

KOMPLEMENTUMOS HÁLÓK SZERKEZETÉRŐL

Írta: SZÁSZ GÁBOR (Szeged)

A hálók különféle speciális osztályai közül a hálóelméleten belül is, de még inkább annak a matematika más ágaiban való alkalmazásai terén, kiemelkedő szerepet játszanak a komplementumos és a relatív komplementumos hálók. Ennek megfelelően számos kutató foglalkozott az ilyen hálók szerkezetének vizsgálatával, továbbá olyan természetű problémákkal, hogy bizonyos típusú hálók komplementumos vagy relatív komplementumos voltára milyen más (bizonyos esetekben egyszerűbben kimutatható) szükséges, elegendő, illetve szükséges és elegendő feltételek adhatók meg. Ez a dolgozat is ilyen természetű kérdéseket tárgyal.

Az 1. fejezet a tárgyalás szempontjából legfontosabb definíciókat tartalmazza.

A 2. fejezet először NEUMANN egy klasszikus tételének bizonyos értelmű megfordításával foglalkozik. Ez a megfordítás lényegileg egy speciális alakú, komplementumos moduláris hálók feletti egyenletrendszer megoldhatóságának kimutatását jelentené; közben azonban többre jutunk abban a tekintetben, hogy az 1. tételben egy olyan eljárást adunk meg, amely a felvetődött egyenletrendszer összes megoldásainak meghatározására alkalmas, mégpedig nemcsak komplementumos moduláris, hanem tetszés szerinti korlátos relatív komplementumos hálók esetében is. A tétel erejét mutatja, hogy belőle, ill. felhasználásával számos más eredmény adódik. Így, a fejezet hátralevő részében, a komplementumos moduláris hálókra vonatkozó apróbb alkalmazásokon kívül, e tételre támaszkodva igen egyszerű bizonyítást adunk arra az ismert tételre, hogy minden egyértelműen komplementumos moduláris háló disztributív.

A 3. fejezetben pedig egy DILWORTH-től származó s a kettős végeségi követelménynek eleget tevő komplementumos hálók modularitására vonatkozó kritérium érvényességét e tétel segítségével a korlátos relatív komplementumos hálók osztályára is kiterjesztjük. Ebből adódik a 6. tétel, amely szerint egyértelműen komplementumos nemmoduláris háló nem lehet relatív komplementumos. Ugyancsak a 3. fejezetben még egy szükséges és elegendő feltételt adunk komplementumos hálók moduláris voltára vonatkozólag.

A 4. fejezet problémája a 3. fejezet első §-ában ismertetett Dilworth-féle tételhez analóg tétel felállítása (közelebbről, egy bizonyos típusú részháló

létezésének kérdése) komplementumos nemdisztributív moduláris hálókra. Egyszerű példák mutatják, hogy a pontos analógia nem érvényes; ennek megfelelően szükséges és elegendő feltételt adunk a kívánt típusú részháló létezésére (8. tétel). A tételből rögtön adódik egy projektív geometriai jellegű eredmény olyan páronként idegen lineáris altérhármassok létezéséről, ill. nemlétezéséről, amelyek közül bármely kettő kifeszíti a teret. A tétel érdekessége, hogy a fent nevezett típusú hálók direkt felbontásában szereplő komponensek hosszúságának páros vagy páratlan voltával kapcsolatos.

Az 5. fejezet fő eredménye az, hogy féligmoduláris félkomplementumos háló bármely elemének maximális félkomplementumai egyben az illető elem komplementumai (9. tétel). Következésképpen egy elegendő feltétel adódik arra, hogy egy féligmoduláris félkomplementumos háló komplementumos legyen. (Ilyen kérdésekkel a szerző már régebben is foglalkozott; a jelenlegi eredmény a régebbieket is magában foglalja.) Tételünket rögtön alkalmazzuk olyan végtelen hosszúságú féligmoduláris félkomplementumos hálókra, amelyeknek valamennyi, a háló esetleg létező legnagyobb elemét nem tartalmazó rész-hálója már véges hosszúságú.

1. Definíciók

Az absztrakt algebrában általánosan használt fogalmakat illetőleg [10]-re utalunk.

1.1. Háló és rendezése. Egy L halmazon legyen értelmezve két művelet, melyeket *egyesítésnek* és *metszésnek* nevezünk, s $\cup$, ill. $\cap$ jellel fejezzük ki. L -et *hálónak* nevezzük, ha mindkét művelet asszociatív és kommutatív, továbbá L bármely a, b elempárjára teljesülnek az $a \cup (a \cap b) = a$, $a \cap (a \cup b) = a$ elnyelési azonosságok.

Minden hálóban bevezethető egy rendezési reláció a következő definícióval: a háló a, b elempárjára legyen $a \leq b$ akkor és csak akkor, ha $a = a \cap b$ (vagy, ami ezzel ekvivalens, ha $a \cup b = b$). A továbbiakban mindig erről a rendezésről van szó.

Az L háló a, b elempárját *összehasonlíthatónak* nevezzük, ha vagy $a \leq b$ vagy $a \geq b$ teljesül; ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a, b *összehasonlíthatatlanok*, s ezt az $a \parallel b$ jellel fejezzük ki.

Ha az L háló valamely a, b elempárjára $a < b$, de egyetlen olyan $x (\in L)$ elem sincs, amellyel $a < x < b$ teljesülne, akkor azt mondjuk, hogy a -t *követi* b , s ezt a ténnyt az $a < b$ jellel fejezzük ki.

Ha egy hálónak van olyan eleme, amely minden más elemnél kisebb (ill. nagyobb), akkor ezt az elemet a háló *legkisebb* (ill. *legnagyobb*) *elemének* nevezzük, s o -val (ill. i -vel) jelöljük. Az o, i elemeket ebben a dolgozatban

a háló *korlátelemeinek*, minden más elemét pedig *belső elemnek* fogjuk nevezni. Az L belső elemeinek halmazára bevezetjük az $\mathfrak{B}(L)$ jelölést.

Egy L hálót *alulról* (ill. *felülről*) *korlátosnak* mondunk, ha van o (ill. i) eleme. A mindkét oldalról korlátos hálóra a *korlátos háló* elnevezést használjuk. Alulról korlátos háló valamely $p (\neq o)$ elemét *pontnak* vagy *atomnak* nevezzük, ha $o < p$.

Egy korlátos L hálót *atomosnak* nevezzük, ha az L minden $x (\neq o, i)$ eleméhez található olyan $p, m (\in L)$ elempár, hogy $o < p \leq x \leq m < i$.

1.2. Háló hosszúsága, elem magassága. A háló *részláncain* a háló rendezett részhalmazait értjük. A *láncok hosszúságát* a következőképpen definiáljuk: véges $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ lánc esetén a lánc hossza az n szám, végtelen sok elemből álló lánc esetén pedig az elemek halmazának számossága.

Maximálisnak nevezzük az R láncot (L -ben), ha R az L egyetlen részláncának sem valódi részhalmaza. Az L által tartalmazott összes maximális láncok hosszúságának felső határa a *háló hosszúsága*. Aszerint, hogy ez véges-e vagy végtelen, *véges hosszúságú* és *végtelen hosszúságú* hálókról beszélünk.

Alulról korlátos L háló valamely a elemének *magasságát* az összes $x \leq a$ ($x \in L$) elemek által alkotott részháló hosszúságával definiáljuk, s $d(a)$ -val jelöljük. Ha ez véges, akkor a -t *véges magasságú elemnek* nevezzük.

1.3. Végességi követelmények. Legyen c_0 egy L háló tetszés szerinti eleme, s definiáljuk L -nek egy részláncát a következő módon: a részlánc $\begin{cases} \text{legkisebb} \\ \text{legnagyobb} \end{cases}$ eleme legyen c_0 , egyébként pedig c_k ($k \geq 1$) legyen L valamely olyan eleme, amely $\begin{cases} \text{nagyobb} \\ \text{kisebb} \end{cases}$ c_{k-1} -nél. Ha bármely c_0 -ból kiindulva, minden így képezett lánc véges hosszúságú, akkor azt mondjuk, hogy L *eleget tesz a* $\begin{cases} \text{növekvő} \\ \text{csökkenő} \end{cases}$ *láncok végességi követelményének*. Ha egy hálóban mindkét végességi követelmény érvényes, akkor azt mondjuk, hogy *kettős végességi követelménynek tesz eleget*.

1.4. Félkomplementum, komplementum, relatív komplementum. Legyen L alulról korlátos háló. Az L valamely a elemének *félkomplementumán* értjük az L minden olyan x elemét, amelyre

$$(1) \quad a \cap x = o.$$

Ha emellett $x \neq o$, akkor x az a *valódi félkomplementuma*. Ha L minden belső elemének van valódi félkomplementuma, akkor L -et *félkomplementumos hálónak* nevezzük.

Legyen ezután L (nemcsak alulról, hanem felülről is) korlátos, s a az L valamely eleme. Ekkor az a *komplementumán* értjük az L minden olyan x

elemét, amely (1) mellett az $a \cup x = i$ egyenletet is kielégíti. Ha L bármely elemének van legalább egy komplementuma, akkor L -et *komplementumos hálónak*, ha pedig L minden elemének pontosan egy komplementuma van, akkor *egyértelműen komplementumos hálónak* nevezzük.

Legyen a, b egy tetszés szerinti L háló olyan elempárja, amelyre $a \leq b$. Ekkor az $a \leq r \leq b$ ($r \in L$) feltételeknek eleget tevő r elemek halmaza L -nek részhálójá, amelyet az a, b elempár által meghatározott *intervallumnak* nevezzük s $[a, b]$ -vel jelölünk. Az L valamely s eleméről akkor mondjuk, hogy az r *relatív komplementuma* $[a, b]$ -ben (vagy: r -nek $[a, b]$ -beli relatív komplementuma), ha $r \cap s = a$, $r \cup s = b$. (Következőleg, $s \in [a, b]$.) Ha L minden egyes a, b, r ($a \leq r \leq b$) elemhármasa esetén van r -nek legalább egy relatív komplementuma $[a, b]$ -ben, akkor L -et *relatív komplementumos hálónak* nevezzük.

1.5. A hálók legfontosabb típusai. Egy hálót *disztributívnak* nevezzük, ha bármelyik művelete a másikra nézve disztributív. A komplementumos disztributív hálókat *Boole-algebráknak* szokás nevezni.

Egy hálót *modulárisnak* nevezzük, ha benne $a \leq c$ esetén minden b -re

$$(2) \quad (a \cup b) \cap c = a \cup (b \cap c).$$

Végül, egy L hálót (CROISOT nyomán, 1. [6], 85. o.) *félmodulárisnak* nevezzük, ha az L minden olyan a, b, c elemhármashoz, amelyre

$$b \cap c < a < c < a \cup b,$$

található L -nek legalább egy olyan t eleme, amelyre

$$b \cap c < t \leq b$$

és

$$(a \cup t) \cap c = a.$$

Megjegyezzük, hogy minden disztributív háló egyszersmind moduláris, s minden moduláris háló egyszersmind félmoduláris ([1], 134. o.; [6], 84. o.).

2. Komplementum és relatív komplementum korlátos relatív komplementumos hálókban

2.1. Neumann tétele. A komplementumos moduláris hálók elméletének megalapozása és kiépítése terén igen nagy érdemei vannak NEUMANN JÁNOS-nak. Az ő nevéhez fűződik, többek között, az alábbi, bár majdnem triviálisan bizonyítható, mégis igen fontos tétel, amelyet — célunknak megfelelően — az eredetitől ([9], 6. o.) eltérő szövegezéssel, de lényegileg változatlanul a következőképpen fogalmazunk meg:

Neumann tétele: Legyen L komplementumos moduláris háló, r az L tetszés szerinti eleme, a és b pedig az L olyan, egyébként tetszés szerinti elemei, amelyekre

$$(3) \quad a \leq r \leq b$$

teljesül. Akkor, az r akármelyik komplementumát jelöli is t , az

$$(4) \quad s = (a \cup t) \cap b = a \cup (t \cap b)$$

elem az r (egyik) relatív komplementuma $[a, b]$ -ben.¹

Következően, minden komplementumos moduláris háló relatív komplementumos.

A dolgozatnak ebben a fejezetében a tétel egy bizonyos értelmű megfordításának problémájával s az így nyert eredmény néhány alkalmazásával foglalkozunk.

2.2. Neumann tételének megfordítása. Mindenekelőtt néhány szót szólnunk arról, hogy a tétel milyen értelmű megfordítására gondolunk. A tétel, mint láttuk, komplementumos moduláris hálókra — amelyek természetesen korlátosak és éppen a tétel szerint relatív komplementumosak — kimondja, hogy ha r eleget tesz (3)-nak, t pedig az r komplementuma, akkor minden egyes (4) szerinti s elem az r relatív komplementuma $[a, b]$ -ben. Felvetődik a probléma, hogy viszont előáll-e r minden $[a, b]$ -beli s relatív komplementuma ezen a módon; azaz, az r bármely $[a, b]$ -beli s relatív komplementumához megadható-e az r -nek egy t komplementuma úgy, hogy t kielégítse a (4) egyenletet.

Megmutatjuk, hogy e problémára a válasz igenlő, sőt hogy ez a megfordítás bizonyos nemmoduláris hálókra is érvényes.

Neumann tételének ezt a megfordítását az 1. tétel 1. következménye fogja tartalmazni. Maga a tétel pedig nemcsak a kívánt tulajdonságú t existenciáját fogja igazolni, hanem eljárást is ad az összes ilyen t elemek meghatározására. A tétel 2. következménye kevésbé érdekes; inkább csak a 3. tétel előkészítése érdekében foglalmazzuk meg.

1. TÉTEL: Legyen L korlátos relatív komplementumos háló, a és b az L olyan elemei, amelyekre $a \leq b$ teljesül, r és s pedig az $[a, b]$ olyan elemei, amelyek egymásnak relatív komplementumai $[a, b]$ -ben. Ekkor az

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \cap t = a \\ r \cap t = b \\ (a \cup t) \cap b = s \\ a \cup (t \cap b) = s \end{array} \right.$$

¹ A (4)-beli két kifejezés egyenlő volta a modularitásból következik; 1.(2). — Félreértések elkerülése végett hangsúlyozni kívánjuk, hogy a „Neumann tétele“ kifejezést csak a későbbiek megfogalmazásának könnyítése érdekében használjuk, tehát nem azért, mintha e tétel NEUMANN nagyon értékes munkásságában jelentős helyet foglalna el.

egyenletrendszer t -re nézve megoldható, s a rendszer összes megoldásai előállnak a következő módon: Vesszük

1. az a összes $[o, s]$ -beli relatív komplementumainak Y halmazát,
2. a b összes $[s, i]$ -beli relatív komplementumainak Z halmazát,
3. végül, minden egyes y, z ($y \in Y, z \in Z$) elempárhoz az s összes $[y, z]$ -beli relatív komplementumainak (y -től és z -től függő) T_{yz} halmazát.

Az (5) egyenletrendszer összes megoldásai éppen a $T = \bigcup_{\substack{y \in Y \\ z \in Z}} T_{yz}$ halmaz elemei.²

1. KÖVETKEZMÉNY (Neumann tételének megfordítása): Legyen L korlátos relatív komplementumos háló, a, b, r pedig L olyan elemei, amelyekre $a \leq r \leq b$ teljesül. Akkor az r bármely $[a, b]$ -beli s relatív komplementumához megoldható r -nek legalább egy olyan t komplementuma, amely kielégíti a (4) egyenletet.³

2. KÖVETKEZMÉNY: A tétel feltevései mellett az (5) egyenletrendszer bármely t megoldása előállítható

$$(6) \quad t = ((a' \cap s) \cup s') \cap (s \cup b') = (a' \cap s) \cup (s' \cap (s \cup b'))$$

alakban, ahol a', b', s' rendre az a, b, s elemek egy-egy alkalmasan választott komplementumát jelentik.

A tételnek és következményeinek bizonyítása előtt néhány megjegyzést teszünk.

1. MEGJEGYZÉS: Látjuk, hogy az (5) egyenletrendszer megoldásainak T halmaza csak az a, b, s elemektől függ, r -től azonban független. Ha tehát r_1 és r_2 mindketten az s relatív komplementumai $[a, b]$ -ben, akkor az (5)-ből $r = r_1$ és $r = r_2$ helyettesítéssel előálló két egyenletrendszernek pontosan ugyanazok a t elemek a megoldásai; következésképpen, ebben az esetben r_1 -nek és r_2 -nek van (legalább egy) közös komplementuma.

2. MEGJEGYZÉS: A tételben adott eljárás minden egyes t megoldást pontosan egyszer állít elő, mert ha pl. $y_1 \neq y_2$ ($y_1, y_2 \in Y$), akkor $s \cap t = y_1$ és $s \cap t = y_2$ egyidejűleg L egyetlen t elemére sem teljesülhet.

3. MEGJEGYZÉS: Végül megjegyezzük, hogy a tétel általánosabban is fogalmazható. Ahelyett ugyanis, hogy kikötjük L relatív komplementumos voltát,

² A tételnek egy nagyon speciális esete az [1], 8. fejezet 1. §-ának 2. gyakorlófeladata.

³ Látjuk, hogy az 1. következmény nem más, mint a tételben szereplő, s a tekintett egyenletrendszer megoldhatóságára vonatkozó részletállítás stiláris átfogalmazása. Hogy mégis külön kimondjuk, annak két oka is van. Egyrészt az 1. következmény állítása önmagában is érdekes, másrészt ezáltal válik világossá a tételnek a Neumann-féle tétellel való kapcsolata.

ellegendő feltenni, hogy (az Y és Z halmazok nem üresek s) létezik legalább egy olyan y, z ($y \in Y, z \in Z$) elempár, hogy T_{yz} nem üres.

Ezek után rátérünk a tételnek és következményeinek bizonyítására.

BIZONYÍTÁS: A tétel feltevései miatt az Y, Z, T_{yz} halmazok egyike sem üres. Ha tehát kimutatjuk, hogy a T halmaz elemei valóban kielégítik az (5) egyenletrendszer, akkor ezzel a rendszer megoldhatóságát (tehát az 1. következmény állítását) is bebizonyítottuk. Ennek megfelelően először éppen ezt mutatjuk meg.

Legyen t a T halmaz tetszés szerinti eleme. Ekkor, a T definíciójánál fogva, találhatók olyan $y_t (\in Y)$, $z_t (\in Z)$ elemek, amelyekre érvényesek a következő egyenletek:

$$(7) \quad a \cap y_t = o, \quad a \cup y_t = s,$$

$$(8) \quad b \cap z_t = s, \quad b \cup z_t = i,$$

$$(9) \quad s \cap t = y_t, \quad s \cup t = z_t.$$

Továbbá, a tétel feltevései szerint

$$(10) \quad r \cap s = a, \quad r \cup s = b.$$

Ezeket felhasználva, egyszerű számolással mutatjuk meg, hogy minden egyes t elem az r komplementuma. Ugyanis

$$\begin{aligned} r \cap t &= (r \cap b) \cap (z_t \cap t) = && [(10)\text{-ből és } (9)\text{-ből}] \\ &= r \cap (b \cap z_t) \cap t = \\ &= r \cap s \cap t = (r \cap s) \cap s \cap t = && [(8)\text{-ből}] \\ &= a \cap s \cap t = && [(10)\text{-ből}] \\ &= a \cap y_t = o && [(9)\text{-ből és } (7)\text{-ből}], \end{aligned}$$

s duálisan $r \cup t = i$.

Továbbá, t kielégíti az (5) egyenletrendszer utolsó két egyenletét is. Ugyanis

$$\begin{aligned} (a \cup t) \cap b &= (a \cup y_t \cup t) \cap b = && [(9)\text{-ből}] \\ &= (s \cup t) \cap b = && [(7)\text{-ből}] \\ &= z_t \cap b = s && [(9)\text{-ből és } (8)\text{-ből}], \end{aligned}$$

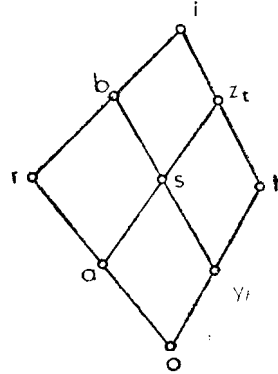
s hasonlóan $a \cup (t \cap b) = s$.

Ezzel befejeztük annak kimutatását, hogy a T tetszés szerinti t eleme az (5) egyenletrendszer megoldása.

Fordítva, tegyük fel, hogy t az (5) egyik megoldása. Defináljunk két elemet, y -t és z -t (L -ben) az

$$y = s \cap t, \quad z = s \cup t$$

egyenletekkel. Ekkor, mindenek előtt, t az s relatív komplementuma $[y, z]$ -ben.



Továbbá, figyelembe véve (5) utolsó két egyenletét,

$$y = s \cap t = (a \cup t) \cap b \cap t = b \cap t,$$

$$z = s \cup t = a \cup (t \cap b) \cup t = a \cup t.$$

Előbbiből a tétel feltevései között szereplő $a \leq b$ és az r definíciójából adódó $a \leq r$ egyenlőtlenség, valamint (5) első egyenlete miatt

$$\begin{aligned} a \cap y &= a \cap (b \cap t) = (a \cap b) \cap t = \\ &= a \cap t \leq r \cap t = o, \end{aligned}$$

s ugyanebből, az (5) utolsó egyenlete miatt,

$$a \cup y = a \cup (b \cap t) = s.$$

Duálisan adódik, hogy

$$b \cup z = i, \quad b \cap z = s.$$

Ezek szerint y az a -nak relatív komplementuma $[o, s]$ -ben, z pedig a b -nek relatív komplementuma $[s, i]$ -ben.

Tehát, az (5) egyenletrendszer tetszés szerinti t megoldása, $y = s \cap t$ és $z = s \cup t$ választással, valóban előáll a tételben leírt módon. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Végül megmutatjuk, hogy a 2. következmény állítása levezethető a tételből. Láttuk, hogy minden egyes, a 2. következmény állításában szereplő t megegyezik a tételben szereplő T halmaz valamelyik elemével. Azonban, ugyancsak a tétel (vagy még egyszerűbben, annak 1. következménye) szerint, Y bármely y , ill. Z bármely z eleme előáll

$$(11) \quad y = o \cup (a' \cap s) = a' \cap s,$$

ill.

$$(12) \quad z = (s \cup b') \cap i = s \cup b'$$

alakban, ahol a' , ill. b' az a , ill. b elem alkalmasan választott komplementuma. Ugyanigy, az y, z elemek akármilyen választása esetén is, T_{yz} minden egyes t eleme előáll

$$(13) \quad t = (y \cup s') \cap z = y \cup (s' \cap z)$$

alakban, ahol s' az s alkalmasan választott komplementuma. Látható, hogy a (11)–(13) egyenletek közvetlenül adják a 2. következmény állítását.

2.3. Alkalmazás moduláris hálókra. A 2.2. §-ban kapott eredményeket most moduláris hálókra fogjuk alkalmazni. NEUMANN tételéből tudjuk, hogy ebben az esetben a korlátosság és a relatív komplementumosság együtt ekvivalens a komplementumossággal; ezért az előző § eredményei bármely komplementumos moduláris hálóra alkalmazhatók.

Először egyszerű bizonyítást adunk a következő ismert tételre:

2. TÉTEL: Minden egyértelműen komplementumos moduláris háló disztributív.

BIZONYÍTÁS: Legyenek a, b, r egy komplementumos moduláris (tehát, NEUMANN tétele szerint egyszersmind relatív komplementumos) L háló olyan, egyébként tetszés szerinti elemei, hogy $a \leq r \leq b$. Az 1. tétel 1. következménye és NEUMANN tétele szerint az r elem $[a, b]$ -beli s relatív komplementumai éppen az összes $s = (a \cup r') \cap b$ alakú elemek, ahol r' befutja az r összes komplementumait. Ha tehát L egyértelműen komplementumos is, akkor minden egyes r elemének bármely azt tartalmazó $[a, b]$ -ben pontosan egy relatív komplementuma van, ez pedig, egy ismert tétel ([1], 134. o.) szerint azt jelenti, hogy L disztributív.

Az 1. tétel 2. kiegészítésével kapcsolatban természetesen vetődik fel a kérdés, milyen további feltételeknek kell a szóban forgó L hálót alávetnünk ahhoz, hogy L minden egyes (6) alakú t eleme az (5) egyenletrendszer megoldása legyen. Következő tételünkben kimutatjuk, hogy ehhez elegendő feltenni L modularitását.

3. TÉTEL: Legyen L komplementumos háló, a és b az L olyan elemei, amelyekre $a \leq b$ teljesül, r és s pedig az $[a, b]$ olyan elemei, amelyek egymásnak relatív komplementumai $[a, b]$ -ben. Továbbá a', b' , ill. s' legyenek az a, b , ill. s elemek tetszés szerinti komplementumai. Ha L moduláris, akkor minden egyes (6) alakú t elem az (5) egyenletrendszer megoldása (s így, speciálisan, az r komplementuma).

BIZONYÍTÁS: A bizonyítás, a feltételek felhasználásával, az $r \cup t$, $r \cap t$, $(a \cup t) \cap b$, $a \cup (t \cap b)$ kifejezések értékének közvetlen kiszámítása útján is elvégezhető, az 1. tétel alapján azonban csaknem számolás nélkül adódik az alábbi megfontolással (amely egyébként nem más, mint az 1. tétel 2. következményének bizonyításánál látott gondolatmenet megfordítása).

Feltevésünk szerint az L háló moduláris. De akkor, NEUMANN tételének értelmében, az a', b', s' tetszés szerinti választása esetén is az

$$y = a \cup (a' \cap s) = a' \cap s$$

elem az a relatív komplementuma $[a, s]$ -ben, a

$$z = (s \cup b') \cap i = s \cup b'$$

elem a b relatív komplementuma $[s, i]$ -ben, s végül a

$$\begin{aligned} t &= ((a' \cap s) \cup s') \cap (s \cup b') = \\ &= (a' \cap s) \cup (s' \cap (s \cup b')) \end{aligned}$$

elem az s relatív komplementuma az $[y, z] = [a' \cap s, s \cup b']$ intervallumban.

Tehát, az 1. tétel figyelembevételével, t valóban az (5) egyenletrendszer megoldása, függetlenül attól, hogy a', b' , ill. s' az a, b , ill. s elem melyik komplementumát jelenti.

A komplementumos moduláris hálókra vonatkozóan még egy olyan eredményt akarunk megemlíteni, amely az 1. tételből adódik. Ez az eredmény ugyan NEUMANN tételének és 1. tételünknek egyszerű következménye, tartalmánál fogva azonban — mint a 3. tétel természetes kiegészítése — mégsem érdektelen.

4. TÉTEL: Legyen L komplementumos moduláris háló, a, b, r pedig az L olyan elemei, amelyekre $a \leq r \leq b$ teljesül. Akkor az r bármely t komplementumához található r -nek olyan $[a, b]$ -beli s relatív komplementuma, valamint az a, b, s elemeknek egy-egy olyan a', b', s' komplementuma, hogy az a', b', s, s', t elemekre (6) teljesül.

BIZONYÍTÁS: NEUMANN tétele szerint az $(a \cup t) \cap b = a \cup (t \cap b)$ elem r relatív komplementuma $[a, b]$ -ben; válasszuk ezt s -nek. Ezzel az s -sel t egy (5) alakú egyenletrendszer megoldása, s így — az 1. tétel 2. következménye szerint — valóban előállítható a 4. tételben kimondott módon.

3. Komplementumos hálók modularitására vonatkozó feltételek

3.1. Dilworth modularitási tétele. Ismeretes, hogy DEDEKIND ([3], 389. o.) hálók moduláris voltára a következő szükséges és elegendő feltételt adta:

Dedekind tétele: Egy háló akkor és csak akkor moduláris, ha nincs a



hálóval izomorf részhálója.

DEDEKIND tételét kettős végességi követelménynek eleget tevő hálók esetére DILWORTH [4] lényegesen élesítette. Tételének idézése előtt állapodjunk meg a következő elnevezésben: egy korlátos L háló valamely R részhálóját *Dilworth-féle részhálónak* mondjuk, ha R tartalmazza az L korlátelemeit és izomorf (14)-gyel. Ezzel az elnevezéssel DILWORTH tétele a következőképpen hangzik:

Dilworth modularitási tétele: *Kettős végességi követelménynek eleget tevő komplementumos háló akkor és csak akkor moduláris, ha nincs Dilworth-féle részhalója.*

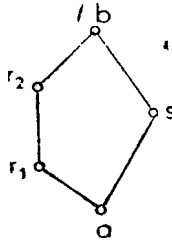
A feltétel szükségessége DEDEKIND tételéből következik; elegendősége viszont hosszas számolást igényel, s az egyes lépések igen lényegesen kihasználják a végességi követelmények fennállását. A következő §-ban tárgyalandó 5. tétel, valamint McLAUGHLIN-nek e dolgozat lezárása után megjelent eredménye („Atomos komplementumos háló akkor és csak akkor moduláris, ha nincs Dilworth-féle részhalója“; l. [8]) azonban mutatják, hogy mégsem egy „véges jellegű“ tételről van szó.

3.2. Dilworth tételének kiterjesztése relatív komplementumos hálókra. Az előbb mondottaknak megfelelően kimutatjuk, hogy érvényes a következő:

5. TÉTEL: *Korlátos relatív komplementumos háló akkor és csak akkor moduláris, ha nincs Dilworth-féle részhalója.*

BIZONYÍTÁS: A feltétel szükségessége ismét triviálisan következik DEDEKIND tételéből; elegendőségét az 1. tétel alapján bizonyítjuk be.

Ha egy korlátos relatív komplementumos L háló nem moduláris, akkor DEDEKIND tétele szerint van legalább egy



diagramos részhalója. Ebben s -nek r_1 és r_2 is $[a, b]$ -beli relatív komplementuma, s így az 1. tétel utáni 1. megjegyzés szerint van olyan t elem, amely r_1 -nek és r_2 -nek is komplementuma. Következésképpen, az $0, r_1, r_2, t, i$ elemek L -nek Dilworth-féle részhalóját képezik. Ezek szerint, ha egy korlátos relatív komplementumos hálónak nincs Dilworth-féle részhalója, akkor az a háló szükségképpen moduláris.

Eredményünket rögtön felhasználjuk arra, hogy bepillantást nyerjünk az egyértelműen komplementumos hálók szerkezetébe. Régebben azt sejtették (l. pl. [2]), hogy minden ilyen háló disztributív; DILWORTH azonban 1945-ben (az [5] dolgozatban) ezt a sejtést megcáfolta, kimutatván, hogy minden háló beágyazható egyértelműen komplementumos hálóba.⁴ Másrészt a 2. tétel sze-

⁴ Ez az eredmény azért cáfolja meg a sejtést, mert disztributív háló minden részhalója is disztributív.

rint egyértelműen komplementumos moduláris háló disztributív is; tehát az egyértelműen komplementumos hálók két osztályba sorolhatók, úgymint a Boole-algebrák és az egyértelműen komplementumos nemmoduláris hálók osztályába. Az utóbbiak szerkezetének feltárása terén új lépést jelent a

6. TÉTEL: *Egyértelműen komplementumos nemmoduláris háló nem lehet relatív komplementumos.*

BIZONYÍTÁS: A tétel közvetlenül adódik az előző tételből. Ha ugyanis a korlátos L háló nemmoduláris, de relatív komplementumos, akkor az 5. tétel szerint van Dilworth-féle részhalója. Következésképp, L ekkor nem egyértelműen komplementumos.

3.3. Egy modularitási feltétel. Dilworth modularitási tétele, s ugyan-csak az általunk bebizonyított 5. tétel szükséges és elegendő feltételt tartalmaz bizonyos típusú komplementumos hálók modularitására. Most, az említett tételekre támaszkodva, egy további modularitási feltételt adunk.

7. TÉTEL: *Legyen L olyan korlátos háló, amely a következő (A), (B) tulajdonságok közül legalább az egyikkel rendelkezik:*

(A) L atomos és komplementumos;

(B) L relatív komplementumos.

Akkor L moduláris voltának szükséges és elegendő feltétele az, hogy L bármely a, b, c elemhármására az

$$(15) \quad a \cup c = i$$

$$(16) \quad a \cap c = o$$

$$(17) \quad b \cap c = o$$

egyenletek fennállásából vagy $b \leq a$, vagy $b \parallel a$ következzenek.

A bizonyításhoz a következő segédtevélt bocsátjuk előre:

SEGÉDTÉTEL: *Korlátos L háló csak akkor moduláris, ha bármely a, b, c elemhármására a (15), (17) egyenletek fennállásából vagy $b \leq a$, vagy $b \parallel a$ következik.*

Mert ha egy korlátos hálóban található olyan a, b, c elemhármás, amelyre a (15), (17) egyenletek mellett $b > a$ is teljesül, akkor (15) szerint $b \cup c \cong \cong a \cup c = i$, (17) szerint pedig $a \cap c \leq b \cap c = o$, s így az o, a, b, c, i elemek L -nek Dilworth-féle részhalóját képezik. Következésképp, DEDEKIND modularitási tétele szerint ekkor L nem moduláris.

Rátérünk a 7. tétel bizonyítására. A segédtevélt szerint a tételben megadott feltétel szükséges; kimutatjuk, hogy elegendő is. E célból tekintsünk egy olyan korlátos L hálót, amelyben (A), ill. (B) teljesül. Ha L nem moduláris, akkor — (A) teljesülése esetén McLAUGHLIN [8]-beli fentebb idézett

eredménye, (B) teljesülése esetén pedig 5. tételünk szerint — tartalmaz Dilworth-féle részhálót; ennek belső elemeit jelöljük a -, b -, c -vel, mégpedig legyen éppen $o < a < b < i$ és $o < c < i$. A Dilworth-féle részháló definíciójából (l. (14)-et a, b, p, q, s helyett rendre o, i, a, b, c -vel) rögtön látható, hogy erre az a, b, c elemhármásra (15), (16) és (17) teljesül; ennek ellenére $b > a$. Ezzel a feltétel-elegendőségét is igazoltuk.

A fentiekből látható, hogy a 7. tételben az (A), ill. (B) tulajdonság bármely olyan (T) tulajdonsággal helyettesíthető, amelyre fennáll az, hogy (T) tulajdonságú komplementumos háló csak akkor moduláris, ha nincs Dilworth-féle részhálója.

4. Véges hosszúságú komplementumos moduláris hálók szerkezetéről

4.1. A probléma felvetése. Ismeretes ([1], 134. o.), hogy egy moduláris háló akkor és csak akkor disztributív, ha nem tartalmaz a



hálóval izomorf részhálót. DEDEKIND és DILWORTH modularitási tételeire vizsgálva, önként vetődik fel a következő kérdés: nem igaz-e DILWORTH tételének olyan analogonja, hogy kettős végességi követelménynek eleget tevő — vagy, ami moduláris hálók esetén ezzel ekvivalens, véges hosszúságú — komplementumos moduláris háló akkor és csak akkor disztributív, ha nem tartalmaz olyan, a (18)-cal izomorf részhálót, amelyben a -nak a háló legkisebb, b -nek pedig a háló legnagyobb eleme felel meg.

Egyszerű ellenpélda meggyőz arról, hogy az állítás „akkor” része általában nem igaz. Tekintsünk például egy ε projektív síkot, s az ε összes lineáris altereinek tartalmazás szerint rendezett (moduláris, de nem disztributív) E hálóját, az üres halmazt is E -hez számítva. Könnyű látni, hogy E -ben nincs olyan (18)-cal izomorf részháló, amely E mindkét korlátelemét tartalmazná. (A p, q, r elemek helyébe ugyanis az ε bizonyos pontjait, illetve egyeneseit kellene helyettesíteni; de akkor a p, q, r elemek között

1. vagy két pontnak kellene előfordulnia, amikor is ezek E -beli egyenesítettje az ε -nak egy egyenese, nem pedig maga az ε ,

2. vagy két egyenesnek kellene előfordulnia, amikor is ezek E -beli metszete az ε -nak egy pontja, nem pedig az üres halmaz.)

A háromdimenziós projektív tér összes lineáris altereinek hálójában viszont — amely ugyancsak moduláris, de nem disztributív — már vannak olyan (18) diagramos részhalók, amelyekben $a = o$ és $b = i$: illet alkot, az üres halmaz és a teljes tér hozzávételével, bármely három páronként kitérő egyenes.

Felvetjük tehát a következő problémát: mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy véges hosszúságú komplementumos nemdisztributív moduláris hálónak legyen olyan (18) diagramos részhalója, amelyben $a = o$ és $b = i$. A fenti két példa alapján várható, hogy ez a feltétel kapcsolatban lesz a háló hosszúságával.

4.2. Előkészületek. Már a felvetett probléma megoldását tartalmazó tételünk megfogalmazásához is szükségünk van a komplementumos moduláris hálók elméletében ismeretes bizonyos eredmények idézésére. A tárgyalás folyamatossága érdekében egyszersmind a bizonyításban alkalmazásra kerülő eredményeket is már most ismertetjük. Mindezeket az eredményeket segédtételek formájában fogalmazzuk meg.

Mindenek előtt két segédtelet mondunk ki a véges hosszúságú komplementumos moduláris hálók szerkezetéről:

1. SEGÉDTÉTEL: *Bármely véges hosszúságú komplementumos moduláris L háló egyértelműen előállítható egy P_0 Boole-algebra és véges számú $P_1, \dots, P_t$ egyszerű⁵ komplementumos nemdisztributív moduláris háló*

$$(19) \quad L = P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_t \quad (t \text{ véges})$$

*direkt összetételeként.*⁶

2. SEGÉDTÉTEL: *Véges hosszúságú komplementumos nemdisztributív moduláris háló akkor és csak akkor egyszerű, ha bármely p, q ($p \neq q$) pontpárhoz található legalább egy olyan r ($r \neq p, q$) további pont, hogy $r < p \vee q$.*

Az 1. segédétel abból következik, hogy ([1], 120. o., Lemma 2 és Theorem 6) minden véges hosszúságú komplementumos moduláris háló egyértelműen előállítható egyszerű (véges hosszúságú) komplementumos moduláris hálók direkt összetételeként; a segédételbeli P_0 a disztributív komponensek direkt összetétele. A 2. segédételre nézve l. [7], 89. o.

3. SEGÉDTÉTEL ([1], 67. o.): *Legyen L véges hosszúságú moduláris háló, s $d(x)$ ($x \in L$) jelentsé az x elem magasságát L -ben. A $d(x)$ függvény értéke akkor és csak akkor 0, ha $x = o$; továbbá, L bármely a, b elempárjára*

$$(20) \quad d(a \vee b) + d(a \wedge b) = d(a) + d(b).$$

⁵ Egy L hálót egyszerűnek nevezünk, ha minden egyes homomorf képe vagy egyelemű háló vagy magával L -lel izomorf.

⁶ Természetesen akár a P_0 , akár az összes P_k ($k = 1, \dots, t$) hálók lehetnek egyelemű hálók is; ez utóbbi esetben — és csak akkor — L disztributív.

DEFINÍCIÓ ([7], 104. o.): *Alulról korlátos moduláris háló valamely $\{p_1, \dots, p_m\}$ (m véges) pontthalmazát függetlennek (s a $p_1, \dots, p_m$ pontokat egymástól függetleneknek) nevezzük, ha⁷ $(\bigcup_{k=1}^l p_k) \cap p_{l+1} = 0$ ($l=1, \dots, m-1$).*

Kimutatható ([1], 104. o.), hogy e definíció — formája ellenére — a pontok adott sorrendjétől független; ebből következik, hogy *független pontthalmaz minden részthalmaza is független.*

4. SEGÉDTÉTEL: *Alulról korlátos moduláris L háló pontjainak bármely $\{p_1, \dots, p_m\}$ halmazára $d(p_1 \cup \dots \cup p_m) \leq m$, s egyenlőség pontosan akkor áll, ha a $\{p_1, \dots, p_m\}$ pontthalmaz független.*

Az $m=2$ esetben a 4. segédtétel triviális, az $m>2$ esetre pedig teljes indukcióval igazolható a következőképpen. Feltesszük, hogy a 4. segédtétel minden legfeljebb $m-1$ elemből álló pontthalmazra igaz. Ekkor a 3. segédtételbeli (20) folytán

$$(21) \quad d(p_1 \cup \dots \cup p_m) = d(p_1 \cup \dots \cup p_{m-1}) + d(p_m) - d((p_1 \cup \dots \cup p_{m-1}) \cap p_m).$$

Az indukciófeltevés miatt (21) jobboldala mindig kisebb vagy egyenlő mint $(m-1) + 1 - 0 = m$. Speciálisan, $\{p_1, \dots, p_m\}$ akkor és csak akkor független, ha $\{p_1, \dots, p_{m-1}\}$ független és $(p_1 \cup \dots \cup p_{m-1}) \cap p_m = 0$, vagyis ha (21) jobboldala éppen egyenlő $(m-1) + 1 - 0 = m$ -mel.

A 4. segédtételből rögtön következik, hogy m -hosszúságú moduláris háló pontjaiból akkor és csak akkor választható ki m -elemű független pontthalmaz, ha a háló legnagyobb eleme előállítható pontok egyesítettjeként. Mivel komplementumos moduláris hálók esetén ez mindig lehetséges ([1], 105. o. Theorem 6), ezért érvényes az

5. SEGÉDTÉTEL: *Ha az L komplementumos moduláris háló hossza m (ahol m véges), akkor L legnagyobb eleme előállítható m számú egymástól független pont egyesítettjeként.*

4.3. A tétel és bizonyítása. Most már megfogalmazhatjuk a 4.1 végén felvetett probléma megoldását.

8. TÉTEL: *Véges hosszúságú komplementumos moduláris L háló akkor és csak akkor tartalmaz olyan (18) diagramos részhálót, amelynek legkisebb eleme az L legkisebb elemével, legnagyobb eleme pedig az L legnagyobb elemével egyezik meg, ha a (19) szerinti direkt felbontásában P_0 az egyelemű háló, s minden egyes P_k ($k=1, \dots, t$) hosszúsága páros.*

⁷ Az $\bigcup_{k=1}^l$ szimbólum jelentése: $\bigcup_{k=1}^l p_k = p_1 \cup \dots \cup p_l$.

BIZONYÍTÁS: Az 1. segédétel szerinti felbontásnak megfelelően az L tetszés szerinti a, b, c elemei reprezentálhatók

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_t) \\ b = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_t) \\ c = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_t) \end{array} \right\} \quad (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in P_k; k = 0, 1, \dots, t)$$

alakban. Továbbá, ha ω_k és ι_k jelenti a P_k ($k = 0, 1, \dots, t$) legkisebb, ill. legnagyobb elemét, akkor az

$$(23) \quad a \cap b = b \cap c = c \cap a = a$$

$$(24) \quad a \cup b = b \cup c = c \cup a = i$$

egyenletek az a, b, c elemekre akkor és csak akkor teljesülnek, ha az a, b, c elemek (22) szerinti komponenseire fennállnak az

$$(25) \quad \alpha_k \cap \beta_k = \beta_k \cap \gamma_k = \gamma_k \cap \alpha_k = \omega_k$$

$$(26) \quad \alpha_k \cup \beta_k = \beta_k \cup \gamma_k = \gamma_k \cup \alpha_k = \iota_k$$

egyenletek.

A fentiekre támaszkodva, először azt mutatjuk meg, hogy a tételben felsorolt feltételek szükségesek. Ebből a célból tegyük fel, hogy L -nek van olyan a, b, c elemhármasa, amely eleget tesz a (23)–(24) egyenleteknek, s így ezeknek az elemeknek komponensei eleget tesznek (25)–(26)-nak.

Ebben az esetben a P_0 disztributív háló $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ elemei egymásnak páronkénti komplementumai. Disztributív háló minden elemének azonban legfeljebb egy komplementuma lehet ([1], 134. o.). Ezért $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ nem lehetnek mind különbözők; nyilván az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy éppen $\alpha_0 = \beta_0$. Ebből azonban, (25)–(26) miatt,

$$\omega_0 = \alpha_0 \cap \beta_0 = \alpha_0 \cap \alpha_0 = \alpha_0 = \alpha_0 \cup \alpha_0 = \alpha_0 \cup \beta_0 = \iota_0$$

következik; ez pedig éppen azt jelenti, hogy P_0 valóban egyetlen elemből áll.

Tekintsük ezután a P_k ($k = 1, \dots, t$) komplementumos moduláris hálókat. A P_k -ban $d(\xi_k)$ -val jelölve a $\xi_k (\in P_k)$ elem magasságát, a 3. segédétel, valamint (25) és (26) miatt,

$$\left. \begin{array}{l} d(\alpha_k) + d(\beta_k) = d(\iota_k) + d(\omega_k) = d(\iota_k) \\ d(\beta_k) + d(\gamma_k) = d(\iota_k) + d(\omega_k) = d(\iota_k) \\ d(\gamma_k) + d(\alpha_k) = d(\iota_k) + d(\omega_k) = d(\iota_k) \end{array} \right\} \quad (k = 1, \dots, t).$$

Összeadva ezeket az egyenleteket, azt kapjuk, hogy

$$2(d(\alpha_k) + d(\beta_k) + d(\gamma_k)) = 3d(\iota_k) \quad (k = 1, \dots, t).$$

Mivel pedig az utóbbi egyenlet baloldalán páros szám áll, ezért a jobboldalán is párosnak kell állnia; azaz, $d(\iota_k)$ -nak (minden k -ra) oszthatónak kell lennie 2-vel.

A feltételek szükségességének bizonyításával tehát készen vagyunk.

A feltételek elegendőségének bizonyításához, a (23)—(24) és (25)—(26) egyenletrendszerek ekvivalenciája miatt, csak azt kell megmutatnunk, hogy *ha egy komplementumos nemdisztributív moduláris P háló páros ($\neq 0$) hosszúságú és egyszerű, akkor P -ben található olyan a, b, c elemek, amelyek kielégítik a (23)—(24) egyenleteket.* (Mivel P nem az egyelemű háló, ezért a (23)—(24) teljesülése esetén a, b, c máris mind különbözők.)

Ennek megfelelően legyen P olyan háló, amelynek megvannak az összes most felsorolt tulajdonságai. Jelöljük a P hosszúságát (annak kifejezésére, hogy ez kikötéseink szerint páros szám) $2n$ -nel, ahol $n > 0$ és egész. Ekkor, $d(x)$ -szel jelölve az $x(x \in P)$ elem magasságát,

$$(27) \quad d(i) = 2n.$$

Az 5. segédétel szerint tehát i előállítható

$$(28) \quad \left(\bigcup_{k=1}^n p_k \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^n q_k \right) = i$$

alakban, ahol $\{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\}$ a P valamely független pontthalmaza.

Válasszuk a -nak, ill. b -nek az

$$(29) \quad a = \bigcup_{k=1}^n p_k$$

$$(30) \quad b = \bigcup_{k=1}^n q_k$$

elemet; ekkor, (28) szerint, máris

$$(31) \quad a \cup b = i.$$

Ugyanakkor, a 3. segédételben foglalt (20) egyenlet, továbbá (31) szerint

$$\begin{aligned} d(a \cap b) &= d(a) + d(b) - d(a \cup b) = \\ &= d(a) + d(b) - d(i). \end{aligned}$$

Azonban, a 4. segédétel és (27) szerint

$$d(a) + d(b) - d(i) = n + n - 2n = 0.$$

Utolsó két egyenletünkben $d(a \cap b) = 0$, azaz — a 3. segédétel első állítása folytán —

$$(32) \quad a \cap b = 0.$$

Tekintsük ezután P összes $e_k = p_k \cup q_k$ ($k = 1, \dots, n$) alakú elemeit. A P egyszerűsége folytán, a 2. segédétel értelmében, minden egyes e_k -hoz van legalább egy olyan $r_k (\neq p_k, q_k)$ pont, hogy $r_k \leq p_k \cup q_k$. Mivel egyrészt a 4. segédétel szerint $d(p_k \cup q_k) = d(q_k \cup r_k) = d(r_k \cup p_k)$, másrészt $r_k \leq p_k \cup q_k$ miatt $q_k \cup r_k, r_k \cup p_k \leq p_k \cup q_k$, ezért

$$(33) \quad e_k = p_k \cup q_k = q_k \cup r_k = r_k \cup p_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Definiáljuk ezután c -t a következőképpen:

$$(34) \quad c = \bigcup_{k=1}^n r_k.$$

Ekkor a (29), (34) és (33) egyenletek szerint,

$$a \cup c \geq p_k \cup r_k = e_k > q_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Ebből és (30)-ból, valamint (31)-ből

$$(35) \quad a \cup c = a \cup (a \cup c) \geq a \cup \left(\bigcup_{k=1}^n q_k \right) = a \cup b = i.$$

Másrészt, a $d(a \cap b)$ kiszámításakor már alkalmazott gondolatmenettel, (35)-öt is felhasználva,

$$\begin{aligned} d(a \cap c) &= d(a) + d(c) - d(a \cup c) = \\ &= d(a) + d(c) - d(i) \leq \\ &\leq n + n - 2n = 0, \end{aligned}$$

ahonnan

$$(36) \quad a \cap c = o.$$

Végül, az a és b elemek szimmetrikus szerepe miatt, az előbbi megfontolásokkal

$$(37) \quad b \cup c = i,$$

$$(38) \quad b \cap c = o$$

is adódik. De (31), (32), valamint (35)–(38) szerint az o, a, b, c, i elemek L -nek (18) diagramos részhalóját képezik.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

4.4. A tétel projektív geometriai kapcsolatai. A komplementumos moduláris hálók elmélete kapcsolatban áll a projektív terek elméletével: számos projektív geometriai tételnek megvan a hálóelméleti megfelelője, s a komplementumos moduláris hálókra vonatkozó egyes tételekből érdekes projektív geometriai eredmények is adódnak.

A 8. tétel projektív geometriai megfelelőjét igen könnyen megfogalmazhatjuk. Legyen $\mathfrak{P}$ az n -dimenziós valós projektív tér, P pedig a $\mathfrak{P}$ összes lineáris altereinek tartalmazás szerint rendezett hálója (az üres halmazt is a lineáris alterek közé számítva). Ekkor a P egy $(n+1)$ -hosszúságú komplementumos moduláris háló. Nevezzük a $\mathfrak{P}$ két $\mathfrak{X}$ és $\mathfrak{Y}$ lineáris alterét a $\mathfrak{P}$ független generátorpárjának, ha e két alter közös elem nélküli s együtt kifeszíti a $\mathfrak{P}$ teret. Ekkor a 8. tételből azonnal következik, hogy a $\mathfrak{P}$ projektív térben akkor és csak akkor található olyan $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ lineáris alterek, melyek közül bármely kettő a $\mathfrak{P}$ -nek független generátorpárját alkotja, ha n páratlan. (A tétel tehát, speciális esetként, magában foglalja a 4.1 végén, a problémafel-

vetés előtt tárgyalt példákat.) A tétel bizonyítását megfigyelve, az is kiderül, hogy ekkor végtelen sok ilyen tulajdonságú altérhármasság létezik.

A most kimondott projektív geometriai állítás természetesen tisztán projektív geometriai (illetőleg lineáris algebrai) módszerekkel is bebizonyítható, mégpedig éppen a 8. tétel bizonyításánál látott gondolatmenettel. Ez azonban nem meglepő, mert hiszen a tárgyalt bizonyítás maga is egy projektív geometriai gondolat általánosítása. Legyen ugyanis $\mathbb{P}_3$ a háromdimenziós projektív tér, s e, f a $\mathbb{P}_3$ két kitérő egyenese. Ekkor egy olyan g egyenes, amely mind az e -hez, mind az f -hez képest kitérő, meghatározható úgy, hogy először kijelölünk két-két pontot, E_1, E_2 -t és F_1, F_2 -t az e , ill. f egyenesen, s ezután g -nek vesszük az $E_k F_k$ ($k=1, 2$) egyenesek valamely $G_k (=|E_k, F_k)$ pontjainak összekötő egyenesét.

5. Félkomplementum és komplementum féligmoduláris hálókban

5.1. Féligmoduláris háló maximális félkomplementumairól. DEDEKIND tételét korlátos moduláris hálókra alkalmazva azonnal adódik, hogy egy ilyen háló egyetlen elemének sem lehet két különböző összehasonlítható komplementuma. Ennek alapján pedig már triviális, hogy ha r egy korlátos moduláris háló tetszés szerinti eleme s t az r valamely komplementuma, akkor r -nek nincs t -nél nagyobb félkomplementuma sem.

Általában, alulról korlátos K háló esetén valamely $r (\in K)$ elem *maximális félkomplementumán* az r olyan m félkomplementumát fogjuk érteni, amelyre az $r \cap f = o$, $f \geq m$ feltételekből $f = m$ következik (azaz, amelynél nagyobb félkomplementuma nincs r -nek). Ha egy ilyen $m \neq o$, akkor ezt az elemet az r *maximális valódi félkomplementumának* fogjuk nevezni.

Ezzel az elnevezéssel fentebbi megjegyzésünket így fogalmazhatjuk: *Korlátos moduláris háló bármely elemének összes komplementumai egyszersmind az illető elem maximális félkomplementumai.**

Kimutatjuk, hogy a félkomplementumosság kikötése mellett az állítás megfordítása is érvényes, mégpedig nemcsak moduláris, hanem féligmoduláris hálókra is:

9. TÉTEL: *Ha egy féligmoduláris félkomplementumos L háló valamely r elemének van m maximális valódi félkomplementuma, akkor L -nek van legnagyobb eleme és m az r komplementuma.*

* Az állítás általában már féligmoduláris hálókra sem érvényes, mert hiszen korlátos féligmoduláris hálóban lehet olyan elem, amelynek van két összehasonlítható komplementuma (gondoljunk pl. az affin tér esetére vagy DILWORTH modularitási tételére és az 5. tételre), s ezek közül a kisebbik mint félkomplementum sem maximális.

KÖVETKEZMÉNY: *Ha egy féligmoduláris háló mindegyik belső elemének van maximális valódi félkomplementuma, akkor a hálónak van legnagyobb eleme s a háló komplementumos.*

BIZONYÍTÁS: Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a következmény a tételből triviálisan adódik, tehát csak magával a tétellel kell foglalkoznunk.

A tétel bizonyítása céljából tekintsünk egy féligmoduláris félkomplementumos L hálót, s ennek tetszés szerinti r elemét. Mivel $r = 0$ -ra és $r = i$ -re (amennyiben i létezik) az állítás nyilvánvalóan igaz, ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy $r \in \mathfrak{J}(L)$. (Az $\mathfrak{J}(L)$ jelentését illetőleg 1.1-re utalunk.)

Ezek után világos, hogy elegendő megmutatni a következőt: *Ha $r \in \mathfrak{J}(L)$, és f az L olyan eleme, hogy*

$$(39) \quad r \cap f = 0 \quad \text{és} \quad f \neq 0,$$

továbbá

$$(40) \quad r \cup f \in \mathfrak{J}(L),$$

akkor r -nek van f -nél nagyobb félkomplementuma. Ennek megfelelően tegyük fel, hogy az r, f elemekre (39) és (40) teljesül s vezessük be az

$$(41) \quad r \cup f = d$$

jelölést. (40) és az L félkomplementumos volta miatt d -nek van valamely x valódi félkomplementuma, s a (41)-ből leolvasható $f \leq d$ miatt $x \cap f \leq x \cap d = 0$. Ezek szerint

$$(42) \quad x \cap f = x \cap d = 0 \quad \text{és} \quad x \neq 0.$$

Bizonyítandó állításunkat most a következő két részletállításra bontjuk fel:

1. *Ha az L valamely z eleme eleget tesz az*

$$(43) \quad 0 < z \leq x$$

$$(44) \quad (z \cup f) \cap d = f$$

feltételeknek, akkor $z \cup f > f$, és $z \cup f$ az r -nek (valódi) félkomplementuma;

2. *Ha r, f, d és x eleget tesznek a (39)–(42) feltételeknek, akkor megadható L -nek olyan z eleme, amely kielégíti a (43), (44) feltételeket.*

Látjuk, hogy e két állítás együtt éppen a fentebb megfogalmazott, bizonyítandó állítást adja.

AZ 1. BIZONYÍTÁSA: Először azt mutatjuk meg, hogy $z \cup f$ az r félkomplementuma:

$$\begin{aligned} r \cap (z \cup f) &= (r \cap d) \cap (z \cup f) = & [(41)\text{-ből}] \\ &= r \cap (d \cap (z \cup f)) = \\ &= r \cap f = 0 & [(44)\text{-ből és (39)-ből}]. \end{aligned}$$

Továbbá

$$z \cap f \leq x \cap f = o < z \quad [(43)\text{-ből és } (42)\text{-ből}];$$

márpedig $z \cap f < z$, mint tudjuk, ekvivalens $z \cup f > f$ -fel.

A 2. BIZONYÍTÁSA : Vezessük be a következő jelölést :

$$(45) \quad (x \cup f) \cap d = v.$$

Ekkor (41) szerint

$$v = (x \cup f) \cap d \geq f \cap f = f,$$

azaz $v \geq f$.

Ha $v = f$, akkor a v elem (45)-ben adott definíciója folytán

$$(x \cup f) \cap d = f,$$

tehát $z = x$ helyettesítéssel (44) máris teljesül. De teljesül ekkor (43) is, mert (42) szerint $o < x (\leq x)$.

Hátra van az az eset, amikor $v > f$. Kimutatjuk, hogy ekkor

$$(46) \quad x \cap v < f < v < x \cup f.$$

Valóban,

$$x \cap v = x \cap (x \cup f) \cap d = \quad [(45)\text{-ből}]$$

$$= x \cap d = o < f \quad [(42)\text{-ből és } (39)\text{-ből}]$$

és

$$x \cup f \geq (x \cup f) \cap d = v \quad [(45)\text{-ből}],$$

de $x \cup f = v$ lehetetlen, mert belőle ismét (45) szerint

$$x \leq x \cup f = v = (x \cup f) \cap d \leq d,$$

azaz $x \cap d = x$ következne, s ez ellentmondás (42)-vel.

Most használjuk ki azt, hogy L féligmoduláris. Az 1.5-ben ismertett definíció szerint (46) fennállása maga után vonja olyan $t (\in L)$ elem létezését, amelyre

$$(47) \quad x \cap v < t \leq x$$

és

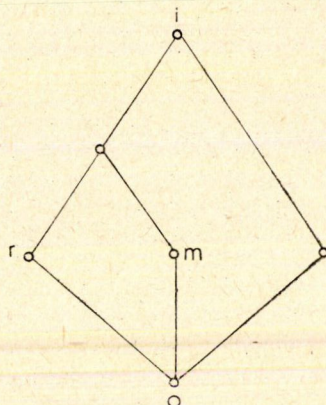
$$f = (f \cup t) \cap v.$$

Az előbbiből $t \cup f \leq x \cup f$, s ebből tovább, az utóbbi és (45) miatt,

$$(48) \quad \begin{aligned} f &= (t \cup f) \cap v = (t \cup f) \cap (x \cup f) \cap d = \\ &= (t \cup f) \cap d. \end{aligned}$$

Végeredményben, (47) és (48) szerint $z = t$ -re (43) és (44) is teljesül. Eszerint a 2. részletállítást is bebizonyítottuk.

Tételünkhöz és ennek következményéhez egy-egy megjegyzést fűzünk. Először is, nem félmoduláris hálókra az állítás már nem érvényes. Így például, az



hálóban m az r maximális félkomplementuma, s mégsem komplementuma.

A következménnyel kapcsolatban azt jegyezzük meg, hogy egy r elem maximális valódi félkomplementumának létezéséhez — azon a triviális követelményen túl, hogy r -nek egyáltalán legyen valódi félkomplementuma — elegendő például, hogy a háló eleget tegyen a növekvő láncok végtességi követelményének (speciálisan, hogy véges hosszúságú legyen) vagy az ún. általános metszet-disztributivitásnak.⁹ A következmény tehát speciális esetként magában foglalja a [11] dolgozat 2. és 3. tételét.

5.2. A félmoduláris hálók egy speciális osztályáról. Ebben a §-ban olyan végtelen hosszúságú félmoduláris hálókról lesz szó, amelyeknek összes belső elemei véges magasságúak. (Ez a típus a véges hosszúságú hálók legközvetlenebb általánosítása.) Ezekre a hálókra a 9. tétel alapján bebizonyítjuk a következőt:

10. TÉTEL: *Legyen L olyan félkomplementumos félmoduláris háló, amelynek összes belső elemei véges magasságúak. Ha L hosszúsága végtelen, akkor minden egyes r belső eleméhez és bármely K pozitív egész számhoz megadható r -nek olyan félkomplementuma, amelynek magassága K -nál nagyobb.*

⁹ Ez utóbbi fogalmat ([6], 78. o. nyomán) a következőképpen definiáljuk. Legyen $H = \{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ az L háló tetszős szerinti számosságú részhalmaza, s $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ jelentse a H -nak L -beli legkisebb felső korlátját, feltéve hogy ez létezik. (Ha H véges, akkor ez a definíció megegyezik a 6. lábjegyzetben adottal.) Az L hálóról akkor mondjuk, hogy eleget tesz az általános metszet-disztributivitásnak, ha minden $M = \{b_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ részhalmazára és bármely a elemére az $a \cap (\bigcup_{\delta \in \Delta} b_\delta)$ és $\bigcup_{\delta \in \Delta} (a \cap b_\delta)$ kifejezések léteznek és egymással egyenlők.

Következőleg: A tétel feltételeinek teljesülése esetén az r belső elem összes félkomplementumainak magasságai a pozitív egész számok halmazát kitöltik.

BIZONYÍTÁS: Mindenekelőtt rámutatunk arra, hogy a tétel feltevéseinek eleget tevő L háló egyetlen belső elemének sincs komplementuma: ugyanis, mint azt a szerző egy régebbi dolgozatában ([12], 243. o.) megmutatta, két véges magasságú elem egyesítettje is véges magasságú.

Az előző bekezdésben elmondottakból azonban, a 9. tétel szerint, az következik, hogy az r belső elemnek maximális (valódi) félkomplementuma sincs. Eszerint az r akármelyik valódi m_1 félkomplementumából kiindulva, található L -ben olyan

$$(49) \quad 0 < m_1 < m_2 < \dots < m_k < m_{k+1} < \dots$$

végtelen növekvő lánc, amelynek minden egyes eleme r -nek félkomplementuma. Mivel a (49)-beli m_{k+1} elem magassága mindenesetre K -nál nagyobb, ezért a tétel állítása helyes.

A tétel utáni megjegyzés helyessége a tétel állításából és abból a nyilvánvaló tényből következik, hogy ha L valamely f eleme az r félkomplementuma, akkor minden f -nél kisebb elem is az r félkomplementuma.

IRODALOM

- [1] G. BIRKHOFF: *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 25, revised edition, New York, 1948.
- [2] G. BIRKHOFF—M. WARD: A characterization of Boolean algebras, *Annals of Math.*, 40 (1939) 609—610.
- [3] R. DEDEKIND: Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, *Math. Annalen*, 53 (1900) 371—403.
- [4] R. P. DILWORTH: On complemented lattices, *Tôhoku Math. Journal*, 47 (1940) 18—23.
- [5] R. P. DILWORTH: Lattices with unique complements, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 57 (1945) 123—154.
- [6] M. L. DUBREIL-JACOTIN—L. LESIEUR—R. CROISOT: *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Cahiers scientifiques, vol. 21, Paris, 1953.
- [7] H. HERMES: *Einführung in die Verbandstheorie*, Die Grundlehren der math. Wiss. in Einzeldarst., Bd. 73, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.
- [8] J. E. McLAUGHLIN: Atomic lattices with unique comparable complements, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956) 864—866.
- [9] J. NEUMANN: *Lectures on continuous geometries*, Princeton, 1936—37.
- [10] RÉDEI L.: *Algebra I*, Budapest, 1954.
- [11] G. SZÁSZ: Dense and semi-complemented lattices, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (3), 1 (1953) 42—44.
- [12] G. SZÁSZ: On the structure of semi-modular lattices of infinite length, *Acta Sci. Math.*, 14 (1951—52) 239—245.

(Beérkezett: 1957. XI. 1.)