ÖSSZETETT POISSON-ELOSZLÁSOKRÓL I.

JÁNOSSY L. r. tag, RÉNYI A. lev. tag és ACZÉL J.

Előadták az 1950 dec. 12-én tartott osztályülésen

BEVEZETÉS

E dolgozat négy részből áll. Az első részben (1. §) a klasszikus Poisson-féle sztochasztikus folyamatot a szokásosnál lényegesen kevesebb feltevésből vezetjük le. A $W_k(t)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ függvények differenciálhatóságát [$W_k(t)$ annak valószínűségét jelenti, hogy pontosan k esemény következzék be egy t-hosszúságú időintervallumban], nem tételeztük fel; a vizsgált események "ritkaságát" a

$$\lim_{t \to 0} \frac{W_1(t)}{1-W_0(t)} = 1 \tag{1}$$

feltétellel vezetjük be (a jóval nagyobb megszorítást jelentő $W_0'(0)+W_1'(0)=0$ feltétel helyett). A bizonyítás az általában használatos differenciálegyenletek helyett függvényegyenletek segitségével történik.

A második rész (2. §) a nemfolytonos, egész értékü Markov-féle additiv folyamat legáltalánosabb alakjának származtatását tartalmazza. A következő folyamatokat vizsgáljuk: a folyamat időben homogén, az egymást nem fedő id őintervallumokban történő események számai független valószínűségi változók. Az események ritkaságára vonatkozólag semmit sem tételezünk fel. Az ilyen folyamatok általános alakját ugyanazokkal a módszerekkel nyerjük, mint az 1. §-ban. Kimutatjuk, hogy a legáltalánosabb ilyen típusú folyamat megszámlálható sok független $\mathfrak{P}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ folyamat összege, ahol $\mathfrak{P}_k$ egy közönséges Poisson-folyamat, ahol azonban egy "eseményen" k esemény egyidejü bekövetkezését értjük. Más szavakkal, ha

$$f(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(t) e^{iku} \tag{2}$$

a folyamat karakterisztikus függvényét jelenti, akkor

$$f(u, t) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(tc_k(e^{iku}-1)\right) \tag{3}$$

ahol $c_k \geqq 0$ és $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$. Ilyen diszkrét $\{W_k(t)\}$ eloszlásokat, ha $\sum_{k=1}^{\infty} kc_k$ véges, *összetett Poisson-eloszlásoknak* fogunk nevezni.

A harmadik rész (3. §) ezeknek az összetett Poisson-eloszlásoknak elemibb uton való származtatását tartalmazza, az időparaméter bevezetése nélkül. Kimutatjuk, hogy ha egy egyetlen p paramétertől függő diszkrét (egész értékü) eloszlásfüggvényekből álló halmaz a kompozició müveletére nézve zárt (vagyis ha két a halmazhoz tartozó eloszlásfüggvény kompoziciója is a halmazhoz tartozik), akkor a halmaz összetett Poisson-eloszlások egy halmaza. Bebizonyítjuk azt is, hogy e halmaz bármely tagjának a szórása nem kisebb, mint a középértéke s egyenlőség csakis közönséges Poisson-eloszlás esetében áll fenn. Ez azt jelenti, hogy a Poisson-eloszlások halmazát — az események „ritkasága" helyett — ugy jellemezhetjük, hogy az oly egész értékü eloszlásfüggvények halmaza, amelyek közül bármely kettő kompoziciója is a halmazhoz tartozik, továbbá adott középérték mellett a szórás minimális. Ez utóbbi feltevés az események ritkaságára vonatkozó feltevést helyettesíti.

A negyedik rész (4. §) néhány, az összetett Poisson-eloszlásra vonatkozó megjegyzést tartalmaz. Kimutatjuk, hogy ezek *A. Hincsin*[2] általánosított Poisson-eloszlásaiban benne foglaltatnak, továbbá, hogy az összetett Poisson-eloszlások halmaza *Pólya-Eggenberger*[3] és *I. Neyman*[4] "ragályos" eloszlásait, valamint *H. Pollaczek-Geiringernek*[5] a Poisson-eloszlásra adott általánosítását is tartalmazza.

Az 1. § módszerei és eredményei *Rényi A.*-tól származnak. Ezekből kiindulva *Aczél J.* a 2 §. eredményeit nyerte. A 2 §.-ban tárgyalt általánosított Poisson-folyamatok értelmezésére k független esemény egyidejü bekövetkezéséből álló független Poisson-folyamatok szuperpoziciójaként *A. N. Kolmogorov* hívta fel a fentemlített két szerző figyelmét*, akik ez uton mondanak köszönetet ezért az értékes megjegyzésért. A 3 §. eredményei (beleértve ezeknek az eloszlásoknak megszámlálható sok k-szoros eseményekből álló Poisson-folyamatok kompoziciójaként való értelmezését) teljes egészükben *Jánossy L.*-tól származnak, aki függetlenül néhány hónappal előbb találta őket. A szerzők köszönetet mondanak *Császár Ákos*nak egy értékes megjegyzéséért.

1. § *A klasszikus Poisson-féle sztochasztikus folyamat*

Tekintsünk időben történő eseményeket (pl. részecskék becsapódását, telefonhívásokat, stb.) és tegyük fel a következőket:

A.) A folyamat időben homogén, vagyis annak a valószínűsége, hogy egy (t_1, t_2) időintervallumban pontosan k esemény történik, csak az intervallum hosszától: $t = t_1 - t_2$-től és k-tól függ. E valószínűséget $W_k(t)$-vel jelöljük ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Nyilvánvalóan

$$W_k(t) \geqq 0 \text{ és } \sum_{k=0}^{\infty} W_k(t) = 1, \text{ ha } t \geqq 0, \tag{1.1}$$

továbbá

$$W_0(0) = 1 \text{ és innen } W_k(0) = 0, \, k = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

B.) A folyamat Markov-féle, vagyis a (t_1, t_2) időintervallumban történő esemé-

* Személyes közlés az I. Magyar Matematikai Kongresszuson (1950. szept. 1.)

nyek száma független a (t_3, t_4) időintervallumban történő események számától, hacsak $t_1 < t_2 \leq t_3 \leq t_4$.

C.) Az események ritkák. Ezen a következőt értjük:

$$\lim_{t \to 0} \frac{W_1(t)}{1 - W_0(t)} = 1 \tag{1.3}$$

másszóval, hogy annak a valószínűsége, hogy a $(0, t)$ intervallumban pontosan egy esemény történjék $t \to 0$-ra aszimptotikusan egyenlő annak a valószínűségével, hogy ugyanebben az intervallumban legalább egy esemény történjék. Ez ekvivalens

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sum_{k=2}^{\infty} W_k(t)}{W_1(t)} = 0. \tag{1.4}$$

fennállásával, ami azt jelenti, hogy két vagy több esemény valószínűsége egy elég rövid időintervallumban egy esemény valószínűségéhez képest tetszőlegesen kicsiny. (1.3) helyett, — mint az a bizonyításból látszani fog — elegendő volna a (1.3)-nál nyilvánvalóan gyengébb

$$\limsup_{t \to 0} \frac{W_1(t)}{1 - W_0(t)} = 1 \tag{1.3a}$$

feltevés is.

Azt állítjuk, hogy A), B) és C)-ből következik, hogy

$$W_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \tag{1.5}$$

vagyis Poisson-eloszlással van dolgunk: $\lambda > 0$ az időegység alatt történő események számának várható értéke, (az események „időbeli sűrűsége").

Bizonyítás:

B)-ből következik, hogy annak a valószínűsége. hogy a $(0, t+s)$ időintervallumban nem történik esemény, egyenlő annak a valószínűségnek, hogy $(0, t)$-ben nem történik esemény és annak a valószínűségnek, hogy $(t, t+s)$-ben nem történik esemény, a szorzatával. Innen A)-ból

$$W_0(t+s) = W_0(t) W_0(s) \tag{1.6}$$

(1.1) és $0 \leq W_0(t) \leq 1$ miatt, miután az (1.6) függvényegyenlet korlátos megoldásai mind q^t alakuak $(0 \leq q \leq 1)$ kapjuk, hogy

$$W_0(t) = e^{-\lambda t} \text{ ahol } \lambda > 0 \tag{1.7}$$

Hasonlóképpen: ha a $(0, t+s)$ időintervallumban pontosan egy esemény történik, ez kétféleképpen lehetséges: vagy $(0, t)$-ben történik egy esemény és $(t, t+s)$-ben nem, vagy $(0, t)$-ben nem történik esemény és $(t, t+s)$-ben egy esemény történik. Ezért A)-ból és B)-ből

$$W_1(t+s) = W_1(t) W_0(s) + W_0(t) W_1(s) \tag{1.8}$$

Innen és (1.7)-ből

$$W_1(t+s) = W_1(t) e^{-\lambda s} + W_1(s) e^{-\lambda t} \tag{1.9}$$

Legyen

$$f(t) = e^{\lambda t} W_1(t) \tag{1.10}$$

akkor

$$f(t+s) = f(t) + f(s). \tag{1.11}$$

Ismeretes, hogy e függvényegyenlet korlátos megoldásai

$$f(t) = c_1 t \tag{1.12}$$

alakuak; ezért

$$W_1(t) = C_1 t e^{-\lambda t} \tag{1.13}$$

$W_0(t)$-t és $W_1(t)$-t (1.7), illetve (1.13) segítségével kifejezve és (1.13)-ba írva

$$\lim_{t \to 0} \frac{C_1 t e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda t}} = \frac{C_1}{\lambda} = 1. \tag{1.14}$$

adódik és így nyerjük, hogy

$$C_1 = \lambda.$$

(1.5) tehát $k = 0$-ra és $k = 1$-re van bizonyítva.

Tegyük fel, hogy (1.5) $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$-re igaz; bebizonyítjuk, hogy akkor igaz n-re is. Nyilvánvalóan

$$W_n(t+s) = \sum_{k=0}^{n} W_k(t) W_{n-k}(s) \tag{1.15}$$

Az indukciós feltevés miatt

$$W_n(t+s) = W_n(t) e^{-\lambda s} + W_n(s) e^{-\lambda t} + \frac{\lambda^n e^{-\lambda(t+s)}}{n!} \left((t+s)^n - t^n - s^n\right) \tag{1.16}$$

Legyen

$$f(t) = e^{\lambda t} W_n(t) - \frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{1.17}$$

akkor

$$f(t+s) = f(t) + f(s) \tag{1.18}$$

(1.17) értelmében $f(t)$ korlátos[6], ezért $f(t) = c_n t$ és

$$W_n(t) = \left(\frac{(\lambda t)^n}{n!} + c_n t\right) e^{-\lambda t} \tag{1.19}$$

(1.19) értelmében $W_n(t)$ differenciálható és

$$W_n'(0) = c_n \tag{1.20}$$

Azonban (1.4)-ből következik, hogy $W_n'(0) = 0$ $(n \geqq 2)$, ezért $c_n = 0$. Innen (1.19) és (1.20)-ból következik, hogy (1.5) n-re is igaz, ha $k = 0, 1, \ldots (n-1)$-re igaz. Így tételünket teljes indukcióval bebizonyítottuk.

2. § *A véletlen események általános additiv Markov-féle folyamata*

Ebben a §-ban az események ritkaságára vonatkozó feltevést elejtjük, vagyis csak A) és B) érvényességét tesszük fel, C)-t nem. Pontosan ugyanugy, mint az 1. §-ban kapjuk, hogy

$$W_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{2.1}$$

és

$$W_1(t) = c_1 t e^{-t\lambda} \tag{2.2}$$

innen azonban most nem következik $c_1 = \lambda$. Teljes indukcióval befogjuk bizonyitani, hogy

$$W_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{\substack{r_1+2r_2+\ldots+kr_k = k \\ r_i \geq 0,\ (i=1,2,\ldots k)}} \frac{(c_1 t)^{r_1}(c_2 t)^{r_2}\ldots(c_k t)^{r_k}}{r_1!\ r_2!\ \ldots\ r_k!} \tag{2.3}$$

(2.3) $k = 1$-re (2.2.) érvényessége miatt igaz; $k = 2$-re (1.15) miatt

$$W_2(t+s) = W_2(t)e^{-\lambda s} + W_2(s)e^{-\lambda t} + c_1^2 t s e^{-\lambda(t+s)}$$

Legyen

$$f(t) = e^{\lambda t} W_2(t) - \frac{c_1^2 t^2}{2}$$

akkor $f(t+s) = f(t) + f(s)$. Mivel $f(t)$ korlátos, kapjuk, hogy $f(t) = c_2 t$ és így $W_2(t) = \left(\frac{c_1^2 t^2}{2} + c_2 t\right) e^{-\lambda t}$ Hasonlóképpen kaphatjuk meg $W_k(t)$ kifejezését $k = 2, 3, \ldots$ értékeire. Tegyük fel, hogy (2.3) $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$-re fennáll. (2.3)-at (1.15)-be helyettesítve

$$\begin{aligned} W_n(t+s) = {} & W_n(t)e^{-\lambda s} + W_n(s)e^{-\lambda t} + \\ & + e^{-\lambda(t+s)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{r_1+2r_2+\ldots+kr_k = k \\ \varrho_1+2\varrho_2+\ldots+(n-k)\varrho_{n-k} = n-k}} \frac{(c_1 t)^{r_1}\ldots(c_k t)^{r_k}(c_1 s)^{\varrho_1}\ldots(c_{n-k} s)^{\varrho_{n-k}}}{r_1!\ldots r_k!\ \varrho_1!\ \ldots\ \varrho_{n-k}!} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Legyen

$$f(t) = e^{\lambda t} W_n(t) - \sum_{r_1+2r_2+\ldots+(n-1)r_{n-1} = n} \frac{(c_1 t)^{r_1}(c_2 t)^{r_2}\ldots(c_{n-1} t)^{r_{n-1}}}{r_1!\ r_2!\ \ldots r_{n-1}!} \tag{2.5}$$

akkor (2.4)-ből következik, hogy

$$f(t+s) = f(t) + f(s) \tag{2.6}$$

tehát

$$f(t) = c_n t \tag{2.7}$$

amivel (2.3) $k = n$-re is be van bizonyítva. (2.3)-ból nyilvánvalóan következik, hogy

$$c_k = W_k'(0) \qquad (k \geq 1) \tag{2.8}$$

Miután $W_k(0) = 0$ és $W_k(t) \geq 0$ $(t > 0)$, következik

$$W_k'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{W_k(t)}{t} \geq 0 \tag{2.9}$$

és ezért

$$c_k \geq 0 \tag{2.10}$$

Be fogjuk bizonyitani, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergens és összege egyenlő λ-val. (2.3)-ból

$$e^{-\lambda t} \prod_{k=1}^{M} \left(\sum_{r=0}^{N} \frac{(c_k t)^r}{r!} \right) \leq \sum_{k=0}^{n} W_k(t) \leq 1 \tag{2.11}$$

ha $n > NM^2$ és innen

$$\prod_{k=1}^{M} \left(\sum_{r=0}^{N} \frac{(c_k t)^r}{r!} \right) \leq e^{\lambda t} \tag{2.12}$$

Miután (2.12) N minden értékére igaz,

$$\exp\left(t \sum_{k=1}^{M} c_k \right) \leq e^{\lambda t} \tag{2.13}$$

és innen

$$\sum_{k=1}^{M} c_k \leq \lambda \tag{2.14}$$

és (2.10) miatt $\sum_{k=1}^{M} c_k$ konvergens. Legyen

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tag{2.15}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(t) = e^{-\lambda t} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(c_k t)^r}{r!} \right) = e^{(\mu-\lambda)t} \tag{2.16}$$

és így

$$\mu = \lambda = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tag{2.17}$$

(2.3)-ban λ helyébe ezt az értéket írva kapjuk a végleges képletet

$$W_k(t) = \exp\left(-t \sum_{n=1}^{\infty} c_n \right) \sum_{r_1 + 2r_2 + \ldots + k r_k = k} \frac{(c_1 t)^{r_1} (c_2 t)^{r_2} \ldots (c_k t)^{r_k}}{r_1! \; r_2! \; \ldots \; r_k!} \tag{2.18}$$

Ez a véletlen események legáltalánosabb additiv Markov-féle folyamata, amely egy nem negatív számokból álló tetszőleges konvergens összegű c_n sorozattól függ. Egy t hosszúságú időintervallumban k esemény valószínűségét a (2.18) formula adja meg.

(2.18)-ból könnyen belátható, hogy bevezetve a

$$v_k^{(n)}(t) = \frac{(c_n t)^k}{k!} e^{-c_n t} \qquad (k = 0, 1, \ldots; n = 1, 2, \ldots) \tag{2.19}$$

jelölést

$$W_k(t) = \sum_{r_1 + 2r_2 + \ldots + k r_k = k} v_{r_1}^{(1)}(t) v_{r_2}^{(2)}(t) \ldots v_{r_k}^{(k)}(t) \prod_{n=k+1}^{\infty} v_0^{(n)}(t) \tag{2.20}$$

Ezt a következőképpen értelmezhetjük: legyenek $\xi_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots; t > 0)$

független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók, legyen $c_n t$ a $\xi_n(t)$ változó várható értéke és

$$\xi(t) = \xi_1(t) + 2\xi_2(t) + \cdots + n\xi_n(t) + \cdots \tag{2.21}$$

(2.20) nyilvánvalóan azt fejezi ki, hogy $\xi(t) = k$ valószinűségét (2.18) adja meg. Miután $n\xi_n(t)$ egy Poisson-féle folyamat, amelyben egy „esemény"-en n esemény egyidejű bekövetkezését értjük, eredményünket úgy fejezhetjük ki, hogy a legáltalánosabb homogén Markov-féle folyamat végtelen sok oly független Poisson-folyamat összege, amelynél az n-edik folyamatban „eseményen" n esemény egyidejű bekövetkezését értjük és amelynek várható értéke $c_n t$ $\left(c_n \geq 0 \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty\right)$. Másképpen, $W_k(t)$ a következőképpen fejezhető ki:

$$W_k(t) = \exp\left(-t\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right) \sum_{\substack{h_1+h_2+\ldots+h_n = n \leq k \\ h_i \geq 1;\, i=1,2,\ldots n}} \frac{c_{h_1} c_{h_2} \ldots c_{h_n} t^n}{n!} \tag{2.22}$$

ahol az összegezés valamennyi oly egész pozitív h_i-re terjesztendő ki, amelynek összege $\leq k$. Ezt úgy láthatjuk be, hogy a (2.18) összegben összefoglaljuk azokat a tagokat, amelyekben t ugyanazon a hatványon szerepel, azaz amelyekre $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$.

Tekintsük most (2.18) karakterisztikus függvényét

$$f(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(t) e^{iuk} \tag{2.23}$$

innen

$$f(u, t) = \exp\left(t \sum_{k=1}^{\infty} c_k (e^{iuk} - 1)\right) \tag{2.24}$$

$$f(u, t) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(t c_k (e^{iuk} - 1)\right) \tag{2.25}$$

Jelölje $\varphi(u, \lambda)$ a közönséges Poisson-folyamat karakterisztikus függvényét:

$$\varphi(u, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda} e^{iuk}}{k!} = \exp\left(\lambda(e^{iu} - 1)\right) \tag{2.26}$$

E jelöléssel (2.25)-öt a következő alakban írhatjuk:

$$f(u, t) = \prod_{k=1}^{\infty} \varphi(ku, tc_k), \tag{2.27}$$

ami valójában azt fejezi ki, hogy (2.8), (2.21) eloszlása. (2.24) alapján látjuk, hogy a (2.18) alakú eloszlások a karakterisztikus függvények következő tulajdonságával jellemezhetők: egy ilyen eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényének a logaritmusa $g(e^{iu})$ alakú, ahol $g(z)$ egy az egységkörben reguláris függvény, amely a következő feltételeknek is eleget tesz:

$$g^{(n)}(0) \geq 0 \; (n = 1, 2, \ldots) \text{ és}$$

$$\lim_{z \to 1} g(z) = 0$$

Egy t hosszúságú időintervallumban történő események számának várható értékét

$$M(t) = t \sum_{k=1}^{\infty} k c_k \tag{2.24}$$

adja meg. $M(t)$ tehát véges, vagy nem, aszerint, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k$ konvergál, vagy sem. Bennünket természetesen csak az első eset érdekel. Ebben az esetben (2.18)-at *összetett Poisson-eloszlásnak* fogjuk nevezni.

3. § *Az összetett Poisson-eloszlások jellemzése karakterisztikus tulajdonságaik alapján*

Tekintsünk egy ξ valószínűségi változót, amely csak nem-negatív egész értékeket vesz fel, ezek eloszlását egész értékű eloszlásnak fogjuk nevezni. Vizsgáljuk az egész értékű eloszlásoknak azt a „családját", amelyek egyetlen p paramétertől, az eloszlás várható értékétől függnek.

Jelöljük $P(k, p)$-vel a k érték valószínűségét ($k = 0, 1, 2, \ldots$) és $\{P(k, p)\}$-vel magát az eloszlást.

Tegyük fel, hogy e család a kompozició müveletére nézve zárt. Ezen azt értjük, hogy két, a családhoz tartozó valószínűségi változó, ξ_1 és ξ_2 összege is a családhoz tartozik. Ha p_1 ξ_1-nek, p_2 pedig ξ_2-nek a várható értékét jelenti, akkor nyilvánvalóan $\xi_3 = \xi_1 + \xi_2$ várható értéke $p_3 = p_1 + p_2$.

A Poisson-eloszlások ismert családja, amelyre

$$P(k, p) = \frac{p^k e^{-p}}{k!} \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{3.1}$$

nyilvánvalóan ezzel a tulajdonsággal bír.

Felmerül mármost a kérdés, vajjon van-e ezenkivül más eloszlás-család is, amely e tulajdonsággal bír?

A következőkben erre a kérdésre fogunk válaszolni:

Tétel: Legyen $\{P(k, p)\}$ egész értékű eloszlásoknak egy családja, amely a kompozició műveletére nézve zárt, ahol p, amely az eloszlás várható értékét jelenti, végigfut a valós nemnegatív számokon. Akkor $P(k, p)$ egy összetett Poisson-eloszlás, vagyis

$$P(k, p) = \exp\left(-p \sum_{n=1}^{\infty} d_n\right) \sum_{r_1 + 2r_2 + \ldots + k r_k = k} \frac{(p d_1)^{r_1} (p d_2)^{r_2} \ldots (p d_k)^{r_k}}{r_1! \quad r_2! \quad \ldots \quad r_k!} \tag{3.2}$$

ahol

$$\sum_{k=1}^{\infty} k d_k = 1 \tag{3.3}$$

A Poisson-eloszlások családját a következő tulajdonságokkal jellemezhetjük: p minden rögzített értékére az eloszlás szórása a (3.2) család többi eloszlásához képest a legkisebb.

Jelölje $\Pi(z,p)$ a $\{P(k,p)\}$ eloszlás generátorfüggvényét, vagyis legyen

$$\Pi(z,p)=\sum_{k=1}^{\infty} P(k,p)z^k \qquad (z \text{ komplex}, |z|\leq 1) \tag{3.4}$$

Miután feltételeztük, hogy a család a kompozició műveletére nézve zárt,

$$\Pi(z,p_1)\,\Pi(z,p_2)=\Pi(z,p_1+p_2) \tag{3.5}$$

amiből következik, ha bevezetjük a $\Pi(z,1)=f(z)$ jelölést,

$$\Pi(z,p)=\Pi(z,1)^p=f(z)^p. \tag{3.6}$$

Miután nyilvánvalóan

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k,p)=1 \tag{3.7}$$

és

$$\sum_{k=0}^{\infty} kP(k,p)=p, \tag{3.8}$$

ezért

$$f(1)=f'(1)=1 \tag{3.9}$$

Most bebizonyítjuk, hogy $\Pi(z,p)$ az egységkörben nem tünhetik el, hacsak $p<\frac{1}{2}$.

(3.7) és (3.8)-ből következik

$$P(0,p)=1-p+\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P(k,p), \tag{3.10}$$

ezért

$$P(0,p)\geqq 1-p \tag{3.11}$$

és így (3.8) miatt

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(k,p)\leq p, \tag{3.12}$$

innen $|z|\leqq 1$-re

$$|\Pi(z,p)|\geqq P(0,p)-\sum_{k=1}^{\infty} P(k,p)\geqq 1-2p, \tag{3.13}$$

ezért $|\Pi(z,p)|>0$, ha $p<\frac{1}{2}$. Azonban ha egy analitikus függvény a zárt egységkörben nem tűnik el, akkor a logaritmusa ugyanott szintén analitikus, ezért

$$g(z)=\frac{1}{p}\log \Pi(z,p)=\log f(z) \tag{3.14}$$

is analitikus függvény és

$$\Pi(z,p)=e^{pg(z)}, \tag{3.15}$$

ahol

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \qquad (|z|\leq 1) \tag{3.16}$$

Nyilvánvaló, hogy ha (3.15) igaz $p<\frac{1}{2}$-re, akkor — (3.6)-re való tekintettel —

igaz p minden pozitív értékére. (3.9)-ből következik, hogy $g(1)=0$, vagyis

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n = 0 \tag{3.17}$$

és ezért

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z^n - 1) \tag{3.18}$$

Ki fogjuk mutatni, hogy a d_n együtthatók valósak és

$$d_n \geqq 0 \text{ ha } n \geqq 1 \tag{3.19}$$

Ennek bizonyítása a következőképpen történhetik: legyen

$$M = \max_{|z| \leqq 1} |g(z)|. \tag{3.20}$$

(3.16)-ből következik

$$\Pi(z, p) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k, p) z^k = 1 + p g(z) + \frac{p^2 g^2(z)}{2!} + \cdots \tag{3.21}$$

Differenciáljuk mindkét oldalt n-szer és helyettesítsük $z=0$-t. Akkor kapjuk, hogy

$$n!\, P(n, p) = n!\, p d_n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p^k D_{kn}}{k!}, \tag{3.22}$$

ahol

$$D_{kn} = \left(\frac{d^n g^k(z)}{dz^n} \right)_{z=0} \tag{3.23}$$

A hatványosorok együtthatóira vonatkozó Cauchy-féle egyenlőtlenség miatt

$$|D_{kn}| \leqq n!\, M^k \tag{3.24}$$

(3.22) mindkét oldalát $n!\, p$-vel osztva adódik

$$\left| \frac{P(n, p)}{p} - d_n \right| \leqq p M^2 e^{Mp}, \tag{3.25}$$

innen

$$\lim_{p \to 0} \frac{P(n, p)}{p} = d_n \tag{3.26}$$

Miután $\frac{P(n, p)}{p}$ nem-negatív, (3.19) érvényes. z helyébe e^{it}-t írva és (3.19) és (3.20)-at tekintetbe véve

$$\sum_{n=1}^{\infty} n d_n = g'(1) = 1 \tag{3.27}$$

miatt $P(k, p)$ (3.2) alakú, vagyis egy összetett Poisson-eloszlás $\{P(k, p)\}$ karakterisztikus függvénye

$$\Pi(z, p) = \exp\left(p \sum_{k=1}^{\infty} d_n (z^n - 1) \right), \tag{3.28}$$

ahol $d_n \geqq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} n d_n = 1$

A d_n együtthatók különben tetszőlegesek. Ezért végtelen sok család van, amely e § tételének feltételeit kielégíti. Minden eloszlás, amely ehhez a családhoz tartozik, egy összetett Poisson-eloszlás. (3.28) értelmében

$$P(0, p) = e^{-p}$$

(hasonlítsuk ezt össze a (3.11) egyenlőtlenséggel)! Számítsuk ki a $\{P(k, p)\}$ eloszlás szórásnégyzetét. Nyilvánvalóan

$$\sigma^2 = p \sum_{n=1}^{\infty} n^2 d_n, \tag{3.29}$$

innen

$$\sigma^2 = p \sum_{n=1}^{\infty} n^2 d_n \geqq p \sum_{n=1}^{\infty} n d_n = p; \tag{3.30}$$

egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $d_1 = 1$ és ezért $d_2 = d_3 = \ldots = 0$. Így fenti tételünk második állítását, amely szerint a Poisson-eloszlást az jellemzi, hogy szórásnégyzete a legkisebb (az átlagával egyenlő) az összes feltételeket kielégítő $\{P(k, p)\}$ között, (p rögzített), igazoltuk.

4. § *Speciális összetett Poisson-eloszlások*

Tekintsünk egy összetett Poisson-eloszlást, amelynek a generátorfüggvénye

$$g(z) = \exp\left(p \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z^k - 1)\right), \tag{4.1}$$

ahol

$$d_k \geqq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \text{ és } \sum_{k=1}^{\infty} k d_k = 1 \tag{4.2}$$

Legyen $\sum_{k=1}^{\infty} d_k = d$ és $\frac{d_k}{d} = e_k$

akkor

$$g(z) = \exp\left(pd \sum_{k=1}^{\infty} e_k (z^k - 1)\right), \tag{4.3}$$

ahol

$$e_k \geqq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \text{ és } \sum_{k=1}^{\infty} e_k = 1. \tag{4.4}$$

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ független valószínűségi változók, amelyek mindegyike az $1, 2, \ldots$ értékeket veszi fel $e_1, e_2 \ldots$ valószínűséggel. Jelöljük $\Phi_n(k)$-val $\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = k$ valószínűségét, legyen $\Phi_0(0) = 1$ és $\Phi_0(k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Nyilvánvalóan $\Phi_1(k) = e_k$ és

$$\Phi_n(k) = \sum_{j=0}^{k} \Phi_{n-1}(j) e_{k-j}$$

$$g_0(z) = 1 \text{ és } g_0(z) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_n(k) z^k \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.6}$$

jelöléssel adódik, hogy

$$g_n(z) = (g_1(z))^n \tag{4.7}$$

(4.7) és (4.1)-ből következik, hogy

$$g(z) = e^{-pd} e^{pd g(z)} = e^{-pd} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(pd)^n (g_1(z))^n}{n!} = e^{-pd} \sum \frac{(pd)^n g_n(z)}{n!} \tag{4.8}$$

(4.6) két oldala együtthatóinak összehasonlítása útján következik, hogy

$$P(k, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(pd)^n e^{-pd}}{n!} \Phi_n(k) \tag{4.9}$$

Vagyis azt találjuk, hogy az előző §-okban tárgyalt összetett Poisson-eloszlások *Hincsin*[2] általánosított Poisson-eloszlásainak speciális esetei. A (4.9) formula a $P(k, p)$ valószínűségek kiszámítására (a (3.3) formula helyett) szintén használható; különösen $P(k, p)$ aszimptotikus kifejezésének levezetésére, $p \to \infty$ esetén. Tekintsünk most néhány speciális összetett Poisson-eloszlást.

a). Pólya-Eggenberger[3] *"ragályos eloszlásának" határesete (a negatív-binomiális eloszlás).* Ebben az esetben

$$P(k, \mathrm{p}) = (1+p\delta)^{-\frac{1}{\delta}} \binom{-\frac{1}{\delta}}{k} \left(\frac{p\delta}{1+p\delta}\right)^k (-1)^k \quad (\delta > 0) \tag{4.10}$$

és

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k, p) z^k = \exp\left(p \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z^n - 1)\right), \tag{4.11}$$

ahol

$$d_n = \frac{1}{p\delta n} \left(\frac{p\delta}{1+p\delta}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.12}$$

Figyelemre méltó, hogy $\delta \to 0$ esetén ez az eloszlás a közönséges Poisson-eloszláshoz tart.

b). I. Neyman „ragályos eloszlása". A *Neyman*[4] által bevezetett „ragályos" eloszlás karakterisztikus függvénye

$$g(z) = \exp\left(p \iint_A \left[\sum_{n=1}^{\infty} p_n (F(\xi, \eta) z + 1 - F(\xi, \eta))^n\right] d\xi d\eta - A\right) \tag{4.13}$$

alakú, ahol A, a ξ, y sík egy tartományát, illetve annak területét jelenti; e tartományban $0 \leq F(\xi, \eta) \leq 1$, továbbá $p > 0$, $p_n \geq 0$ és $\sum_{n=\infty}^{\infty} p_n = 1$.

Egyszerű számolással adódik.

$$g(z) = \exp\left(p \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z^k - 1)\right), \tag{4.14}$$

ahol

$$d_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \iint_A F^k(\xi, \eta)(1 - F(\xi, \eta))^{n-k} d\xi, d\eta. \tag{4.15}$$

Miután nyilvánvalóan $d_k \geq 0$, ezek az eloszlások szintén benne foglaltatnak az összetett Poisson-eloszlások osztályában.

c). *Pollaczek-Geiringer*[5] *általánosított Poisson-eloszlásai.* Ezek az eloszlások azok az összetett Poisson-eloszlások, amelyekre $c_n = 0$, ha $n \geq N$, vagyis amelyekre a generátorfüggvény logaritmusa egy polinom.

Végül megemlítjük, hogy az összetett Poisson-eloszlások azok a diszkrét, korlátlanul osztható eloszlások, amelyeknek csak az $1, 2, \ldots$ helyeken van ugrásuk. *B. de Finetti*[7] jólismert általános képlete (amely *A. N. Kolmogorov*[8], *P. Lévy*[9] és *Lévy-Hincsin* képleteinek speciális esete).

$$\log f(u) = p \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1) d\Phi(x) \tag{4.16}$$

$$\log f(u) = p \sum_{n=1}^{\infty} d_n (e^{iun} - 1) \tag{4.17}$$

-ra redukálódik, ha $\Phi(x)$ egy lépcsősfüggvény, az $n = 1, 2, \ldots$ szakadási helyekkel és $d_n = \Phi(n+0) - \Phi(n-0)$ ugrásokkal.

Az a.)—c.) példák mutatják, hogy az összetett Poisson-eloszlások különböző típusú eloszlásoknak sok változatát szolgálják. Természetesen igen bonyolult probléma megtalálni azt az elosztást, amely adott statisztikai adatokhoz a legjobban illeszkedik. Ha tudjuk, hogy egy elméletileg adott eloszlás az összetett Poisson-eloszlások osztályába tartozik, d_n értékei az eloszlásból egymásután kiszámíthatók a fél-invariánsokra vonatkozó jólismert formulák segítségével.

Bevezetve a

$$\begin{aligned} a_k &= k!\, P(k, p) e^p \ (k = 0, 1, \ldots) \text{ és} \\ H_k &= k!\, d_k p \ (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{4.18}$$

jelöléseket, következik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k z^k}{k!}\right) \tag{4.19}$$

és innen

$$\begin{aligned} H_1 &= a_1 \\ H_2 &= a_2 - a_1^2 \\ H_3 &= a_3 - 3a_1 a_2 - 2a_1^3 \\ H_4 &= a_4 - 3a_2^2 - 4a_1 a_3 + 12a_1^2 a_2 - 6a_1^4 \end{aligned} \tag{4.20}$$

stb.

Figyelembevéve, hogy $p = \log \dfrac{1}{P(0, p)}$, d_k értékei meghatározhatók.

Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézete és
Alkalmazott Matematikai Intézete.
Nehézipari Műszaki Egyetem
Matematikai Intézete, Miskolc.

IRODALOM

[1] A. *Khintchine:* Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse d. Math. II. *4* (1933).

[2] *Loc. cit.*[1] pp. 21–24. *Cf* és a következők: *F. E. Sathertwaite:* Generalized Poisson distribution, Annals of Math. Stat., *13* (1942). 410—417 o.; *W. Feller,* On a general class of contagious distributions, Annals of Math. Stat., *14* (1943) 389—400 o.; és *E. Cansado Maceda,* On the composed and generalized Poisson distributions, Annals of Math. Stat, *19* (1948) 414–416.

[3] *G. Pólya—F. Eggenberger:* Über die Statistik verketteter Vorgänge, Zeitschrift für angewandte Math. u. Mech., *3* (1923) 279—289.

[4] *I. Neyman:* On a new class of „contagious" distributions applicable in entomology and bacteriology, Annals of Math. Stat. *10* (1939) 35—37.

[5] *H. Pollaczek—Geiringer:* Über die Poissonsche Verteilung und die Entwicklung willkürlicher Verteilungen, Zeitschrift J. angewandte Math. u. Mech., *8* (1928) 292—309.

[6] *C. J. L. W. V. Jensen:* Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Math. *30* (1906) 189., ahol be van bizonyítva, hogy a $f(x+y)=f(x)+f(y)$ egyenlet egyedüli egyoldalról korlátos megoldásai $f(x)=cx, c$ konstans. Ez magában foglalja azt, hogy $f(x+y)=f(x)f(y)$ egyenlet egyedüli korlátos megoldásai $f(x)=q^x$ alaknak.

[7] *B. de Finetti:* Sulla possibilita di valori eccessionali per una legge di incrementi aleatori, Atti d. R. Accademiai Naz. dei Lincei, Rendiconti, Cl. sc. fis mat., *10* (1929) 325–330.

[8] *A. Kolmogoroff:* Sulla forme generale di un processo stocastico omogeneo (Un problema di *Bruno* de *Finetti*), Atti d. R. Accadémia Naz. dei Lincei, Rendiconti, Cl sc. fis. mat., *15* (1932), 805–808.

[9] *P Lévy:* Théorie de l'addition des variables aléatoires (Paris 1937).