_1}+h_2\sqrt{a_2}|}}, \tag{10.1}$$

akkor*

$$Z < c_4\sqrt{m}\log m. \tag{10.2}$$

U. i. a $h_1=0$-nak megfelelő részösszeg

$$< \sum_{\substack{h=-m \\ h\neq 0}}^{m} \frac{1}{1+|h|} \frac{1}{\sqrt{|h|}} < 2\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(1+h)\sqrt{h}} = c_5$$

és ugyanez áll a $h_2=0$-nak megfelelően. Vagyis

$$Z < 2c_5 + \sum_{\substack{h_1=-m \\ h_1\neq 0}}^{m} \sum_{\substack{h_2=-m \\ h_2\neq 0}}^{m} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)} \frac{1}{\sqrt{|h_1\sqrt{a_1}+h_2\sqrt{a_2}|}}.$$

De

$$|h_1\sqrt{a_1}+h_2\sqrt{a_2}|\,|h_1\sqrt{a_1}-h_2\sqrt{a_2}| = |a_1h_1^2-a_2h_2^2| = \text{nemnegatív egész}, \tag{10.3}$$

mivel

$$a_1h_1^2-a_2h_2^2=0$$

-ból

$$\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = \frac{h_2}{h_1} = \text{racionális}$$

* A becslés módosításával kimutatható lenne, hogy Z egy m-től független korlát alatt marad, de ez a lényeges S összeg jobb becslésére nem vezet.

volna. Igy következik, hogy (10.3) jobboldala $\geqq 1$, azaz

$$\frac{1}{\sqrt{|h_1\sqrt{a_1}+h_2\sqrt{a_2}|}} < \sqrt{|h_1\sqrt{a_1}-h_2\sqrt{a_2}|} < \max\left(\sqrt{|h_1|}, \sqrt{|h_2|}\right)\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}} <$$

$$< 1.8 \max\left(\sqrt{|h_1|}, \sqrt{|h_2|}\right)$$

és így

$$Z < 2c_5 + 7.2 \sum_{h_1=1}^{m} \sum_{h_2=1}^{m} \frac{\max\left(\sqrt{h_1}, \sqrt{h_2}\right)}{(1+h_1)(1+h_2)}. \tag{10.4}$$

Tekintve, hogy

$$\sum_{h_1=1}^{m} \sum_{h_2=1}^{m} \frac{\max\left(\sqrt{h_1}, \sqrt{h_2}\right)}{(1+h_1)(1+h_2)} \leqq 2 \sum_{h_1=1}^{m} \frac{\sqrt{h_1}}{1+h_1} \sum_{h_2=1}^{h_1} \frac{1}{1+h_2} <$$

$$< 2 \sum_{h_1=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{h_1}} \log h_1 < c_6\sqrt{m} \log m.$$

(10.4)-ből (10.2) következik.

11. Ezután rátérhetünk a (9.2)-ben szereplő S összeg becslésére és kimutatjuk, hogy

$$S < c_7\sqrt{m} \log m. \tag{11.1}$$

Becsüljük előbb azon tagok adalékát, melyekre $h_1 = 0$. Ez (10.2)-vel becsülhető. Teljesen ugyanígy becsülhető azon tagok adaléka is, melyekre $h_2 = 0$ ill. $h_3 = 0$. Így adódik

$$S < 3c_4\sqrt{m} \log m +$$

$$+ \sum_{\substack{h_j=-m, j=1,2,3 \\ h_1h_2h_3 \neq 0}}^{m} \sum \sum \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)} \frac{1}{\sqrt{|h_1+h_2\sqrt{2}+h_3\sqrt{3}|}}. \tag{11.2}$$

Nézzük a megmaradt összegben azon tagok adalékát, melyekre

$$h_1 > 0, h_2 > 0, h_3 > 0.$$

Ez nyilván

$$< \sum_{h_1=1}^{m} \sum_{h_2=1}^{m} \sum_{h_3=1}^{m} \frac{1}{(1+h_1)(1+h_2)(1+h_3)} \frac{1}{\sqrt{\max(h_1, h_2, h_3)}} <$$

$$< 6 \sum_{h_1=1}^{m} \frac{1}{(1+h_1)\sqrt{h_1}} \sum_{h_2=1}^{h_1} \frac{1}{1+h_2} \sum_{h_3=1}^{h_2} \frac{1}{1+h_3} < 3 \sum_{h_1=1}^{\infty} \frac{\log^2(h_1+1)}{(1+h_1)\sqrt{h_1}} = c_8.$$

Ugyanez áll azon tagok adalékára is, ahol minden h_j negatív. A megmaradt összegben tehát pontosan két h_j egyenlő előjelű. Tehát

$$S < c_9\sqrt{m} \log m + 6 \max_{a_1, a_2, a_3} \sum_{h_1=1}^{m} \sum_{h_2=1}^{m} \sum_{h_3=1}^{m} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)} \frac{1}{\sqrt{|h_1\sqrt{a_1}+h_2\sqrt{a_2}-h_3\sqrt{a_3}|}}, \tag{11.3}$$

ahol a_1, a_2, a_3 az 1, 2, 3 elemek valamilyen permutációját jelöli. A max jele mögötti összeg legyen S'; ha röviden

$$h_1\sqrt{a_1}+h_2\sqrt{a_2}=\omega, \tag{11.4}$$

akkor S' az

$$\sum_{h_1=1}^{m}\frac{1}{1+h_1}\sum_{h_2=1}^{m}\frac{1}{1+h_2}\sum_{h_3=1}^{m}\frac{1}{(1+h_3)\sqrt{|\omega-h_3\sqrt{a_3}|}} \tag{11.5}$$

alakba is írható. Rögzítve h_1 és h_2-t vizsgáljuk a h_3 szerinti összegezést, melyet bontsunk szét az

$$\begin{aligned}
S_1' &= \sum_{\sqrt{a_3}\leq h_3\sqrt{a_3}\leq \omega-\frac{1}{4}\sqrt{a_3}}\frac{1}{(1+h_3)\sqrt{\omega-h_3\sqrt{a_3}}}\\
S_2' &= \sum_{|h_3\sqrt{a_3}-\omega|\leq\frac{1}{4}\sqrt{a_3}}\frac{1}{(1+h_3)\sqrt{|\omega-h_3\sqrt{a_3}|}}\\
S_3' &= \sum_{\omega+\frac{1}{4}\sqrt{a_3}\leq h_3\sqrt{a_3}\leq m\sqrt{a_3}}\frac{1}{(1+h_3)\sqrt{h_3\sqrt{a_3}-\omega}}
\end{aligned} \tag{11.6}$$

tagok összegére; egyes összegek lehetnek üresek, mikoris értékük 0. Ekkor nyilván

$$S_1' < \frac{2}{\sqrt[4]{a_3}}\sum_{1\leq h\leq m}\frac{1}{1+h}, \qquad S_3' < \frac{2}{\sqrt[4]{a_3}}\sum_{1\leq h\leq m}\frac{1}{1+h}$$

azaz

$$S_1'+S_3' < 4\log(m+1). \tag{11.7}$$

S_2' becslésére jegyezzük meg, hogy

$$\begin{aligned}
&|h_1\sqrt{a_1}+h_2\sqrt{a_2}+h_3\sqrt{a_3}|\,|h_1\sqrt{a_1}+h_2\sqrt{a_2}-h_3\sqrt{a_3}|\,|h_1\sqrt{a_1}-h_2\sqrt{a_2}+h_3\sqrt{a_3}|\cdot\\
&\cdot|h_1\sqrt{a_1}-h_2\sqrt{a_2}-h_3\sqrt{a_3}| = |(a_1h_1^2+a_2h_2^2-a_3h_3^2)^2-4a_1a_2h_1^2h_2^2|
\end{aligned} \tag{11.8}$$

tehát racionális egész. Ez 0 nem lehet, mert $h_1h_2 \neq 0$ miatt ezesetben

$$0<\sqrt{a_1a_2}=\frac{a_1h_1^2+a_2h_2^2-a_3h_3^2}{2h_1h_2}=\text{racionális}$$

volna; tehát (11.8) jobboldala legalább 1 és így

$$|h_1\sqrt{a_1}+h_2\sqrt{a_2}-h_3\sqrt{a_3}| \geq \frac{1}{(h_1\sqrt{a_1}+h_2\sqrt{a_2}+h_3\sqrt{a_3})^3}$$

ill.

$$\frac{1}{\sqrt{|\omega-h_3\sqrt{a_3}|}} \leq (\omega+h_3\sqrt{a_3})^{\frac{3}{2}}.$$

Mivel S_2' legfeljebb egy tagot tartalmazhat, tehát

$$S_2' < \frac{\left(2\omega + \frac{1}{4}\sqrt{a_3}\right)^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{\omega}{\sqrt{a_3}} - \frac{1}{4}} < \frac{\left(2\omega + \frac{1}{4}\sqrt{a_3}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\omega}{\sqrt{a_3}} + \frac{1}{8}} = 2\sqrt{a_3}\left(2\omega + \frac{1}{4}\sqrt{a_3}\right)^{\frac{1}{2}} <$$
$$< c_{10}(\sqrt{h_1+1} + \sqrt{h_2+1}).$$

Ebből, (11.7)-ből, (11.6)-ból és (11.5)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned} S' &< \sum_{h_1=1}^{m} \frac{1}{1+h_1} \sum_{h_2=1}^{m} \frac{1}{1+h_2} \{4 \log (m+1) + c_{10}\sqrt{h_1+1} + c_{10}\sqrt{h_2+1}\} < \\ &< c_{11} \left\{ \log^3 m + \sum_{h_1=1}^{m} \frac{1}{1+h_1} \sum_{h_2=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{1+h_2}} \right\} < c_{12}\sqrt{m} \log m \end{aligned} \tag{11.9}$$

12. Ezután a (6.4)—(6.5) alatti állítás bizonyítása gyorsan befejezhető. (9.2)-ből

$$\Delta(T) < c_{13} \left\{ \frac{nT}{m+1} + T\sqrt{n} \log^3 m + \log m \sqrt{\frac{Tnm \log n}{a(n)\, b(n)}} \right\}. \tag{12.1}$$

Ha mármost R jelenti azon időpontok halmazát $[0, T]$-ben, melyekre

$$\left| N(t, K) - \frac{K^*}{\pi^3} n \right| \geq n^{\frac{9}{10}},$$

és R^* ennek méretét, akkor nyilván

$$\Delta(T) \geq R^* n^{\frac{9}{10}},$$

azaz ebből és (12.1)-ből

$$R^* \leq c_{13} n^{-\frac{2}{5}} \sqrt{T} \left\{ \frac{\sqrt{nT}}{m+1} + \sqrt{T} \log^3 n + \sqrt{m}\, n^{\frac{61}{200}} \log^{\frac{3}{2}} n \right\}.$$

Legyen

$$T = n^{\frac{1}{4}} \text{ sec},$$

ami kb. 1 nap és

$$m = \left[\frac{n^{\frac{16}{75}}}{\log n} \right].$$

Ekkor

$$R^* < c_{14} n^{\frac{41}{300}} \log n.$$

Q. e. d.

Megjegyzés a korrekturánál. A (9. 1) alatti $\Delta(T)$ integrál vizsgálata helyett az

$$\int_0^T \left| N(t, K) - \frac{K^*}{\pi^3} n \right|^2 dt$$

értéket vizsgálva a becslések egyszerűbbek és jobbak lettek volna.

A Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.
Budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *E. Egerváry* and *P. Turán:* On a certain point of kinetic theory of gases. Studia Math. sajtó alatt.

[2] Lásd "Sur le mouvement d'un point abandonné a l'intérieur d'un cube", c. dolgozatukat (Rendic. del Circ. Mat. di Palermo) *36* (1913) 79—83.

[3] Über Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann. *77* (1916) 313—352.

[4] Lásd *Koksma* „Diophantische Approximationen" (1936) c. könyvét (IX. Satz 4. p, 101). Mint *Koksma* állítja [6] alatti dolgozatának 7. oldalán, az általános esetre szóló bizonyításuk, „quite complicated" igen komplikált volt.

[5] *P. Erdős* and *P. Turán*: On a problem in the theory of uniform distribution. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam Proc. *51* 1146—1154, 1262—1269. (1948).

[6] *J. F. Koksma*: Some theorems on Diophantine inequalities, Scriptum 5. of the Math. Center Amsterdam 1950.