

# KÉT BIZONYÍTÁS JÁNOSY LAJOS EGY TÉTELÉRE

RÉNYI ALFRÉD lev. tag és TURÁN PÁL

Jánosy Lajos ezen számban közölt dolgozatában bebizonyítja a következő tételt: *Ha*

$$G(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_n z^n + \dots \quad (1)$$

ahol  $p_0 > 0$ ,  $p_k \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) és  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = G(1) = 1$  akkor a

$$G(z) = z \quad (2)$$

egyenletnek az egységkör belsejében csak egyetlen gyöke lehet és az valós és pozitív.

Ez a tétel igen egyszerűen adódik ki Jánosy egyéb eredményeiből, azonban a tétel érdekességére való tekintettel felvetődik a kérdés: hogyan lehet ezt a tételt közvetlenül egyszerűen bizonyítani? Alább két egyszerű bizonyítást is adunk: az első pusztán elemi algebrai eszközökkel dolgozik és amellet lehetővé teszi az egységkörtön fekvő gyökök kérdésének tisztázását is, a második Rouché tételére való hivatkozással szinte egycsapásra adja a tétel állítását.

Nézzük az első bizonyítást: Legyen  $z_0$  a (2) egyenlet egyetlen nem-negatív és 1-től különböző gyöke: ennek existenciáját Jánosy Lajos dolgozatában teljesen elemi megfontolásokkal kimutatta, ezek megismétlése felesleges volna. Vizsgáljuk először a  $p_0 = 0$  esetet, amikor is  $z_0 = 0$ ; ebben az esetben a (2) egyenlet mindkét oldalát  $z$ -vel osztva a

$$p_1 + p_2 z + p_3 z^2 + \dots = 1 \quad (3)$$

egyenletre jutunk, amelynek az egységkör belsejében nem lehet gyöke (eltekintve attól a triviális esettől, amikor  $p_1 = 1$ , azaz amikor  $G(z) = z$ ) az egységkör kerületén (3)-nak csak olyan gyöke lehet, amely  $n$ -ik egységgyök és viszont abban az esetben, amikor  $p_m = 0$  ha  $m \neq 1 \bmod n$  valóban az összes  $n$ -ik egységgyökök gyökei a (3) és így a (2) egyenletnek. Most vizsgáljuk a  $p_0 > 0$  esetet, amikor is  $z_0 > 0$ ; írjuk fel tehát, hogy

$$G(z_0) = z_0. \quad (4)$$

A (4) azonosságot a (2) egyenletből kivonva és  $(z - z_0)$ -al osztva azt kapjuk, hogy

$$p_1 + p_2(z + z_0) + p_3(z^2 + z z_0 + z_0^2) + \dots = 1. \quad (5)$$

Azonban ha  $|z| \leq 1$  és  $z \neq 1$  akkor (5) baloldalának abszolút értéke kisebb, mint ha mindenütt  $z$  helyett 1-et írunk és így kapjuk, hogy ha volna az (5) azaz a (2) egyenletnek gyöke az egységkörben vagy annak kerületén  $z = 1$ -en kívül, úgy fennállana, hogy

$$1 < p_1 + p_2(1 + z_0) + p_3(1 + z_0 + z_0^2) + \dots \quad (6)$$

A jobboldalon álló geometriai sorokat összegezve kapnánk, hogy

$$1 < \frac{1}{1 - z_0} (p_1(1 - z_0) + p_2(1 - z_0^2) + \dots) = \frac{1 - z_0}{1 - z_0} = 1 \quad (7)$$

vagyis ellentmondásra jutottunk és így a (2) egyenletnek nem lehet gyöke sem az egységkörben  $z_0$ -on kívül, sem az egységkör kerületén a  $z = 1$ -en kívül, ha  $p_0 > 0$ . Így tehát bebizonyítottuk Jánossy tételét, továbbá annak következő kiegészítését: ha  $p_0 = 0$  akkor a (2) egyenletnek csak abban az esetben lehetnek gyökei az egységkör kerületén  $z = 1$ -en kívül, ha létezik olyan  $m$  egész szám, hogy  $p_m = 0$  ha  $m \equiv 1 \pmod{n^*}$ , mely esetben az összes  $n$ -ik egységgyökök gyökei a (2) egyenletnek; ha  $p_0 > 0$  akkor az egységkör kerületén nem fekszik a (2) egyenletnek gyöke  $z = 1$ -en kívül.

Áttérünk a második bizonyításra. Rouché jólismert tétele szerint, ha az  $f(z)$  és  $g(z)$  analitikus függvények regulárisak a  $C$  görbe által határolt  $D$  egyszeresen összefüggő tartományban, beleértve annak kerületét, azaz magát a  $C$  görbét is, és a  $C$  görbén  $|f(z)| > |g(z)|$  akkor az  $f(z)$  és  $f(z) + g(z)$  függvényeknek pontosan ugyanannyi gyöke van a  $D$  tartományban, ha a gyököket multiplicitásaikkal számoljuk. Alkalmazzuk Rouché tételét az  $f(z) = (1 + \varepsilon)z$  és  $g(z) = -G(z)$  függvényekre, ahol  $\varepsilon > 0$  tetszőleges. Nyilván a feltétel teljesül, ha a  $C$  görbének az egységkört választjuk és így következik, hogy az  $(1 + \varepsilon)z - G(z) = 0$  egyenletnek ugyanannyi gyöke van az egységkörben, mint az  $(1 + \varepsilon)z = 0$  egyenletnek, azaz pontosan egy gyöke van. Ha most elvégezzük az  $\varepsilon \rightarrow 0$  határátmenetet, tekintettel arra, hogy az együtthatók folytonos változtatásával az egyenlet gyökei is folytonosan kell, hogy változzanak, következik, hogy a  $z - G(z) = 0$  egyenletnek legfeljebb egy gyöke lehet az egységkörben. Azt, hogy ez a gyök valós kell, hogy legyen, úgy láthatjuk be, hogy mivel az egyenlet együtthatói valósak, ha az egyenletnek volna komplex gyöke, úgy annak konjugáltja is gyök volna, azaz nem egy, hanem két gyök volna, míg azt, hogy a gyök nem lehet negatív, a következőképpen láthatjuk be: ha  $z = -t$  ( $0 < t < 1$ ) akkor

$$G(z) - z = G(-t) + t \left( \sum_{k=0}^{\infty} p_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (t + (-1)^k t^k) > 0.$$

A bizonyításból azon általánosabb tény is következik, hogy a (2) egyenletnek az egységkör belsejében pontosan egy gyöke van abban az esetben is, ha az együtthatók nemnegativitása helyett csupán azt tesszük fel, hogy  $\sum_{k=0}^{\infty} |p_k| \leq 1$ ; ez esetben természetesen az egyetlen gyök nem szükségképpen valós.

A tétel több irányban általánosítható, de erre most nem térünk ki.

Magyar Tudományos Akadémia  
Alkalmazott Matematikai Intézete.  
Budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem  
Matematikai Intézete.

\* Nyilván mindig van egy legnagyobb olyan  $n = n_0$  szám, amelyre ez teljesül, kivéve a  $G(z) \equiv z$  esetet, amikor a feltétel  $n$  minden egész értékére teljesül.