BELOUSZOV EGY TÉTELÉRŐL ÉS ANNAK NÉHÁNY ALKALMAZÁSÁRÓL

Írta: HOSSZÚ MIKLÓS (Miskolc)

1. §.

V. D. BELOUSZOV [1][1] egy előadásában a következő tételt mondta ki:

1. TÉTEL: *Amennyiben egy halmaz négy F, G, H, K művelet mindegyikére nézve kvázicsoportot alkot, és ezek között fennáll bármely x, y, z halmazelemhármasra az*

$$F[G(x,y),z]=H[x,K(y,z)] \qquad (x,y,z \in Q) \tag{1}$$

azonosság, akkor létezik olyan csoport, melynek mindnégy kvázicsoport izotópja.

A jelen dolgozatban e tételre egy egyszerű bizonyítást és néhány alkalmazást adunk. E célból először az 1. tételt a következő pontosabb alakban fogalmazzuk meg:

Az (1) függvényegyenlet legáltalánosabb invertálható megoldása

$$\left\{\begin{aligned} F(x,y)&=A(f_1x, h_2k_2y),\\ G(x,y)&=f_1^{-1}A(f_1g_1x, h_2y),\\ H(x,y)&=A(f_1g_1x, h_2y),\\ K(x,y)&=h_2^{-1}A(f_1g_1x, h_2k_2y),\end{aligned}\right. \tag{2}$$

ahol $A(x,y)$ tetszőleges csoport művelet Q felett, továbbá $f_1, g_1, g_2, h_2, k_1, k_2$ tetszőleges invertálható leképezések Q-n a

$$f_1g_2=h_2k_1 \tag{3}$$

megszorítással.

BIZONYÍTÁS: Értelmezzük az

$$i_1x=I(x,a), \quad i_2x=I(a,x), \quad I=F,G,H,K$$

leképezéseket, és helyettesítsünk (1)-ben

$$x=a, \quad y=g_2^{-1}f_1^{-1}u, \quad z=k_2^{-1}h_2^{-1}v,$$

ill.

$$x=g_1^{-1}f_1^{-1}u, \quad y=a, \quad z=k_2^{-1}h_2^{-1}v,$$

ill.

$$x=g_1^{-1}f_1^{-1}u, \quad y=k_1^{-1}h_2^{-1}v, \quad z=a,$$

[1] A szögletes zárójelben álló számok a dolgozat végén található irodalomjegyzékre utalnak. [1]-ben a tétel bizonyítás nélkül van kimondva.

illetve $x = z = a$-t, akkor az

$$(4)\quad \begin{cases} A(u,v) \overset{\text{def}}{=} F(f_1^{-1}u,\ k_2^{-1}h_2^{-1}v) = h_2K(g_2^{-1}f_1^{-1}u,\ k_2^{-1}h_2^{-1}v) \\ = H(g_1^{-1}f_1^{-1}u,\ h_2^{-1}v) = f_1G(g_1^{-1}f_1^{-1}u,\ k_1^{-1}h_2^{-1}v), \end{cases}$$

illetve az

$$F[G(a,y),a] = H[a,K(y,a)]$$

összefüggéshez jutunk. Ebből következik, hogy (1) megoldása csak (2) alakú lehet, ahol fennáll (3) is.

Másrészt nyilvánvaló, hogy (2) ki is elégíti (1)-et tetszőleges asszociatív $A(x,y)$-nal és tetszőleges f_i, g_i, h_i, k_i-val, melyek között a (3) összefüggés fennáll. Erről úgy győződhetünk meg, hogy (2)-t (1)-be helyettesítjük:

$$A[A(f_1g_1x, h_2k_1y), h_2k_2z] = A[f_1g_1x, A(f_1g_2y, h_2k_2z)],$$

és bevezetjük az

$$u = f_1g_1x, \quad v = h_2k_1y = f_1g_2y, \quad w = h_2k_2z$$

jelölést. Ezáltal az 1. tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzések:

1. A bizonyítás F, G, H, K invertálhatóságát csak az $x = a$, ill. $y = a$ helyen használja fel lényegében; így a feltételek enyhítésével a tétel megfelelő módon általánosítható. Ekkor $A(x,y)$ asszociatív, de nem feltétlen invertálható minden rögzített x, ill. y helyen, tehát Q^I csupán egy félcsoport izotópja.[2]

2. Helyettesítsünk $x = \alpha_3u$, $y = \alpha_4v$, $z = \alpha_5w$-t, akkor (1)-et az

$$\alpha_1F[\alpha_2\alpha_2^{-1}G(\alpha_3u, \alpha_4v), \alpha_5w] = \alpha_1H[\alpha_3u, \alpha_6\alpha_6^{-1}K(\alpha_4v, \alpha_5w)]$$

alakban írhatjuk fel. E képlet

$$(5)\ A(x,y) = \alpha_1F(\alpha_2x, \alpha_5y) = \alpha_2^{-1}G(\alpha_3x, \alpha_5y) = \alpha_1H(\alpha_3x, \alpha_6y) = \alpha_6^{-1}K(\alpha_4x, \alpha_5y)$$

asszociativitását fejezi ki; minthogy F, G, H, K között fenn kell állni a (4) összefüggéseknek, Q^I közös csoport izotópjának műveletét kaphatjuk az (5) képlet alapján, ha α_i kielégíti az

$$\alpha_2\alpha_1 = f_1^{-1}, \quad \alpha_2\alpha_3^{-1} = g_1, \quad \alpha_4\alpha_5^{-1} = k_1^{-1}k_2,$$
$$\alpha_6\alpha_5^{-1} = k_2, \quad \alpha_2\alpha_4^{-1} = g_2, \quad \alpha_6\alpha_1 = h_2^{-1}$$

egyenlet rendszert. E rendszer biztosan megoldható, pl. az

$$\alpha_1x = x, \quad \alpha_2 = f_1^{-1}, \ldots$$

[2] A Q halmazt az (invertálható) $I(x,y)$ $(Q \times Q \to Q)$ műveletre nézve Q^I kvázicsoportnak nevezzük. Q^I az S^J izotópja, ha van olyan invertálható $x \to \chi x$, φx, ψx $(Q \to S)$ leképezés, mellyel fennáll

$$\chi I(x,y) = J(\varphi x, \psi y), \qquad (x, y \in Q).$$

Ebből a $\chi = \varphi = \psi$ speciális esetben az izomorfizmus értelmezését nyerjük.

választással a (2) alatti esethez jutunk. Minthogy a csoport tulajdonságok izomorf invariánsok, egy megoldás létezése maga után vonja végtelen sok megoldás létezését. A rendszer megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele éppen (3).

2. §.

A továbbiakban néhány alkalmazást mutatunk be. Ismeretes, hogy az aránypárok beltagjai felcserélhetők. Kérdés, milyen kvázicsoporton érvényes hasonló felcserélhetőség? Ezzel kapcsolatban a következő tételeket bizonyítjuk be:

2. TÉTEL: *Bármely Q° kvázicsoport, amely kielégíti a*

$$x\circ y=u\circ v \rightleftarrows x\circ u=y\circ v, \qquad (x, y, u, v\in Q) \tag{6}$$

összefüggést, egy Abel-féle csoport izotópja, és

$$x\circ y=\alpha(x-y), \qquad (x, y\in Q),$$

ahol $x\to\alpha x$ $(Q\to Q)$ invertálható leképezés, míg $x-y$ egy kommutativ csoport művelet inverze.

3. TÉTEL: *Bármely Q^* kvázicsoport, amely kielégíti a*

$$x*y=u*v \rightleftarrows x*v=u*y, \qquad (x, y, u, v\in Q) \tag{7}$$

összefüggést, egy 2 periódusú csoport izotópja, azaz olyané, amelyben minden elem megegyezik saját inverzével.

BIZONYÍTÁS: Értelmezzük az $x=z\circ y$ művelet inverzét ezen egyenlet $z=x\circ y^{-1}$ megoldásaként. Ez kielégíti az $(x\circ y^{-1})\circ y=(x\circ y)\circ y^{-1}=x$ összefüggést. Akkor (6)-ot a következő alakban írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}&[(u\circ v)\circ y^{-1}]\circ u=y\circ v,\\ &(u\circ v)\circ y^{-1}=(y\circ v)\circ u^{-1}.\end{aligned} \tag{8}$$

Ez utóbbi (1) speciális esete, midőn

$$F(x, y)=H(y, x)=x\circ y^{-1}, \quad G(x, y)=K(y, x)=x\circ y,$$

tehát az 1. tétel szerint

$$x\circ y=\chi^{-1}(\varphi x\cdot\psi y),$$

ahol $x\cdot y$ csoport művelet. Eszerint fennáll

$$\varphi x\cdot\psi y=\varphi u\cdot\psi v \rightleftarrows \varphi x\cdot\psi u=\varphi y\cdot\psi v.$$

Válasszuk y és v-t úgy, hogy $\psi y=\psi v=e$ az egységelem legyen, akkor $\varphi x=\varphi u$, és látható, hogy $\psi u=(\varphi u)^{-1}\cdot a$, ahol $a=\varphi y$ rögzített elem. Így érvényes

$$\varphi x\cdot(\varphi y)^{-1}\cdot a=\varphi u\cdot(\varphi v)^{-1}\cdot a \rightleftarrows \varphi x\cdot(\varphi u)^{-1}\cdot a=\varphi y\cdot(\varphi v)^{-1}\cdot a,$$

ami tetszőleges x, y, u, v mellett csak úgy lehet, ha

$$x \cdot y^{-1} = u \cdot v^{-1} \rightleftarrows x \cdot u^{-1} = y \cdot v^{-1},$$

$$x \cdot u^{-1} = y \cdot u^{-1} \cdot x \cdot y^{-1},$$

következőleg, ha $u = e$-t teszünk,

$$x \cdot y = y \cdot x$$

teljesül, vagyis $x \cdot y$ kommutatív. Tehát

$$x \circ y = \chi^{-1}(\varphi x \cdot \psi y) = \chi^{-1}[\varphi x \cdot (\varphi y)^{-1} \cdot a] = \alpha(x - y),$$

ahol

$$\alpha x = \chi^{-1}(\varphi x \cdot a),$$

míg $x - y$ az

$$x + y = \varphi^{-1}(\varphi x \cdot \varphi y)$$

kommutatív csoport művelet inverze.

A 3. tétel hasonló módon bizonyítható, s ott is fennáll

$$x * y = \chi^{-1}(\varphi x \cdot \psi y),$$

csakhogy most

$$\varphi x \cdot \psi y = \varphi u \cdot \psi v \rightleftarrows \varphi x \cdot \psi v = \varphi u \cdot \psi y,$$

azaz

$$x \cdot y = u \cdot v \rightleftarrows x \cdot v = u \cdot y$$

érvényes. Így

$$x \cdot y = u \cdot x^{-1} \cdot u \cdot y,$$

ami $x = x^{-1}$-et szolgáltatja, ha $y = u$ az egységelem.

Viszont egyszerűen meg lehet győződni arról, hogy az ilyen alakú $x \circ y$ és $x * y$ ki is elégíti (6)-ot, illetve (7)-et.

Megjegyzés: Az $x \circ y$ műveletre nem tudunk felírni olyan jellemző függvényegyenletet, mely csupán az $x \circ y$ műveletet tartalmazza; ezzel szemben az $x \circ y^{-1}$ inverz műveletre lehet találni ilyen belső jellemzést: ha (8)-ban $u = s \circ v^{-1}$, $y = t \circ v^{-1}$-et helyettesítünk, akkor

$$s \circ (t \circ v^{-1})^{-1} = t \circ (s \circ v^{-1})^{-1}$$

-et nyerjük, s ez az asszociatív törvény egy változata (lásd [2, 5]).

3. §.

Egy előző dolgozatomban foglalkoztam a

(9) $$F[G(x, y), H(u, v)] = K[M(x, u), N(y, v)], \qquad (x, y, u, v \in Q)$$

függvényegyenlettel és ennek néhány speciális esetével [3]. Az 1. tétel alapján könnyen következik a

4. TÉTEL: *A* (9) *függvényegyenlet legáltalánosabb invertálható megoldása*

$$
\left\{
\begin{aligned}
F(x,y) &= \alpha x + \beta y,\\
G(x,y) &= \alpha^{-1}(\varphi x + \psi y),\\
H(x,y) &= \beta^{-1}(\sigma x + \omega y),\\
K(x,y) &= \gamma x + \delta y,\\
M(x,y) &= \gamma^{-1}(\varphi x + \sigma y),\\
N(x,y) &= \delta^{-1}(\psi x + \omega y),
\end{aligned}
\right. \tag{10}
$$

ahol $x+y$ *tetszőleges kommutatív csoport művelet, míg*

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi, \sigma, \omega$$

tetszőleges invertálható leképezések Q-n.

BIZONYÍTÁS: Az $u=a$ rögzítéssel látható, hogy

$$F[x, H(a,y)], \quad G(x,y), \quad K[M(x,a), y], \quad N(x,y)$$

kielégíti (1)-et, tehát az 1. tétel szerint

$$
\left.
\begin{aligned}
F(x,y) &= \alpha x + \beta y,\\
G(x,y) &= \alpha^{-1}(\varphi x + \psi y),\\
K(x,y) &= \gamma x + \delta y,\\
N(x,y) &= \delta^{-1}(\nu x + \varrho y),
\end{aligned}
\right\} \qquad (x+y = A(x,y)).
$$

Hasonlóan szimmetria okok miatt

$$
\begin{aligned}
H(x,y) &= \beta^{-1}(\chi x + \varkappa y),\\
M(x,y) &= \gamma^{-1}(\mu x + \pi y).
\end{aligned}
$$

Helyettesítsük ezeket vissza (9)-be:

$$\varphi x + \psi y + \chi u + \varkappa v = \mu x + \pi u + \nu y + \varrho v.$$

A változók alkalmas rögzítésével látható, hogy

$$\mu x = \varphi x + a, \quad \varkappa v = b + \varrho v,$$

tehát φx és ϱv-vel egyszerűsítve

$$\psi y + \chi u + b = a + \pi u + \nu y.$$

Ezután ψy, illetve χu-t az egységelemnek választva

$$\chi u = a + \pi u + c, \text{ ill. } \nu y = d + \psi y + b$$

adódik. Vagyis fennáll

$$\psi y + a + \pi u + c = a + \pi u + d + \psi y,$$

amit más jelölésekkel az

$$y + u + c = u + d + y$$

alakban is felírhatunk. Ha u az egységelem, akkor $y+c=d+y$ következik, ami minden y esetén csak úgy állhat, ha $c=d$ a Q^+ centrumába esik; így c-vel egyszerűsítve

$$y+u=u+y$$

teljesül, azaz Q^+ kommutatív. Következőleg azt irhatjuk, hogy

$$N(x,y)=\delta^{-1}(\nu x+\varrho y)=\delta^{-1}(\psi x+d+b+\varrho y)=\delta^{-1}(\psi x+\omega y),$$

$$H(x,y)=\beta^{-1}(\chi x+\varkappa y)=\beta^{-1}(a+\pi x+c+b+\varrho y)=\beta^{-1}(\sigma x+\omega y),$$

$$M(x,y)=\gamma^{-1}(\mu x+\pi y)=\gamma^{-1}(\varphi x+a+\pi y)=\gamma^{-1}(\varphi x+\sigma y).$$

Viszont nyilvánvaló, hogy (10) *tetszőleges* $\alpha, \beta, \ldots$ invertálható függvénnyel kielégíti (9)-et, ha $x+y$ asszociatív és kommutatív művelet.

Megjegyzés: Ha (9) folytonos megoldásait keressük, akkor a (10) megoldásban szereplő függvények is folytonosak, és az $x+y$ csoport művelet is folytonos. Minthogy minden egytagú folytonos csoport izomorf a valós additív csoporttal, az

$$F(x,y)=K(x,y),\quad G=M=\Phi,\quad H=N=\Psi,$$

$$\Phi[y,F(x,y)]=x,\quad \Psi[F(x,y),x]=y$$

speciális esetben a 4. tétel felhasználásával a hatszögű szövetek alaptételének egy új bizonyítását nyertük. Ugyanis ekkor Φ és Ψ értelmezését figyelembe véve

$$F[\Phi(x,y),\Psi(u,v)]=F[\Phi(x,u),\Psi(y,v)]$$

az $x=y_1$, $v=x_1$, $y_2=\Psi(y,x_1)$, $x_2=\Phi(y_1,y)$, $y_3=\Psi(u,x_1)$, $x_3=\Phi(y_1,u)$ jelöléssel másként az

$$y=F(x_1,y_2)=F(x_2,y_1),\quad u=F(x_1,y_3)=F(x_3,y_1)\Rightarrow F(x_2,y_3)=F(x_3,y_2)$$

alakban írható, ami a Thomsen-féle ábra zárásával egyenértékű [4]. Az egytagú folytonos csoportok előállításának felhasználásával egyéb szövésgeometria tételek bizonyítására is felhasználható az 1. tétel.

IRODALOM

[1] В. Д. Белоусов: Ассоциативные системы квазигрупп, Успехи Мат. Наук 13 (1958), вып. 3 (81), 243.

[2] M. Hosszú: Some functional equations related with the assotiative law, *Publicationes Math.*, 3 (1954) 205—214.

[3] M. Hosszú: A generalization of the functional equation of bisymmetry, *Studia Math.*, 14 (1953) 100—106.

[4] Radó Ferenc,... (sajtó alatti cikk a kolozsvári Mathematica-ban).

[5] A. Sade: ... (sajtó alatti cikk a Publ. Math.-ben).

(Beérkezett: 1958. VIII. 18.)