A LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ ÁLTALÁNOSÍTÁSA A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSBAN

JÁNOSSY LAJOS akadémikus

Előadta az 1951. június 11-én tartott osztályülésen

1. § A Laplace-transzformáció előnyösen alkalmazható egyes valószínűségszámítási problémáknál. A következőkben meg fogjuk mutatni, hogy az e transzformációra vonatkozó jólismert módszerek egy általánosabb módszer speciális esetei.

A Laplace-transzformációt független valószínűségi eloszlások szuperpozíciójaként előálló eredő eloszlás meghatározására használják. Tekintsünk k számú eloszlást, melyeknek sűrűségfüggvényei legyenek rendre $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_k(x)$. Tegyük fel, hogy $a(x)=0$, ha $x<0$, bár ez a feltevés könnyen elejthető. Most meghatározzuk azt az $A_k(X)$ eloszlást, mely megadja a valószínűségét annak, hogy a k számú eloszlás mindegyike egyidejűleg olyan $x_1, x_2, \ldots, x_k$ értékeket ad, hogy

$$X \leqq x_1 + x_2 + \cdots + x_k < X + dX. \tag{1}$$

Az $A_k(X)$ eloszlás tehát a következő formulával van adva:

$$A_k(X)\,dX = \int\int_{X \leqq x_1+x_2+\ldots+x_k < X+dX} \cdots \int a_1(x_1)\,a_2(x_2)\cdots a_k(x_k)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_k. \tag{2}$$

A fenti integrál Laplace-transzformáltját könnyen kiszámíthatjuk, azt találjuk, hogy

$$L_{A_k}(\lambda) = L_{a_1}(\lambda)\,L_{a_2}(\lambda)\ldots L_{a_k}(\lambda), \tag{3}$$

ahol

$$L_{A_k}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} A_k(x)\,dx, \quad L_{a_i}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} a_i(x)\,dx \tag{4}$$

$(i=1, 2, \ldots k)$. A fenti reláció különösen egyszerű lesz, ha az $a_1(x), \ldots, a_k(x)$ eloszlásokat egyenlővé tesszük egymással: $a_1(x) = a_2(x) = \cdots = a_k(x)$. Ebben az esetben $L_{a_1}(\lambda) = L_1(\lambda)$ és $L_{A_k}(\lambda) = L_k(\lambda)$ jelöléssel egyszerűen azt kapjuk, hogy

$$L_k(\lambda) = [L_1(\lambda)]^k. \tag{5}$$

Az (5)-ből az első és második szemi-invariánsra a következő értéket kapjuk:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln L_k(\lambda)\right]_{\lambda=0} = kA,$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \ln L_k(\lambda)\right]_{\lambda=0} = kB,$$

ahol

$$A = -L_1'(0) = \int_0^\infty x a_1(x)\,dx,$$

$$B = L_1''(0) = \int_0^\infty (x-A)^2 a_1(x)\,dx.$$

Tehát a k-szoros eloszlás átlagértéke és szórása pontosan k-szorosa az egyes eloszlásokénak. A (3) inverz transzformáltja így írható:

$$A_k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} e^{\lambda x}[L_1(\lambda)]^k\,d\lambda. \tag{6}$$

k elég nagy értékeire (6) asszimptotikus alakja

$$A_k(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi kB}}\, e^{-(x-kA)^2/2kB},$$

feltéve, hogy $|x-kA|$ nem nagyon nagy. Így tehát A_k a Laplace-transzformáció segítségével mind k mérsékelten nagy értékeire, mind a $k \gg 1$ asszimptotikus esetben maghatározható.

Az (5) és (6) egyenletek általánosíthatóak. Az $A_k(x)$ *pontosan* k esemény szuperpoziciója által előlálló eredő eloszlás. Gyakran azonban maga az események száma is valószínűségi eloszlást követ. Tegyük fel, hogy pontosan k esemény bebövetkezésének valószínűsége p_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Ekkor az eredő eloszlás az A_k-k szuperpoziciója lesz, mégpedig

$$A(x) = \sum_k p_k A_k(x).$$

Az $A(x)$ transzformáltja, $L(\lambda)$, így írható tehát:

$$L(\lambda) = f[L_1(\lambda)], \tag{7}$$

ahol

$$f(u) = \sum_k p_k u^k.$$

$f(u)$ a p_k-eloszlás generátorfüggvénye; az inverziós képletet alkalmazva:

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} e^{\lambda x} f[L_1(\lambda)]\,d\lambda. \tag{8}$$

Fontos különleges eset az, melynél az eloszlások száma Poisson eloszlást követ, azaz

$$p_k = e^{-p}\frac{p^k}{k!} \text{ és } f(u) = e^{p(u-1)}.$$

Ilyenkor

$$L_p(\lambda) = e^{p[L_1(\lambda)-1]}$$

és az átlagértéket ill. szórást kifejező szemi-invariánsok

$$\left|\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln L_p(\lambda)\right|_{\lambda=0} = -pA,$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln L_p(\lambda)\right|_{\lambda=0} = p(B+A^2).$$

Maga az inverz transzformáció pedig így irható:

$$A_p(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_0-i\infty}^{\lambda_0+i\infty} e^{\lambda x+p[L_1(\lambda)-1]}\,d\lambda. \tag{9}$$

Az utóbbi eloszlás ismét asszimptotikusan normális, $p\to\infty$-re. Szokásos módon azt kapjuk, hogy

$$A_p(x) \sim \frac{e^{-(x-pA)^2/2p(B+A^2)}}{\sqrt{2\pi(B+A^2)p}}. \tag{10}$$

Az összeg szórása tehát nagyobb, mint egy tag szórása szorozva a tagok számának átlagával.

2. § Az utóbbi meggondolások tovább általánosíthatók. Tekintsünk egy k tagból álló stacionér Markov-féle láncot. $a(x,y)$ legyen a valószínűség-sűrűsége annak, hogy valamelyik lépésnél az $x\to y$ átmenet történik. k lépésben történő $X\to Y$ átmenet valószínűsége tehát így írható:

$$A_k(X,Y) = \int\int\ldots\int a(X,x_1)\,a(x_1,x_2)\cdots a(x_{k-1},Y)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_{k-1}. \tag{11}$$

Abban a speciális esetben, amikor

$$a(x,y) = a(x-y), \tag{12}$$

(11) a (2)-re redukálódik. ($a_1=a_2=\cdots=a$). Ebben az utóbbi esetben az integrál Laplace-transzformáció segítségével számítható ki.

Másrészt azonban, ha $a(x,y)$ nem a speciális (12) alakú, akkor a (11) Laplace-transzformációja nem vezet célhoz. A következőkben azonban megmutatjuk, hogy (11) egy általánosabb transzformációval kiszámítható. Tekintsük $a(x,y)$-t a következő másodfajú integrálegyenlet magjának:

$$\varphi_s(y) - s\int\varphi_s(x)\cdot a(x,y)\,dx = 0, \tag{13}$$

vagy a konjugált

$$\psi_s(x) - s\int\psi_s(y)\,a(x,y)\,dy = 0 \tag{14}$$

egyenlet magjának.

(13) és (14) sajátfüggvényei felhasználhatók egy „általánosított Laplace-transzformáció" értelmezésére. Valóban, ha azt írjuk, hogy:

$$\int\varphi_s(X)\,A_k(X,Y)\,dX = \Phi_k(s,Y) \tag{15}$$

vagy

$$\int\psi_s(Y)\,A_k(X,Y)\,dY = \Psi_k(s,X), \tag{16}$$

akkor (11), (13) és (14) segítségével a

$$\Phi_k(s, Y) = s^{-k}\varphi_s(Y), \text{ ill. } \Psi_k(s, X) = s^{-k}\psi_s(X) \tag{17}$$

egyenletre jutunk. A (17) egyenlet emlékeztet (5)-re. Az analógia még szembeszökőbb lesz, ha a φ_k-k és ψ_k-k között fennálló

$$\int \varphi_s(x)\psi_t(x)\,dx = 0 \qquad s \neq t \tag{18}$$

orthogonalitási relációkat felhasználjuk, és feltételezzük legalább is egy pillanatra, hogy

$$\int \varphi_s(x)\psi_s(x)\,dx = 1. \tag{19}$$

Ebben az esetben (17), (18) és (19)-ből

$$\Phi_k(s) = s^{-k},$$

ahol

$$\Phi_k(s) = \iint \varphi_s(X)\psi_s(Y)A_k(X, Y)\,dX\,dY. \tag{20}$$

Így tehát a k tagból álló lánc transzformált eloszlása egyszerű alakban áll elő. ($1/s$ az általános esetben megfelel $L_1(\lambda)$-nak a speciális esetben).

Ha változó tagszámú lánccal volna dolgunk, és p_k a valószínűsége annak, hogy a lánc pontosan k tagból áll, akkor (18) segítségével (17) vagy (20) helyett azt kapjuk, hogy:

$$\Phi(s, Y) = \varphi_s(Y)\cdot f\left(\frac{1}{s}\right) \qquad \Psi(s, X) = \psi_s(X)\cdot f\left(\frac{1}{s}\right) \tag{21}$$

és

$$\Phi_k(s) = f\left(\frac{1}{s}\right). \tag{22}$$

(Hogy visszajussunk a Laplace-transzformáció speciális esetéhez, ismét $f\left(\frac{1}{s}\right)$-et $f[L_1(\lambda)]$-val kell helyettesítenünk.)

Hogy az analógiát teljessé tegyük, meg kell találnunk az általánosított transzformáció inverzét. Írjuk le (21)-et explicit alakban, (feltételezve, hogy $f(s) \neq 0$)

$$\varphi_s(Y) - \frac{1}{f\left(\frac{1}{s}\right)} \int \varphi_s(X)A(X, Y)\,dX = 0$$

vagy

$$\psi_s(X) - \frac{1}{f\left(\frac{1}{s}\right)} \int \psi_s(Y)A(X, Y)\,dY = 0. \tag{23}$$

Összehasonlítva (23)-at (15)-el és (16)-al, azt látjuk, hogy $A(X, Y)$ olyan mag, melynek sajátfüggvényei ugyanazok mint az $a(x, y)$ mag sajátfüggvényei, de az s sajátértékeket $1/f\left(\frac{1}{s}\right)$-sel kell helyettesíteni.

Mármost a magfüggvények nagy csoportja sajátfüggvényeinek teljes sorozata segítségével

$$a(x, y) = \sum \frac{\psi_s(x)\varphi_s(y)}{s} \tag{24}$$

alakú sorba fejthető. Az összegezés kiterjesztendő az összes s sajátértékekre, ha pedig a spektrum részben vagy egészen folytonos, akkor megfelelő integrációval kell helyettesíteni.

Posztulálva (24)-et, azonnal látjuk, hogy

$$A(X, Y) = \sum \psi_s(X) \cdot \varphi_s(Y) f\left(\frac{1}{s}\right), \tag{25}$$

feltéve, hogy (25) konvergál. (25)-öt (23)-ba helyettesítve természetesen azonosságokat kapunk, de (25) úgy is megszerkeszthető, hogy (24)-et (11)-be helyettesítjük és felhasználjuk az orthogonalitási relációkat.

Pontosan k tagból álló lánc különleges esetében

$$A_k(x, y) = \sum \frac{\psi_s(x)\varphi_s(y)}{s^k}. \tag{26}$$

Hogy a (26)-nak inverz transzformáció-alakot adhassunk, helyettesítsük be (17)-et (26)-ba és így azt találjuk, hogy

$$A_k(X, Y) = \sum \varphi_s(Y) \Psi_k(s, X). \tag{26a}$$

X-et állandó paraméternek tekinthetjük és (26a) megmutatja, hogyan lehet az $A_k(X, Y)$ függvényt $\Psi_k(s, X)$ transzformáltjából kiszámítani. A (6), (8) és (9)-nek megfelelő általánosított inverz transzformációk tehát így irhatók:

$$A_k(X, Y) = \sum_s \varphi_s(Y) \frac{1}{s^k} \psi_s(X)$$

és

$$A(X, Y) = \sum_s \varphi_s(Y) \cdot f\left(\frac{1}{s}\right) \psi_s(X)$$

és ha a lánc tagjainak száma Poisson-eloszlást mutat, akkor azt kapjuk, hogy

$$A_p(X, Y) = \sum \varphi_s(Y) e^{p(1/s - 1)} \psi_s(X).$$

Az analógia a fenti egyenletek és (6), (8), (9) között úgy értendő, hogy

$$\sum_s \longleftrightarrow \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty}, \quad \varphi_s(Y) \longleftrightarrow e^{\lambda Y},$$

$$f\left(\frac{1}{s}\right) \longleftrightarrow f[L_1(\lambda)]$$

és $\psi_s(X)$ súlyfüggvény, amely azért lép fel, mert a λ szerinti integráció helyett most s-re kell összegezni.

A (26) egyenlet felhasználható arra, hogy $k \to \infty$ esetében aszimptotikus eloszlást kapjunk. Ezt a következőkben mutatjuk meg. A (14) egyenletnek mindig van egy triviális megoldása, nevezetesen $s=1$, $\psi_s(y)=1$, valóban

$$\int a(x,y)\,dy = 1 \tag{27}$$

egyszerűen az $a(x,y)$ sűrűségfüggvény szokásos normálása. Továbbá $s=1$ az abszolút értékben legkisebb sajátérték. Ez a következőképen bizonyítható* (azzal a feltétellel, hogy a sajátfüggvények korlátosak): tegyük fel, hogy $|\psi_s(x)| \leq M$-ben — az $x=x_0$ esetben áll egyenlőség —; (14)-ből

$$|\psi_s(x)| \leq |s|\,M = |s|\,|\psi_s(x_0)|.$$

$x=x_0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $|s| \geq 1$. Így tehát (14)-nek nincs $s=1$-nél abszolút értékben kisebb sajátértéke. Ha létezik legkisebb sajátérték, akkor az szükségképen az $s=1$. (24) szerint ez egyúttal a (13) legkisebb sajátértéke is. A (25) egyenlet tehát így írható (vegyük figyelembe, hogy minden generátorfüggvénynél $f(1)=1$):

$$A(X,Y) = \varphi_1(Y) + \sum_{s\neq 1}' \psi_k(X)\varphi_s(Y) f\left(\frac{1}{s}\right)$$

és abban a különleges esetben, ha $f(s)=s^k$,

$$A_k(X,Y) = \varphi_1(Y) + \sum_{|s|\neq 1}' \frac{\psi_s(X)\varphi_s(Y)}{s^k}.$$

Ha az $s=1$ izolált sajátérték, akkor k minden határon túl való növekedése esetén az összeg eltűnik és így

$$A_k(X,Y) \to \varphi_1(Y), \text{ ha } k \to \infty. \tag{28}$$

Tehát az aszimptotikus eloszlás a (13) legkisebb sajátértékének megfelelő sajátfüggvény. Ha azonban az $s=1$ nem izolált, hanem sajátértékek folytonos sávjának határa, akkor az aszimptotikus eloszlást nem szükségképpen a $\varphi_1(s)$ sajátfüggvény adja meg.

3. §. Mármost részletesen megmutatjuk, hogy hogyan áll elő a Laplace-transzformáció mint speciális eset.

A Laplace-transzformáció akkor hasznos, ha a mag (12) alakú, azaz ha a mag csak a változók különbségétől függ. Ebben a különleges esetben (13) így írható:

$$\varphi_s(y) = s\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_s(x)\,a(x-y)\,dx, \tag{29}$$

$$\psi_s(x) = s\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_s(y)\,a(x-y)\,dy. \tag{30}$$

A fenti egyenletek formálisan kielégülnek a

$$\varphi_s(y) = e^{\lambda y},\quad \psi_s(x) = e^{-\lambda x},\quad \frac{1}{s} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda z} a(z)\,dz. \tag{31}$$

* Ezért a bizonyításért Rényi Alfrédnak kell köszönetet mondanom; hasonló bizonyításokat szoktak használni diszkrét Markov-láncok esetében.

kifejezések helyettesítésével. Ha korlátos sajátfüggvényekre szoritkozunk, akkor λ-t tiszta imaginárius mennyiségnek kell választanunk. Negatív z értékekre azonosan eltünő $a(z)$ függvényekre szorítkozva azt kapjuk tehát, hogy

$$\varphi_s(y) = e^{i\lambda y}, \quad \psi_s(x) = e^{i\lambda x}, \quad s = \frac{1}{L_1(i\lambda)}. \tag{32}$$

Ha (30)-at a különböző kifejezésekbe behelyettesítjük, világosan látjuk azokat az összefüggéseket, melyekre mint irányjelző analógiákra már rámutattunk. Részletesen:

(1). $L_1(0) = 1$, és mivel $a(z) \geqq 0$, ez $L_1(i\lambda)$ maximális értéke, és $\frac{1}{s}$-é is, így $\varphi_1(x) = 1$ és $s = 1$ a legkisebb sajátérték.

(2). Behelyettesítve (32)-t (26a)-ba — normálástól eltekintve — megkapjuk az inverz Laplace-transzformációt.

(3). A (24), (25), (26) egyenletek azonosak az $a(x)$-re, $A(x)$-re és $A_k(\lambda)$-ra szóló inverz transzformációkkal.

A Laplace-transzformáció esetében a $k \to \infty$-re szóló aszimptotikus eloszlást nem $\varphi_1(y)$ adja, mivel $s = 1$ nem izolált érték.

A Laplace-transzformáció esetében különböző $a_1(x), a_2(x) \cdots a_k(x)$ valószínűség-sűrűségeket kapcsolhatunk lánccá. Ezt azért lehet megtenni, mert a megfelelő sajátfüggvények nem függnek ezeknek a függvényeknek az alakjától, maga az $a(z)$ függvény alakja csak a sajátértékeket határozza meg. Az általános Markov-lánc különböző $a_1(x, y), a_2(x, y)$ s. i. t. átmeneti valószínűségekkel ismét csak akkor tárgyalható egyszerűen, ha ezek a függvények olyan magok, melyekhez pontosan ugyanazok a sajátfüggvények tartoznak. Ez lehetséges, pl. az $a(x, y)$-nak és az $A_k(x, y)$-nak azonos a sajátfüggvénysorozata. Az a megszorítás azonban, hogy az $a_k(x, y)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ függvényeknek közös sajátfüggvényrendszerük kell hogy legyen, általában igen erős.

4. § A Mellin-transzformációt kapjuk, ha azt követeljük, hogy

$$a(x, y) = a\left(\frac{y}{x}\right)$$

legyen. A Mellin-transzformáció esete azonban nem különbözik lényegesen a Laplace-transzformáció esetétől és speciális diszkusszió nem szükséges.

Egyszerű példa az, ahol $a(x, y)$ polinom. Tegyük fel pl., hogy

$$a(x, y) = \begin{cases} \sum\limits_{\nu, \mu = 0}^{n} a_{\nu\mu} x^\nu y^\mu, & \text{ha } 0 \leqq x, y \leqq 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A normálási feltétel azt adja, hogy $\sum \frac{a_{\nu\mu}}{\mu + 1} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \nu = 0 \\ 0, & \text{ha } \nu \neq 0. \end{cases}$ A sajátfüggvénypárok:

$$\varphi_s(y) = \sum_{\nu = 1}^{n} \varphi_{s\nu} y^\nu, \qquad \psi_s(x) = \sum_{\nu = 1}^{n} \psi_{s\nu} x^\nu.$$

Az s_k-k a (32)-nek (13) ill. (14)-be való behelyettesítésével nyert szekuláris egyenlet gyökei.

Egy konkrét példa a következő:

$$a(x, y) = 1 + x - 2xy.$$

A sajátfüggvények és sajátértékek az alábbiak:

s	$\varphi_s(y)$	$\psi_s(x)$	$s\int\varphi_s(y)\psi(y)\,dy$
1	$5-3y$	1	7
-6	$2y-1$	$7x-3$	7

A fenti példa mutatja az összes, eddig tárgyalt tulajdonságokat:

(1) Az abszolut értékben legkisebb sajátérték a $\psi_l(x)$-nek megfelelő $s = 1$.

(2) $a(x, y)$ sajátfüggvényekből alkotott sorba fejthető:

$$1 + x - 2xy = \frac{5-3y}{7} - \frac{(2y-1)(7x-3)}{7}.$$

Az aszimptotikus eloszlás

$$\frac{5-3y}{7}.$$

Több tagból álló polinomok hasonlóképen tárgyalhatók.

Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézet
Kozmikus Sugárzási Osztálya.