

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS KÖZPONTI HATÁRÉRTÉKTÉTELENEK EGY ÚJ ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta az 1950 június 2-án tartott osztályülésen

(Székfoglaló előadás.)

Előadásomban egy újabb eredményemről fogok beszámolni a valószínűségi számítás köréből. A valószínűségi számítás iránti érdeklődésemet a Szovjetunióban végzett tanulmányaim során *A. N. Kolmogorov* és *Sz. N. Bernstein*, a valószínűségi számítás nagy mesterei keltették fel; a valószínűségi számítás terén az ő tanítványuk vagyok és nagy hálával tartozom nekik. Azok a vizsgálatok, amelyekről itt beszámolok, a valószínűségi számítás *Kolmogorov* által adott elméletéhez¹ kapcsolódnak, maga a kérdés feltevése is csak ennek az elméletnek a keretében lehetséges.

Ismeretes, hogy *Kolmogorov* a valószínűségi számításnak a mértékelméleten alapuló, axiomatikus felépítésével a valószínűségi számítást exakt matematikai elméletté tette és ugyanakkor alkalmazásainak körét is jelentősen kiszélesítette. *Kolmogorov* axiomatikus rendszere egy H alaphalmaz részhalmazainak T halmaztestén értelmezett $\mu(A)$ ($A \in T$) abszolút additív, nemnegatív és a $\mu(H) = 1$ feltételnek eleget tevő halmazfüggvényből indul ki, a T halmaztest elemeit eseményeknek, a $\mu(A)$ számot az A esemény valószínűségének nevezi. A valószínűségi számítás tárgyát olyan változó mennyiségek vizsgálata alkotja, amelyek valamely tömegjelenség jellemző adatait képezik, értékük esetről esetre változik, azonban értékészletük eloszlása ismeretes — az ilyen mennyiségeket valószínűségi változóknak nevezik. *Kolmogorov* elméletében a valószínűségi változó matematikai fogalma igen egyszerűen értelmezhető: valószínűségi változón olyan, a H halmazon értelmezett $\xi = \xi(a)$ ($a \in H$) függvényt értünk, amely μ -re vonatkozólag mérhető. Ugyancsak igen egyszerűen értelmezhető egy ξ valószínűségi változó várható értéke, $M(\xi)$, mint a ξ függvény μ szerinti integrálja:

$$M(\xi) = \int_H \xi d\mu. \quad (1)$$

A következőkben fel fogjuk tenni, hogy μ Lebesgue-mérték, azaz szeparábilis és teljes, továbbá, hogy μ folytonos mérték. Az absztrakt Lebesgue-mérték elméletére itt nem térhetünk ki, csak megemlítjük, hogy a bizonyítás során felhasználjuk *V. A. Rohlin* ezirányú újabb eredményeit².

Emlékeztetbe idézzük a valószínűségi változók függetlenségének definícióját: jelentse $A(x)$ a $\xi < x$ eseményt és $B(y)$ az $\eta < y$ eseményt, ahol x és y valós számok; a ξ és η valószínűségi változókat akkor nevezzük függetleneknek,

ha x és y minden értéke mellett fennáll a

$$\mu(A(x)B(y)) = \mu(A(x))\mu(B(y)) \quad (2)$$

egyenlőség. Az $F(x) = \mu(A(x))$ függvényt a ξ változó eloszlásfüggvényének nevezzük; ezek szerint a ξ és η valószínűségi változókat akkor nevezzük függetleneknek, ha együttes eloszlásfüggvényük a két változó eloszlásfüggvényének szorzatával egyenlő.

A valószínűségszámításnak a gyakorlati alkalmazások szempontjából rendkívül fontos eredményei egy csoportját a valószínűségszámítás centrális határértéktétele néven szokták összefoglalni. A centrális határértéktétel, amelynek legegyszerűbb eseteit *Moivre* (1730) és *Laplace* (1812) bizonyították be, azután *Csebisev* (1887), *Markov* (1898) és *Ljapunov* (1900) általánosították, az utolsó ötven év folyamán állandóan az érdeklődés középpontjában volt; a centrális határértéktétel különböző irányokba való kiterjesztése és élesítése terén meg kell említenünk *Lindeberg*, *Bernstein*, *Kolmogorov*, *Cramér*, *Doob*, *Feller*, *Hincsin*, *Gnyegyenko*, *Petrovskij*, *Esseen*, és *Linnik* neveit a kérdés rendkívül gazdag irodalmából. A centrális határértéktétel következő fogalmazásából indulunk ki: ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ valószínűségi változók függetlenek, mindegyik középértéke $M(\xi_n) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) és

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{B_n}, \quad (3)$$

ahol

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n M(\xi_k^2) = M\left(\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)^2\right) \quad (4)$$

akkor igen általános feltételek mellett (amelyek részletezésére itt nem térhetünk ki, de nem is lesz rá szükségünk) a ζ_n valószínűségi változó eloszlásfüggvénye konvergál a normális (vagy Gauss-féle) eloszláshoz, másszóval, ha $A_n(x)$ jelenti a $\zeta_n < x$ eseményt,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x). \quad (5)$$

Ezek előrebocsátása után rátérek a vizsgálataim tárgyát képező kérdésekre: Ha a H alaphalmazon értelmezett μ mértéket egy másik μ' mértékkel cseréljük fel, hogyan módosul a ζ_n változók határeloszlása, másszóval, ha az $A_n(x)$ halmazok mértékét egy másik μ' mértékkel mérjük, fog-e létezni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'(A_n(x)) \quad (6)$$

és mi lesz az értéke, amennyiben létezik? Annak ellenére, hogy a kérdés igen kézenfekvő, tudomásom szerint eddig nem vizsgálták.

Ami a kérdés vizsgálatánál először szembetűnik, az, hogy a μ' mértékre vonatkozólag a ξ_n változók általában nem lesznek többé függetlenek, meg-

változik $M(\xi_n)$ értéke és $M(\xi_n^2)$ értéke is; ezek alapján azt várhatnánk, hogy a (6) határérték létezéséről általában nem lehet beszélni, és azt hihetné valaki, hogy a határeloszlás, még ha létezik is, lényegesen eltérhet a normális eloszlástól. Sikertült azonban kimutatnom, hogy a várakozással ellentétben, igen általános feltételek mellett* a (6) *határérték a μ' mérték választásától függetlenül a $\Phi(x)$ normális eloszlásfüggvénnyel egyenlő*. Ez a tétel tehát nem-független valószínűségi változók összegeire általánosítja a valószínűségszámítás centrális határértéktételét; a nem-független valószínűségi változók bizonyos osztályára a centrális határértéktételeket elsőnek *Bernstein* terjesztette ki.³

Tételünk és *Bernstein* eredményei kapcsolatának megvizsgálására más alkalommal térünk ki. Hogy a fentemlített tételt pontosan megfogalmazhassuk, egy új fogalmat kell bevezetnünk, a maximális sorozatok fogalmát. Tegyük fel, hogy a ξ_n változók mindegyike csak véges sok különböző értéket vesz fel, mégpedig legyen $\xi_n = \xi_n(a) = x_{n,k}$ ha $a \in A_{n,k}$ ($k = 1, 2, \dots, h_n$). A valószínűségi változók $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ sorozatát maximálisnak nevezzük, ha az $\{A_{n,k}\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots; k = 1, 2, \dots, h_n$) halmazrendszer a μ mértékre vonatkozólag bázist alkot a H alaphalmazon; ezzel teljesen ekvivalens a következő definíció: a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ valószínűségi változók sorozatát akkor nevezzük maximálisnak, ha abból, hogy $\xi_n(a) = \xi_n(b)$ n minden pozitív egész értékére, $a = b$ következik. Ha például a H alaphalmaz az $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ valós számsorozatok összessége, és a ξ_n valószínűségi változót úgy definiáljuk, hogy $\xi_n(a) = a_n$ (1. pl. *Kolmogorov* idézett munkáját 25. o.), akkor ez a $\{\xi_n\}$ sorozat maximális.

Ezek után megfogalmazhatjuk eredményünket:

Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ valószínűségi változók függetlenek, tegyük fel, hogy minden ξ_n csak véges sok különböző értéket vesz fel, továbbá, hogy $\{\xi_n\}$ maximális sorozat. Legyen $M(\xi_n) = 0$ és $B_n^2 = \sum_{k=1}^{h_n} M(\xi_k^2)$, továbbá

$$\xi_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{B_n};$$

tegyük fel, hogy $B_n \rightarrow \infty$, és hogy ha $A_n(x)$ jelenti a $\xi_n < x$ eseményt, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n(x)) = \Phi(x). \quad (7)$$

Ha a μ' mérték a μ mértékre nézve abszolút folytonos, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'(A_n(x)) = \Phi(x) \quad (8a)$$

is fennáll.

A fenti tétel bizonyítására nem térek ki részletesen, csak annyit említek meg, hogy a következő segédtételek alapszik: Ha A tetszőleges esemény és

* Időközben A. N. *Kolmogorov* az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásában eredményeimet messzemenően általánosította (Megjegyzés a korrekturánál).

(7) érvényes, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cdot A_n(x)) = \mu(A) \cdot \Phi(x) \quad (8b)$$

(feltehetjük, hogy $\mu(A) > 0$ hiszen ha $\mu(A) = 0$, az állítás triviális).

Az ergodikus elméletben az olyan T transzformációt, amelyre fennáll, hogy tetszőleges A és B mérhető halmazokra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(T^n A \cdot B) - \mu(A)\mu(B)] = 0 \quad (9)$$

erősen keverőnek nevezik. Ezen elnevezés mintájára nevezzük a mérhető halmazok egy A_n sorozatát általában erősen keverőnek, ha $\mu(A_n) > \alpha > 0$ és minden B mérhető halmazra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(A_n B) - \mu(A_n)\mu(B)] = 0 \quad (10)$$

fennáll; ezen definíció alapján az említett segédtelet úgy is fogalmazhatjuk, hogy az $A_n(x)$ halmazok sorozata x minden értékére erősen keverő. Ennek a segédteletnek egy másik, talán még meglepőbb fogalmazása a következő: a ξ_n változók sorozata határértékben tetszőleges r valószínűségi változótól független; ezt úgy láthatjuk be, hogy (8)-ban A helyébe helyettesítjük az $r < p$ eseményt.

Hogy egy konkrét példát említsünk, legyen H a $(0, 1)$ intervallum, μ a közös Lebesgue-mérték és $\xi_n(t) = \text{sg} \sin 2^n \pi t$ az n -ik *Rademacher* függvény. Ebben az esetben $B_n = \sqrt[n]{n}$, és a tétel összes feltételei teljesülnek, mert hiszen ismeretes, hogy

$$t = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n(t)}{2^{n+1}}, \quad (11)$$

és így ha $\xi_n(t_1) = \xi_n(t_2)$ ($n = 1, 2, \dots$), akkor $t_1 = t_2$. Ebben az esetben tehát tételünk azt mondja ki, hogy ha $A_n(x)$ a $(0, 1)$ intervallum azon t pontjainak halmazát jelenti, amelyekre

$$\frac{\xi_1(t) + \xi_2(t) + \dots + \xi_n(t)}{\sqrt[n]{n}} < x, \quad (12)$$

(másszóval azon t valós számok összessége, amelyek diadikus kifejtésében az első n jegy között a nullák és egyesek számának különbsége kisebb, mint $x\sqrt[n]{n}$), akkor ha $\mu(A)$ tetszőleges abszolút folytonos mérték, azaz

$$\mu(A) = \int_A \lambda(t) dt \quad (13)$$

ahol a $\lambda(t)$ nemnegatív függvény *Lebesgue* szerint mérhető és

$$\int_0^1 \lambda(t) dt = 1, \quad (14)$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n(x)) = \Phi(x). \quad (15)$$

Hogy még jobban konkretizáljuk tételünk állítását, legyen (13)-ban $\lambda(t) = \frac{1}{r} t^{\frac{1}{r}-1}$, ahol $r > 0$, akkor azon t valós számok halmazának mértéke, amelyek r -ik hatványát a diadikus számrendszerbe kifejtve az első n jegy között a nullák és egyesek számának különbsége $< x/n$, konvergál $\Phi(x)$ -hez, ha $n \rightarrow \infty$.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

- ¹ A. N. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, 1933
- ² В. А. Рохлин: Об основных понятиях теории меры. Математический Сборник 25 (67): 1 (1949), стр 107—150.
- ³ S. Bernstein, Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes des quantités dépendantes, Math. Ann. 97 (1928) 1—59.