BEKÖVETKEZÉSI ÉS KOINCIDENCIA JELENSÉGEK TÁRGYALÁSA IDŐTARTAMBAN TETSZŐLEGES ELOSZLÁSÚ TÖRTÉNÉSEK ESETÉN

TAKÁCS LAJOS

Bemutatta RÉNYI ALFRÉD az 1951 október 1-én tartott osztályülésen

I. BEKÖVETKEZÉSI JELENSÉGEK

1. §. *A probléma kitűzése*

Tekintsünk egy Poisson-féle sztochasztikus folyamatot. Legyen az események előfordulásának sűrűsége: p. Ekkor annak a valószínűsége, hogy u és $u+\Delta u$ időpontok között *egy (vagy legalább egy) esemény bekövetkezzék* $p\Delta u+o(\Delta u)$, hogy ugyanezen időközben több mint egy esemény következzék be: $o(\Delta u)$*, és így a bekövetkezések számának várható értéke: $p\Delta u$ [1]. A következőkben a rövidség kedvéért azt fogjuk mondani, hogy annak a valószínűsége, hogy u és $u+du$ időpontok között egy esemény bekövetkezzék: $p\,du$.

Tekintsük a Poisson folyamatot $0\leq u<\infty$ időközben és definiáljunk a következőképpen egy újabb folyamatot: A $0\leq u<\infty$ időközben előforduló események bekövetkezésük időpontjában legyenek egy *történés*nek elindítói (kezdőpontjai), mely történés időtartama, ξ legyen valószínűségi változó, abban az esetben, ha az esemény olyankor következik be, midőn történés nincs. Bármely egy történés alatt bekövetkező esemény nem indít el új történést.

Míg az események folyamata Markov-féle (Poisson-folyamat), addig a történések folyamata nem Markov-féle, mivel a folyamat jövőbeli viselkedése nemcsak a jelen állapottól függ, hanem attól is, hogy hogyan jutott a jelen állapotba.

Tárgyalásunk konkretizálására gondoljunk Geiger—Müller számlálóval számlált korpuszkulákra. A számlálandó korpuszkulák a gáztérben ionokat hoznak létre és ezek az ionok egy lökésszerű kisülést okoznak. Az egyszer megindult lökés lefolyását további érkező korpuszkulák nem befolyásolják. Ennélfogva a lökés időtartama alatt esetleg érkező ujabb részecskékre a számolócső érzéketlen. Terminológiánk szerint azt mondjuk, hogy az adott időpontban egy *esemény előfordul,* ha abban az időpillanatban érkezik egy korpuszkula. Az érkező korpuszkulák sok esetben, pl. rádióaktiv atomok bomlásánál, Poisson-folyamatot mutatnak. *Történés*nek nevezzük a lökések időtartamát.

* $o(\Delta u)$ olyan függvényt jelöl, melyre $\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{o(\Delta u)}{\Delta u}=0$, míg $O(\Delta u)$ olyan függvényt melyre $\left|\dfrac{O(\Delta u)}{\Delta u}\right|$ korlátos.

A véletlen események Poisson-folyamatának és a történéseknek fogalmát lásd *Rényi Alfréd* [2] munkájában. A különbség az idézett és jelen tárgyalás között abban van, hogy az idézettnél egy történés időtartama alatt kezdődhetnek újabb történések, míg esetünkben nem.

A következő problémával fogunk foglalkozni: Feltételezzük, hogy csupán $u=0$ időpont után bekövetkező események indítanak el történéseket, azaz a történések folyamatát $u=0$ időpontban kezdődőnek tekintjük és feltételezzük, hogy minden egyes történés időtartama ξ ugyanazon $H(x)$ valószínűségi eloszlásfüggvénnyel bír. ($H(x)$ annak a valószínűségét jelenti, hogy egy történés időtartama $\xi < x$ legyen). Jelentse $W(t, n)$ annak a valószínűségét, hogy a $(0, t)$ időközben történő történések száma $\leq n$ legyen, jelentse $m(t)$ a $(0, t)$ intervallumban kezdődő történések számának várható értékét, mely ha véges, a következőképpen fejezhető ki:

$$m(t)=\sum_{n=0}^{\infty}[1-W(t, n)] \tag{1}$$

és $\tau(t)$ a történések $(0, t)$ időközbe eső időtartamának várható értékét. Ezen mennyiségeket fogjuk a következőkben meghatározni.

Az $m(t)$ és $\tau(t)$ várható értékek meghatározása céljából két függvényt vezetünk be: Legyen annak a valószínűsége, hogy u időpontban legyen egy történés: $F(u)$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy u és $u+\Delta u$ időpontok között kezdődjék egy történés:

$$[1-F(u)]\,[p\Delta u+o(\Delta u)].$$

Ugyanis annak a valószínűsége, hogy $(u, u+\Delta u)$ időközben kezdődjék egy történés egyenlő a következő két független esemény valószínűségének szorzatával: u időpontban ne legyen történés, aminek a valószínűsége $1-F(u)$ és $(u, u+\Delta u)$ időközben kezdődjék egy esemény, aminek a valószínűsége $p\Delta u+o(\Delta u)$.

A következőkben annak a valószínűségét, hogy u és $u+\Delta u$ időpontok között kezdődjék egy történés, így jelöljük:

$$f(u)\Delta u+o(\Delta u).$$

Itt

$$f(u)=[1-F(u)]p. \tag{2}$$

Annak a valószínűsége, hogy $(u, u+\Delta u)$ időközben több mint egy történés kezdődjék, mint könnyen belátható: $o(\Delta u)$.

Ezt a következőkben röviden úgy fejezzük ki, hogy annak a valószínűsége, hogy u és $u+du$ időpontok között kezdődjék egy történés: $f(u)du$.

2. § *$f(u)$ és $F(u)$ meghatározása*

Tegyük fel, hogy ξ várható értéke

$$\alpha=\int_{0}^{\infty}[1-H(x)]\,dx \tag{3}$$

létezik és véges.

Mindenekelőtt felírhatjuk, hogy

$$F(u)=\int_0^u f(u-x)[1-H(x)]\,dx. \tag{4}$$

Ez egyszerűen a következőképpen indokolható: u időpontban akkor van történés, ha $u-x-dx$ és $u-x$ időpontok között kezdődik egy történés, aminek a valószínűsége: $f(u-x)\,dx$ és ennek a történésnek az időtartama x-nél nagyobb, aminek a valószínűsége: $1-H(x)$. Ennek a két független esemény bekövetkezésének a valószínűsége a kettő szorzata és ezt integrálva minden lehetséges x értékre kapjuk $F(u)$-t.

(4)-et (2)-be helyettesítve:

$$f(u)=p-p\int_0^u f(u-x)[1-H(x)]\,dx \tag{5}$$

másodfajú Volterra-féle integrálegyenletre jutunk, mely meghatározza $f(u)$-t. $f(u)$ ismeretében (2) segítségével megkapható $F(u)$.

1. Tétel: Ha

$$\int_0^\infty [1-H(x)]\,dx$$

integrál értéke véges α szám, úgy az (5) *integrálegyenletnek létezik egy és csakis egy nemnegativ, korlátos és folytonos $f(u)$ megoldása.*

A másodfajú Volterra-féle integrálegyenletek exisztencia-tétele szerint minden véges $(0, u)$ intervallumban korlátos, mérhető $1-H(x)$ függvény mellett létezik egy és csakis egy korlátos, mérhető $f(u)$ megoldás [3]. Esetünkben $H(x)$ eloszlásfüggvény nem csökkenő és $0 \leq H(x) < 1$ tehát kielégíti a követelményeket és így létezik egy korlátos, mérhető $f(u)$ megoldás. Könnyen bizonyítható, de (2)-ből is nyílvánvaló, hogy

$$0 \leq f(u) < p.$$

Hátra van $f(u)$ folytonosságának bizonyítása. Integrálegyenletünk a következő alakban is írható:

$$f(u)=p-p\int_0^u f(x)[1-H(u-x)]\,dx. \tag{6}$$

Innen

$$f(u+\Delta u)-f(u)=p\int_0^u f(x)[H(u+\Delta u-x)-H(u-x)]\,dx-$$

$$-p\int_u^{u+\Delta u} f(x)[1-H(u+\Delta u-x)]\,dx \tag{7}$$

$H(x)$ nem csökkenő függvény lévén: $H(u+\Delta u-x)-H(u-x)\geqq 0$, továbbá

$1-H(u+\Delta u-x)\geqq 0$ és $0<f(u)\leqq p$, következőleg

$$|f(u+\Delta u)-f(u)|\leqq p^2\left[\int\limits_u^{u+\Delta u} H(x)\,dx-\int\limits_0^{\Delta u} H(x)\,dx\right]+p^2\Delta u\leqq 2p^2\Delta u$$

azaz $f(u)$ folytonos.

$f(u)$ explicit meghatározása sokszor könnyen keresztülvihető Laplace-transzformáció segítségével. Legyen

$$\psi(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dH(x) \tag{8}$$

mely $\Re(s)\geqq 0$-ra konvergens és

$$\Psi(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}[1-H(x)]\,dx=\frac{1-\psi(s)}{s} \tag{9}$$

mely $\Re(s)\geqq 0$-ra ugyancsak konvergens.

A fenti $f(u)$ függvénnyel

$$\varphi(s)=\int\limits_0^\infty e^{-su}f(u)\,du \tag{10}$$

konvergens $\Re(s)>0$-ra és fennáll

$$\varphi(s)=\frac{p}{s[1+p\Psi(s)]}=\frac{p}{s+p-p\psi(s)} \tag{11}$$

mely megengedi $f(u)$ egyértelmű meghatározását annak folytonossági pontjaiban, azaz minden u-ra.

$f(u)$ minden u-ra korlátos és folytonos, tehát létezik $\varphi(s)$, $\Re(s)>0$-ra és az (5) egyenletből azonnal kapjuk, hogy

$$\varphi(s)+p\varphi(s)\Psi(s)=\frac{p}{s}$$

ahonnan (11) nyerhető. A Laplace-transzformációk elméletéből ismeretes, hogy $\varphi(s)$-ből $f(u)$ egyértelműen meghatározható annak minden folytonossági helyén.

$f(u)$ és $F(u)$ segítségével a várható értékek egyszerűen meghatározhatók.

3. §. *A várható értékek meghatározása*

A $(0, t)$ időintervallumban kezdődő történések várható száma:

$$m(t)=\int\limits_0^t f(u)\,du \tag{12}$$

és a $(0, t)$ időintervallumban kezdődő történések $(0, t)$ időközbe eső várható időtartama:

$$\tau(t)=\int\limits_0^t F(u)\,du. \tag{13}$$

Bizonyítás: Annak a valószínűsége, hogy $(u, u+\Delta u)$ időintervallumban egy történés kezdődjék: $f(u)\Delta u+o(\Delta u)$. Annak a valószínűsége, hogy egynél több történés kezdődjék $o(\Delta u)$. Könnyen belátható, hogy a történések várható számának kifejezését csupán egynél több történésre összegezve a kapott érték: $o(\Delta u)$, ugyanis mint a Poisson-folyamatból ismert az események várható számának kifejezését csupán egynél több eseményre összegezve a kapott érték: $o(\Delta u)$ és méginkább áll ez a történésekre. Következőleg az $(u, u+\Delta u)$ intervallumban kezdődő történések várható száma: $f(u)\Delta u+o(\Delta u)$. Bennünket a $(0, t)$ intervallumban kezdődő történések várható száma érdekel. Osszuk be a $(0, t)$ intervallumot $u_0=0, u_1, u_2, \ldots, u_n=t$ osztópontokkal n számú $\Delta u=t\, n$ nagyságú szakaszra. Az i-edik szakaszon kezdődő események számának várható értéke: $f(u_i)\Delta u+o(\Delta u)$ és a várható érték definiciója szerint:

$$m(t)=\sum_{i=1}^{n}[f(u_i)\Delta u+o(\Delta u)].$$

Mivel $f(u)$ a $(0, t)$ intervallumban korlátos és folytonos, úgy $n\to\infty$ esetén a, fenti Riemann-féle közelítő összeg

$$\int_0^t f(u)\,du$$

integrálhoz konvergál, azaz fennáll (12).

A történések időtartamának $(u, u+\Delta u)$ közbe eső várható értékét a következőképpen határozzuk meg: Három fajta történést különböztetünk meg: 1) u időpontban folyó olyan történést, mely nem fejeződik be $(u, u+\Delta u)$ közben, ennek a valószínűsége $F(u)+O(\Delta u)$ és időtartama Δu. 2) u időpontban folyó olyan történést, mely befejeződik $(u, u+\Delta u)$ közben, ennek a valószínűsége $O(\Delta u)$ és időtartama kisebb Δu-nál. 3) $(u, u+\Delta u)$ közben kezdődő történéseket, melyek várható száma $f(u)\Delta u+o(\Delta u)$ és időtartamuk kisebb Δu-nál.

Ugyanis annak a valószínűsége, hogy egy u időpontban folyó történés $(u, u+\Delta u)$ közben ne fejeződjék be, egyenlő annak valószínűségével, hogy $u+\Delta u$ időpontban legyen történés és ennek a történésnek kezdőpontja $(0, u)$ időközbe essék, azaz ne essék $(u, u+\Delta u)$ közbe. Mivel egy $(u+\Delta u)$ időpontban folyamatban lévő történés két egymást kizáró módon jöhet létre: a történés kezdőpontja vagy (o, u) közbe, vagy $(u, u+\Delta u)$ közbe esik, mely utóbbinak a valószínűsége könnyen beláthatóan $O(\Delta u)$, tehát a keresett valószínűség $F(u+\Delta u)-O(\Delta u)$. Itt $F(u)$ folytonossága miatt $F(u+\Delta u)= =F(u)+O(\Delta u)$. Tehát a kérdéses valószínűség $F(u)$-tól $O(\Delta u)$-val tér el. Továbbá az, hogy u időpontban legyen történés (aminek valószínűsége $F(u)$) ez két egymást kizáró módon lehetséges, vagy nem fejeződik be $(u, u+\Delta u)$-közben, aminek a valószínűsége mint láttuk: $F(u)-O(\Delta u)$ vagy befejeződikl aminek a valószínűsége az előbbiekből következőleg $O(\Delta u)$.

Igy az $(u, u+\Delta u)$ közben folyó történések e közbe eső várható időtartama:

$$F(u)\Delta u+o(\Delta u).$$

Osszuk be a $(0, t)$ intervallumot az előbbi osztópontokkal n részre, úgy a várható érték definiciója szerint felírhatjuk, hogy

$$\tau(t)=\sum_{i=1}^{n}[F(u_i)\Delta u+o(\Delta u)].$$

Mivel $F(u)$ a $(0, t)$ intervallumban korlátos $(0\leqq F(u)<1)$ és folytonos, úgy $n\rightarrow\infty$-re a jobboldal

$$\int_0^t F(u)\,du$$

integrálhoz konvergál, azaz fennáll (13).

1. Megjegyzés. A várható értékek (12) és (13) kifejezése segítségével (2) egyenletből közvetlenül adódik, hogy $m(t)$ és $\tau(t)$ között fennáll a következő összefüggés:

$$m(t)+p\tau(t)=pt \tag{14}$$

2. Megjegyzés: Ha $f(u)$ Laplace-transzformáltja $\varphi(s)$ ismeretes, úgy mint az a Laplace-transzformációk elméletéből ismert, $m(t)=\int_0^t f(u)\,du$ Laplace-transzformáltja $\varphi(s)\,s$, melyből sokszor könnyen meghatározható $m(t)$.

Emlékezetbe idézve azt, hogy ha $f(u)$ Laplace-transzformáltja

$$\varphi(s)=\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{A_{1\nu}}{s-s_\nu}+\frac{A_{2\nu}}{(s-s_\nu)^2}+\cdots+\frac{A_{m_\nu,\nu}}{(s-s_\nu)^{m_\nu}}\right)e^{su_0} \tag{15}$$

úgy

$$f(u)=\begin{cases}\sum_{\nu=0}^{n}\left(A_{1\nu}+A_{2\nu}\frac{(u-u_0)}{1!}+\cdots+A_{m_\nu,\nu}\frac{(u-u_0)^{m_\nu-1}}{(m_\nu-1)!}\right)e^{s_\nu(u-u_0)} & \text{ha } u\geqq u_0\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases} \tag{16}$$

könnyen adódnak az alábbi példák eredményei.

1. Példa. Legyen $\xi=\alpha$ (konstans). Ekkor $\psi(s)=e^{-s\alpha}$ és

$$\varphi(s)=\frac{p}{p+s-pe^{-s\alpha}}=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p}{p+s}\right)^{j+1}e^{-s\alpha j} \tag{17}$$

ahonnan

$$f(u)=p\sum_{j=0}^{\left[\frac{u}{\alpha}\right]}e^{-p(u-\alpha j)}\frac{p^j(u-\alpha j)^j}{j!} \tag{18}$$

és

$$m(t)=\left[\frac{t}{\alpha}\right]+1+\sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]}\sum_{k=0}^{j}\frac{p^k(t-\alpha j)^k}{k!}e^{-p(t-\alpha j)}. \tag{19}$$

2. Példa. Legyen ξ eloszlásfüggvénye $H(x)=1-e^{-x/\alpha}$. Ekkor $\psi(s)=$ $=\frac{1}{1+\alpha s}$ és

$$\varphi(s)=\frac{p(1+\alpha s)}{(1+\alpha p)s+\alpha s^2}=\frac{p}{(1+\alpha p)s}+\frac{\alpha^2p^2}{(1+\alpha p)(1+\alpha p+\alpha s)} \tag{20}$$

ahonnan

$$f(u)=\frac{p}{1+\alpha p}+\frac{\alpha p^2}{1+\alpha p}\,e^{-\frac{1+\alpha p}{\alpha}u} \tag{21}$$

és

$$m(t)=\frac{p}{1+\alpha p}\,t+\frac{\alpha^2 p^2}{(1+\alpha p)^2}\left(1-e^{-\frac{1+\alpha p}{\alpha}t}\right) \tag{22}$$

4. § $f(u)$ *aszimptotikus viselkedése*

2. Tétel: Ha a történések időtartamának átlaga

$$\alpha=\int_0^\infty [1-H(x)]\,dx \tag{23}$$

véges, úgy fennáll

$$\lim_{u\to\infty} f(u)=\frac{p}{1+\alpha p}. \tag{24}$$

Bizonyítás: Mindenekelőtt észrevesszük, hogy fennáll a következő nyílvánvaló egyenlőtlenség:

$$[m(t)-1]\alpha\leqq \tau(t)\leqq m(t)\cdot\alpha. \tag{25}$$

Ebből (14) tekintetbevételével:

$$\frac{p}{1+\alpha p}\leqq\frac{m(t)}{t}\leqq\frac{p}{1+\alpha p}+\frac{\alpha p}{1+\alpha p}\,\frac{1}{t} \tag{26}$$

adódik, azaz fennáll:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(u)\,du=\frac{p}{1+\alpha p}. \tag{27}$$

Ha (24) fennáll, úgy ez magával hozza (27) fennállását, de fordítva nem következik (27)-ből (24), csak akkor, ha bebizonyítottuk, hogy $\lim\limits_{u\to\infty} f(u)$ határérték létezik. Tehát csak két lehetőség van, vagy létezik $\lim\limits_{u\to\infty} f(u)$ határérték és ekkor ezt (24) szolgáltatja, vagy $f(u)$-nak nincs határértéke, midőn $u\to\infty$.

A bizonyítást Paley-Wiener könyvében[4] (p. 59, 17. tétel) kimondott következő tétel segítségével végezzük el:

Legyen $f(u)$ minden véges $(0, u)$ intervallumon korlátos és mérhető függvény. $K(x)$ tartozzék $L(0,\infty)$-hez, azaz legyen

$$\int_0^\infty |K(x)|\,dx<\infty. \tag{28}$$

Legyen ezen függvényekkel

$$f(u)+\int_0^\infty K(u-x)f(x)\,dx\to C \quad \text{midőn } u\to\infty \tag{29}$$

ekkor ha

$$\int_0^\infty K(x)e^{-sx}\,dx\neq -1,\ \Re(s)\geqq 0, \tag{30}$$

úgy fennáll

$$f(u) \to \frac{C}{1+\int\limits_0^\infty K(x)\,dx}, \quad u \to \infty. \tag{31}$$

És viszont ha $K(x)\,L(0, \infty)$-hez tartozik, (30) $s = 0$-ra teljesül, és (29)-ből (31) minden feltételünket kielégítő $f(u)$ esetén következik, akkor fennáll (30).

Legyen most $f(u)$ a (6) integrálegyenlet megoldása. $f(u)$-ról kimutattuk, hogy korlátos és folytonos. Legyen

$$K(x) = p\,[1-H(x)] \tag{32}$$

úgy ez, tekintettel (23)-ra, kielégíti a $K(x)$-re vonatkozó feltevést. Ezen függvényekkel a (6) integrálegyenlet szerint fennáll

$$f(u) + p\int\limits_0^u f(x)\,[1-H(u-x)]\,dx = p \tag{33}$$

azaz $C = p$.

Mivel

$$\int\limits_0^\infty K(x)\,dx = p\int\limits_0^\infty [1-H(x)]\,dx = p\alpha \tag{34}$$

és $C = p$, következőleg fennáll (24) határérték, ha

$$\int\limits_0^\infty K(x)e^{-sx}\,dx = p\int\limits_0^\infty [1-H(x)]e^{-sx}\,dx = p\,\frac{1-\psi(s)}{s} \neq -1, \Re(s) \geqq 0\text{-ra}. \tag{35}$$

Ez pedig érvényes, mivel $s = 0$-ra a baloldal $\alpha p \neq -1$ és $s \neq 0$ esetén ha volna olyan s, melyre $\Re(s) \geqq 0$ és nem elégítené ki (35) összefüggést, úgy erre fennállna

$$\psi(s) = 1 + \frac{s}{p}.$$

Itt azonban $\Re(s) \geqq 0$-ra $|\psi(s)| \leqq 1$ és $s \neq 0$, $\Re(s) \geqq 0$-ra $\left|1 + \frac{s}{p}\right| > 1$. Következőleg nincs olyan s, $\Re(s) \geqq 0$ érték, mely ne elégítené ki (35) összefüggést. Tehát ezzel tételünket bebizonyítottuk.

1. Megjegyzés. A 2. tételt abban az esetben, ha $\alpha p < 1$ Rényi Alfréd elemi módszerekkel bebizonyította. Bizonyítása valószinűleg $\alpha p \geqq 1$ esetére is kiterjeszthető, ami lehetővé tenné Paley-Wiener mélyebb tételének elkerülését.

2. Megjegyzés. Mint ismeretes, ha $f(u)$ határérték létezik $u \to \infty$ esetén, úgy $f(u)$ Laplace transzformáltját $\varphi(s)$-sel jelölve fennáll

$$\lim_{u\to\infty} f(u) = \lim_{s\to 0} s\varphi(s). \tag{36}$$

(Lásd pl. Doetsch könyvében[5] p. 458, 3. tétel). Esetünkben, midőn $f(u)$ a (6) integrálegyenlet megoldása, $\varphi(s)$-et (11) szolgáltatja és erre fennáll:

$$\lim_{s\to 0} s\varphi(s) = \frac{p}{1+p\Psi(0)} = \frac{p}{1+p\alpha}. \tag{37}$$

A tétel fordítottja általában nem igaz. Az idézett könyv[5] (p. 488, 1. tétel) azonban kimond egy tételt, melynek segítségével abban az esetben, ha $\varphi(s)$ eleget tesz bizonyos követelményeknek, megadható $f(u)$ aszimptotikus kifejtése $\varphi(s)$ segitségével. A tárgyalásunkban szereplő $f(u)$ esetén ez az aszimptotikus sor $f(u)$ határértékére redukálódik.

3. Megjegyzés. Ha (26)-ban $m(t)$ helyére beírjuk (12) kifejezést, úgy azt kapjuk, hogy

$$0 \leqq \int_0^t \left[f(u) - \frac{p}{1+\alpha p}\right] du \leqq \frac{\alpha p}{1+\alpha p}, \tag{38}$$

amely (27)-nél erősebb becslést jelent.

5. § *W(t, n) meghatározása*

$W(t, n)$ t-nek folytonos függvénye. Mivel $0 \leqq W(t, n) \leqq 1$ következőleg

$$\omega_n(s) = \int_0^\infty e^{-st} W(t, n)\, dt \tag{39}$$

Laplace transzformáltja konvergens $\Re(s) > 0$-ra és ha

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x) \tag{40}$$

mely $\Re(s) > 0$-ra konvergens, úgy fennáll:

$$\omega_n(s) = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{p^{n+1}(\psi(s))^n}{(p+s)^{n+1}}\right] \tag{41}$$

mely megengedi $W(t, n)$ meghatározását annak minden folytonossági helyén, tehát t minden értékére.

Bizonyítás: Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy $W(t, n)$ folytonos. Az az esemény, hogy a $(0, t+\Delta t)$ időközben kezdődő történések száma $< n$, (aminek valószínűségét $W(t+\Delta t, n)$-el jelöljük) a következő, egymást kizáró módokon állítható elő: $(0, t)$ időközben kezdődik n történés és $(t, t+\Delta t)$ közben nem kezdődik történés, aminek a valószínűsége kisebb 1-nél és nagyobb vagy egyenlő azzal, hogy nem kezdődik esemény, aminek a valószínűsége $[1-p\Delta t-o(\Delta t)]$ vagy $(0, t)$ időközben kezdődik $n-1$ történés és $(t, t+\Delta t)$ közben egy történés, aminek a valószínűsége kisebb egyenlő annak a valószínűségénél, hogy $(t, t+\Delta t)$ időközben egy esemény bekövetkezzék és ennek a valószínűsége: $p\Delta t+o(\Delta t)$ és nagyobb egyenlő nullánál (pontosabban $o(\Delta t)$) vagy $(0, t)$ közben kevesebb mint $n-1$ történés kezdődjék és $(t, t+\Delta t)$ közben több mint egy, aminek a valószínűsége $o(\Delta t)$, azaz

$$W(t+\Delta t, n) < W(t, n) + W(t, n-1)(p\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)$$

és

$$W(t+\Delta t, n) \geq W(t, n)[1-p\Delta t-o(\Delta t)]+W(t, n-1)o(\Delta t)+o(\Delta t)$$

ahonnan

$$-p\Delta t+o(\Delta t) \leq W(t+\Delta t, n)-W(t, n) \leq p\Delta t+o(\Delta t)$$

amiből következik $W(t, n)$ folytonos volta.

Jelöljük az $u=0$ időpontban kezdődő folyamatban az egymásután következő történések kezdőpontjait rendre $u_1, u_2, \ldots, u_n$-nel. Ekkor annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ intervallumban legfeljebb n számú történés kezdődjék, egyenlő azzal, hogy az $n+1$-ik történés t-t követő időpontban kezdődjék, azaz

$$W(t, n)=P(t<u_{n+1}). \tag{42}$$

Mivel $P(t<u_{n+1})+P(u_{n+1} \leq t)=1$ tehát

$$W(t, n)=1-P(u_{n+1} \leq t). \tag{43}$$

Legyen két egymásután következő történés kezdőpontjainak különbsége: $\xi_i=u_i-u_{i-1}$ $(i=2, 3, \ldots)$ és $\xi_1=u_1$ úgy

$$W(t, n)=1-P(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n+1} \leq t). \tag{44}$$

A $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek. Konszekutiv történések kezdőpontjai különbségének a bevezetése és ezzel a problémának független valószínűségi változók összege eloszlásfüggvényének meghatározására való visszavezetése több szerzőnél megtalálható, pl. *Fortet* [6] munkájában.

ξ_1 sűrűségfüggvénye: $g_1(x)=e^{-px}p$. $\xi_2, \xi_3, \ldots$ ugyanazon valószínűségi sűrűségfüggvénnyel bírnak és ez

$$g(x)=p\int_0^x e^{-p(x-\eta)}dH(\eta). \tag{45}$$

Ugyanis két konszekutiv történés kezdőpontjainak különbsége úgy lehet x értékű, hogy a történés η ideig tart és utána $x-\eta$ időtartam elteltével bekövetkezik egy esemény, mely egyuttal történés kezdőpontja is.

$g_1(x)$ és $g(x)$ sűrűségfüggvények folytonosak. $g_1(x)$ Laplace-transzformáltja $\gamma_1(s)=\dfrac{p}{p+s}$ és $g(x)$ Laplace transzformáltja $\gamma(s)=\dfrac{p}{p+s}\psi(s)$. Mindkettő konvergens, ha $\Re(s) \geq 0$. Mivel $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek, a $\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n+1}$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényének Laplace transzformáltja egyenlő az egyes ξ_i változók Laplace transzformáltjainak szorzatával, azaz: $\gamma_1(s)[\gamma(s)]^n$-nel. Továbbá $\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n+1}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének Laplace transzformáltját s-el való osztással nyerjük és így

$$\omega_n(s)=\frac{1}{s}-\frac{\gamma_1(s)[\gamma(s)]^n}{s}=\frac{1}{s}\left[1-\frac{p^{n+1}[\psi(s)]^n}{(p+s)^{n+1}}\right] \tag{46}$$

mely konvergens, ha $\Re(s)>0$.

$\omega_n(s)$ ismeretében $W(t, n)$ meghatározható minden folytonossági helyén s mivel $W(t, n)$ folytonos, tehát minden t értékre.

Megjegyzés: (1)-ből következik, hogy $m(t)$ Laplace transzformáltja:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{s}-\omega_n(s)\right]=\frac{\gamma_1(s)}{s}\sum_{n=0}^{\infty}[\gamma(s)]^n=\frac{\gamma_1(s)}{s[1-\gamma(s)]}=\frac{p}{s[p+s-\psi(s)]} \tag{47}$$

ugyanis ha $\Re(s)>0$ $|\gamma(s)|<1$ s így a sor konvergens. Ez a formula megegyezik a korábban nyert eredménnyel.

Példák: 1) $\xi=\alpha$ (állandó). Ekkor $\psi(s)=e^{-s\alpha}$ és

$$\omega_n(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\left(\frac{p}{p+s}\right)^{n+1}e^{-s\alpha n}=\frac{1}{s}-\left[\frac{1}{s}-\sum_{j=1}^{n+1}\frac{p^{j-1}}{(p+s)^j}\right]e^{-s\alpha n} \tag{48}$$

ahonnan

$$W(t, n)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\frac{p^{j-1}(t-n\alpha)^{j-1}}{(j-1)!}e^{-p(t-n\alpha)} & \text{ha } n\alpha<t\\ 1 & \text{ha } n\alpha\geqq t.\end{cases} \tag{49}$$

2) ξ eloszlásfüggvénye $H(x)=1-e^{-x/\alpha}$. Ekkor $\psi(s)=\dfrac{1}{1+\alpha s}$ és ha $\dfrac{1}{\alpha}\neq p$

$$\omega_n(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\left(\frac{p}{p+s}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{1+\alpha s}\right)^n=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{A_j}{(p+s)^j}+\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j\cdot\alpha^j}{(1+\alpha s)^j} \tag{50}$$

ahol

$$A_j=p^{j-1}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-j}\binom{n+k-j}{k-1}\frac{\alpha^{n+2-j}p^{n+1}}{(1-\alpha p)^{n+k-j+1}}$$

és

$$B_j=-\frac{1}{\alpha^{j-1}}+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+k-j+1}{k-1}\frac{p^{k-1}}{\alpha^{j-k}(1-\alpha p)^{n+k-j}}$$

ha $\dfrac{1}{\alpha}=p$ úgy

$$\omega_n(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\left(\frac{p}{p+s}\right)^{2n+1}=\sum_{j=1}^{2n+1}\frac{p^{j-1}}{(p+s)^j} \tag{51}$$

Ennek megfelelően ha $\dfrac{1}{\alpha}\neq p$ úgy

$$W(t, n)=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{A_j\cdot t^{j-1}}{(j-1)!}e^{-pt}+\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j\cdot t^{j-1}}{(j-1)!}e^{-t/\alpha} \tag{52}$$

és ha $\dfrac{1}{\alpha}=p$, úgy:

$$W(t, n)=\sum_{j=1}^{2n+1}\frac{(pt)^{j-1}}{(j-1)!}e^{-pt}. \tag{53}$$

Érdemes megemlíteni, hogy az (53) eloszlásfüggvény úgy nyerhető a Poisson-eloszlásból, hogy annak tagjait páronként összevonjuk.

Ez a valószínűség közvetlenül visszavezethető Poisson folyamatra. Ugyanis $W(t, n) = 1 - P(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n+1} \leq t)$ hol ξ_1 sűrűségfüggvénye $g_1(x) = e^{-xp}p$, és $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n+1}$ sűrűségfüggvénye $g_1(x) * g_1(x)$ azaz $g_1(x)$-nek önmagával való kompoziciója. Mivel $g_1(x)$ egy p sűrűséggel jellemzett Poisson folyamatban két konszekutiv esemény sűrűségfüggvénye, következőleg $P(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n+1} \leq t)$ annak a valószínűsége, hogy t időtartam alatt legalább $2n+1$ esemény forduljon elő. Ennek a valószínűsége:

$$P(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n+1} \leqq t) = \int_0^t e^{-pu} \frac{(pu)^{2n}}{(2n)!} p\, du = 1 - \sum_{j=0}^{2n} e^{-pt} \frac{(pt)^j}{j!} \qquad (54)$$

és így ezuton is igazolható (53).

Hasonlóképpen állítható elő (52) is Poisson eloszlások kompoziciójaként.

6. § *Stacionárius folyamatok*

Az előző paragrafusokban azt az esetet tárgyaltuk, midőn a folyamat $u = 0$ időpontban kezdődött és $(0, t)$ intervallumban vizsgáltuk a történések számának várható értékét és eloszlásfüggvényét. Ha ez a folyamat már végtelen hosszú ideje tart és egy kiszemelt t hosszúságú szakaszban vizsgáljuk a történések számának várható értékét és eloszlásfüggvényét, úgy az függetlennek adódik a vizsgált intervallum kezdőpontjától, csupán a vizsgált szakasz hosszától függ. Ekkor a folyamatot stacionáriusnak nevezzük.

A várható értékek most is egyszerűen meghatározhatók a kezdődési és történési valószínűségekkel (12) és (13) formulák alapján, melyeknek értéke most állandó, éspedig

$$f^* = \lim_{u \to \infty} f(u) = \frac{p}{1 + \alpha p} \qquad (55)$$

és

$$F^* = \lim_{u \to \infty} F(u) = \frac{\alpha p}{1 + \alpha p}. \qquad (56)$$

Tehát stacionárius folyamat esetén

$$m^*(t) = \frac{pt}{1 + \alpha p} \qquad (57)$$

és

$$\tau^*(t) = \frac{\alpha p t}{1 + \alpha p}. \qquad (58)$$

Jelöljük most $W^*(t, n)$-el egy t hosszúságú időintervallumban kezdődő történések számának valószínűségi eloszlását.

$W^*(t, n)$ folytonos minden t értékre, következőleg

$$\omega_n^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} W^*(t, n)\, dt \tag{59}$$

Laplace-transzformáltja konvergens ha $\Re(s) > 0$ és

$$\omega_n^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \frac{p}{1+\alpha p} \left(1 - \frac{p\psi(s)}{p+s}\right) \left(\frac{p}{p+s}\right)^n (\psi(s))^n \tag{60}$$

amely lehetővé teszi $W^*(t, n)$ meghatározását minden folytonos t értékre, azaz minden t-re.

Bizonyítás: $W^*(t, n)$ folytonos volta $W(t, n)$-hez hasonlóan mutatható ki. Az előző paragrafusban követett tárgyaláshoz hasonlóan ugyanazon jelölésekkel felírható

$$W^*(t, n) = 1 - P(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n+1} \leqq t) \tag{61}$$

hol azonban ξ_1 valószínűségi változó sűrűségi függvénye az előzőtől eltérően:

$$g_1(x) = \frac{p}{1+\alpha p} [1 - G(x)]. \tag{62}$$

Ugyanis, ha valamely történés időtartamának eloszlásfüggvénye $G(x)$ folytonos és átlaga μ úgy annak a valószínűsége, hogy egy adott időpontban éppen folyó történés legfeljebb x időtartam múlva befejeződjék stacionárius folyamat esetében mint ismeretes [7]

$$\int_0^x \frac{1 - G(x)}{\mu}\, dx \tag{63}$$

és ennek sűrűségfüggvénye

$$\frac{1 - G(x)}{\mu}. \tag{64}$$

Esetünkben $G(x)$ a (45) alatt definiált $g(x)$ sűrűségfüggvényhez tartozó eloszlásfüggvény és

$$\mu = \int_0^\infty x g(x)\, dx = \frac{1}{p} + \alpha = \frac{1+\alpha p}{p} \tag{65}$$

$g_1(x)$ Laplace-transzformáltja, mely $\Re(s) \geqq 0$-ra konvergens

$$\gamma_1(s) = \frac{p}{1+\alpha p} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \frac{p\psi(s)}{p+s}\right]. \tag{66}$$

Ennek segítségével az előző paragrafusban követett tárgyaláshoz hasonlóan kapjuk (60)-at:

Megjegyzés: A történések várható számának Laplace-transzformáltja

$$\sum_{n=0}^\infty \left[\frac{1}{s} - \omega_n^*(s)\right] = \frac{1}{s^2} \frac{p}{1+\alpha p} \tag{67}$$

azaz

$$m^*(t)=\frac{pt}{1+\alpha p}$$

mint előbb nyertük.

Példa: $\xi=\alpha$ (konstans). Ekkor $\psi(s)=e^{-s\alpha}$ és

$$\omega_n^*(s)=\frac{1}{s}-\frac{p}{1+\alpha p}\,\frac{1}{s^2}\left(\frac{p}{p+s}\right)^n e^{-s\alpha n}+\frac{p}{1+\alpha p}\,\frac{1}{s^2}\left(\frac{p}{p+s}\right)^{n+1} e^{-s\alpha(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{p}{1+\alpha p}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}-\frac{n}{p}\right)+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1-k)p^{k-1}}{(p+s)^k}\right]e^{-s\alpha n}+ \tag{68}$$

$$+\frac{p}{1+\alpha p}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}-\frac{n+1}{p}\right)+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(n+2-k)p^{k-1}}{(p+s)^k}\right]e^{-s\alpha(n+1)}$$

ahonnan

$$\begin{aligned}W^*(t,n)=1-\frac{p}{1+\alpha p}&\left[\left(t-\frac{n}{p}\right)+\right.\\&\left.+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1-k)p^{k-1}(t-\alpha n)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-p(t-\alpha n)}\right](\text{ha } \alpha n\leq t)+\\+\frac{p}{1+\alpha p}&\left[\left(t-\frac{n+1}{p}\right)+\right.\\&\left.+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(n+2-k)p^{k-1}(t-\alpha(n+1))^{k-1}}{(k-1)!}e^{-p(t-\alpha(n+1))}\right](\text{ha } \alpha(n+1)<t).\end{aligned} \tag{69}$$

Meglepő, hogy míg stacionárius folyamat esetén a várható érték kiszámítása egyszerűbb mint nem stacionárius folyamatnál, addig maga az eloszlásfüggvény komplikáltabb.

II. KOINCIDENCIA JELENSÉGEK

1. § *A probléma kitűzése*

Vizsgáljunk egy olyan rendszert, amely s számú az I részben tárgyalt tipusú egyidejűleg végbemenő folyamatból áll. Ekkor előfordulhat, hogy az s számú folyamat közül adott u időpontban $0, 1, 2, \ldots, s$ számú folyamatban van történés. Azt mondjuk, hogy a rendszer (s számú folyamat együttesen) u időpontban E_j állapotban van, ha egyidejűleg j történés van abban az időpontban.

Definicióképpen azt mondjuk, hogy u időpontban koincidencia van, ha legalább $k(k=1,2,\ldots,s)$ számú egyidejű történés van, azaz a rendszer E_j állapotban van, hol $j\geqq k$. Adott időpontban koincidencia kezdődik, ha $E_{k-1}\to E_k$ átmenet lép fel.

Kérdés, mennyi lesz a $(0,t)$ időközben kezdődő koincidenciák várható száma: $m_{sk}(t)$ és várható időtartama: $\tau_{sk}(t)$.

2. § *A várható értékek meghatározása*

A várható értékek most is meghatározhatók a következő két valószínűség bevezetésével: Legyen $F_k(u)$ annak a valószínűsége, hogy a rendszer u időpontban $E_k, E_{k+1}, \ldots, E_s$ állapotok egyikében legyen. Ekkor annak a valószínűsége, hogyha u időpontban E_{k-1} állapontban van a rendszer, $u+\Delta u$ időpontban E_k állapotban legyen a korábban közölt gondolatmenet szerint könnyen beláthatóan a következőképpen írható: $f_k(u)\Delta u+o(\Delta u)$; röviden annak a feltételes valószínűsége, hogy a rendszer, mely u időpontban E_{k-1} állapotban van, $(u, u+du)$ közben E_k állapotba kerüljön: $f_k(u)\,du$.

Ennek segítségével

$$m_{sk}(t)=\int_0^t f_k(u)\,du \tag{70}$$

és

$$\tau_{sk}(t)=\int_0^t F_k(u)\,du. \tag{71}$$

A bizonyitás (12) és (13) közölt bizonyításához hasonló.

Most

$$f_k(u)du=\binom{s}{k-1}[F(u)]^{k-1}[1-F(u)]^{s-k+1}(s-k+1)p\,du. \tag{72}$$

Ugyanis az $E_{k-1}\to E_k$ átmenet valószínűsége $(u, u+du)$ közben egyenlő a következő esemény valószínűségével: u időpontban $k-1$ folyamatban legyen történés és $s-k+1$-ben ne legyen, amit *Bernoulli* ismétléses valószínűségekre vonatkozó formulája szolgáltat és a szabad $s-k+1$ folyamat egyikében u és $u+du$ időpontok között kezdődjék egy esemény, amelynek a valószínűsége $(s-k+1)p\,du$, mely egyuttal történés is; azaz

$$f_k(u)=ps\binom{s-1}{k-1}[F(u)]^{k-1}\cdot[1-F(u)]^{s-k+1}. \tag{73}$$

Megjegyezzük, hogy annak a valószínűsége, hogy u és $u+\Delta u$ időpontok között $s-k+1$ szabad folyamat egyikében egy esemény kezdődjék: $\binom{s-k+1}{1}(p\Delta u)(1-p\Delta u)^{s-k}+o(\Delta u)=(s-k+1)p\Delta u+o(\Delta u)$ és hogy több mint egy esemény kezdődjék, $o(\Delta u)$. Innen rövidség kedvéért azt mondjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy $(u, u+du)$ időközben kezdődjék egy esemény $(s-k+1)p\,du$.

Annak a valószínűsége, hogy u időpontban koincidencia legyen, egyenlő azzal, hogy k vagy annál több folyamatban legyen történés, azaz

$$F_k(u)=\sum_{j=k}^{s}\binom{s}{j}[F(u)]^{j}[1-F(u)]^{s-j}. \tag{74}$$

3. § *Stacionárius folyamatokból álló rendszerek*

Az előző két paragrafusban az $u = 0$ időpontban kezdődő folyamatokat vizsgáltuk $(0, t)$ intervallumban. Most tegyük fel, hogy a folyamatok végtelen hosszú ideje tartanak és egy kiszemelt t nagyságú intervallumban vizsgáljuk a jelenséget. Ekkor a várható értékek és valószínűségi eloszlások függetlenek az intervallum kezdőpontjától, csupán annak hosszától függnek és a folyamatokat stacionáriusoknak nevezzük.

Ekkor $f_k(u)$ és $F_k(u)$ értékek állandók lesznek éspedig

$$f_k^* = ps\binom{s-1}{k-1}[F^*]^{k-1}[1-F^*]^{s-k+1} \tag{75}$$

és

$$F_k^* = \sum_{j=k}^{s}\binom{s}{j}[F^*]^{j}[1-F^*]^{s-j}. \tag{76}$$

A várható értékek:

$$m_{sk}^*(t) = ps\binom{s-1}{k-1}\left(\frac{\alpha p}{1+\alpha p}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{1+\alpha p}\right)^{s-k+1} t \tag{77}$$

és

$$\tau_{sk}^*(t) = \sum_{j=k}^{s}\binom{s}{j}\left(\frac{\alpha p}{1+\alpha p}\right)^{j}\left(\frac{1}{1+\alpha p}\right)^{s-j} t. \tag{78}$$

Ha egy folyamatban kezdődő történések sűrűségét a következőképpen jelöljük:

$$\bar{n} = \frac{p}{1+\alpha p} \tag{79}$$

úgy

$$m_{sk}^*(t) = s\binom{s-1}{k-1}(\alpha \bar{n})^{k-1}(1-\alpha \bar{n})^{s-k}\bar{n}t \tag{80}$$

-re jutunk, mely formula a kisérleti fizika koincidencia számlálásainál az u. n. véletlen koincidenciák várható számát szolgáltatja.

Az itt nyert eredmények felhasználhatók a gyakorlatban több gép egyidejű működésénél, telefonközpontok méretezésénél és a kísérleti fizika részecskeszámlálásainál előforduló problémák megoldására.

Végül köszönetemet fejezem ki *Rényi Alfrédnak* számos értékes megjegyzéséért.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM.

[1] *A. Khintchine*: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Ergebnisse der Mathemati *2*, Berlin, (1939) 19.

[2] *A. Rényi*: On some problems concerning Poisson processes. [Publicationes Mathematicae, *2* (1951) 66—73].

[3] *Volterra*: Lecons sur les Equations Intégrales et les Equations Integro—Differentielles, Paris, 1913.

[4] *R. E. A. C. Paley* and *Wiener*: Fourier Transforms in the Complex Domain (New-York, 1934).

[5] *G. Doetsch*: Handbuch der Laplace Transformation *1* (Basel, 1950).

[6] *R. Fortet*: Probabilité de perte d'un appel telephonique [Le calcul des probabilités et ses applications, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1944 pp. 105—113].

[7] *S. Malmquist*: A statistical problem connected with the countig of radioactiv particles [Annals of Mathematical Statistics, *18* (1947) 255—264].