STANDARD IDEÁLOK

Írta: GRÄTZER GYÖRGY

1. §. Bevezetés

E dolgozat célkitűzése a hálóideálok egy speciális osztályának, a standard ideáloknak definiálása és részletes vizsgálata. A standard ideál fogalmának szükségességét két körülmény is indokolja.

E fogalom bevezetéséhez első útként az a törekvés szolgálhat, amely a hálók ideálelméletét a gyűrűk ideáljainak (csoportok normálosztóinak) szerepéhez hasonlóan kívánja kidolgozni. Itt elsősorban arra gondolunk, hogy minden gyűrű ideál egy és csak egy homomorfizmus magja, továbbá az ideálok kielégítik az ismert izomorfia tételeket, a Zassenhaus lemmát és a Jordan—Hölder—Schreier tételt. Könnyű látni azonban, hogy hálók körében a szokásos ideálfogalommal általában egyik előbbi tétel sem marad érvényben.

A fenti kérdések közül a hálóelméleti ideálfogalomnak a homomorfizmusmagokkal létesíthető kapcsolatát SCHMIDT E. TAMÁSsal együtt írt [3] és [4] dolgozatunkban vizsgáltuk. Más fontos feladat ezek után az izomorfia tételek és a Jordan—Hölder—Schreier—Zassenhaus tétel érvényességének vizsgálata. E tételek mind bizonyos faktorstruktúrákra vonatkozó állítások, s ezek analogonjait hálók körében keresve mindenekelőtt szükséges a faktorháló alkalmas definiálása. Az L/I faktorhálón az L háló egy olyan homomorfizmusa által létrehozott homomorf képét kell értenünk, amely homomorfizmusnak magja az I ideál. Azonban ha az I ideállal képezhető is az L/I faktorháló, ez általában nem lesz egyértelmű. Két kézenfekvő megállapodás lehetséges: az I magú homomorfizmusok közül a legkisebb, ill. a legnagyobb kitüntetése L/I egyértelmű értelmezésénél.[1] K. SHODA [8] cikkében kimutatta, hogy az utóbbi definíciót véve alapul, érvényesek maradnak az előbb felsorolt tételek. Azonban már J. HASHIMOTO is rámutatott [5] dolgozatában arra, hogy

[1] Legyenek φ_1 és φ_2 L homomorfizmusai és Θ_1, ill. Θ_2 a megfelelő homomorfizmusokat indukáló kongruenciareláció. Akkor mondjuk, hogy $\varphi_1 \leqq \varphi_2$, ha $\Theta_1 \leqq \Theta_2$ a szokásos értelemben. Arra nézve, hogy az I maggal rendelkező homomorfizmusok között létezik legkisebb, utalunk G. BIRKHOFF [1]-re, s a legnagyobb létezésének bizonyítása sem okoz nagy problémát.

ez hálók esetében nem jelent túl sokat, hiszen pl. láncoknál csak a kételemű homomorf képeket veszi tekintetbe. Ezért a továbbiakban

az L/I faktorhálón az L háló I magú legkisebb homomorfizmusa szerinti faktorhálóját értjük.

Disztributív hálóban — a faktorháló ilyen definíciójával — könnyűszerrel nyerhető, hogy az ideálokra érvényesek a fentebb említett tételek. J. HASHIMOTO [5] dolgozatában bebizonyította, hogy ezen a módon a hálóelméletben jól ismert neutrális ideálokra[2] is igaz tételek nyerhetők. Könnyű azonban példát konstruálni arra, hogy nem minden olyan ideálosztály, amelyben érvényesek az előbb említett tételek, szükségképpen a neutrális ideálok osztálya. Egy általános ideálosztályt, amelyben igazak a fenti tételek és amely tartalmazza a neutrális ideálok osztályát, szolgáltatnak a standard ideálok.

Következőkben vázoljuk a standard ideál fogalom szükségességének másik okát. R. P. DILWORTH [2] munkájában kezdte meg a relatív komplementumos hálók strukturális vizsgálatát. Egyik fő észrevétele az volt, hogy a véges hosszúságú, komplementumos, moduláris hálók elméletéből ismeretes G. BIRKHOFFtól és K. MENGERtől származó alaptétel érvényes a véges relatív komplementumos hálók körében. Ezen általánosítási törekvés azóta sok más szerzőnél is megtalálható. Kézenfekvő tehát a relatív komplementumos hálók körébe kiterjeszteni azokat a tételeket, amelyek komplementumos, moduláris hálók neutrális ideáljaira vonatkoznak (lásd. pl. BIRKHOFF [1] 125. old. és SHIH—CHIANG WANG [9]). Ez esetben azonban a tételek szó szerinti átvitele nem vezet helyes eredményre, főleg ha olyan 0 elemes hálókat tekintünk, ahol csak a $[0, a]$ intervallumok komplementumosságát tesszük fel. Tehát itt is egy olyan új ideálosztály bevezetésére van szükség, melynek segítségével átmenthetők az előbb említett tételek, s amely ideálosztály moduláris hálók körében megegyezik a neutrális ideálokkal. Ezt a célt ismét a standard ideálok segítségével érjük el.

A dolgozat 2. §-ában nyújtjuk a standard elem és ideál definícióját és több ekvivalens feltétellel jellemezzük ezeket. A 3. §-ban a standard elemnek és ideálnak néhány alapvető, az előbbi jellemzésekből leszűrhető tulajdonságát foglaljuk össze. A 4. § a standard elem és neutrális elem kapcsolatát vizsgálja, s egy elég általános hálóosztályban (mely a moduláris hálókat is magában tartalmazza) kimutatja a két fogalom ekvivalenciáját. Igazoljuk, hogy $\{s_1, s_2, x\}$ disztributív részháló, ha x tetszőleges és s_1, s_2 standard elem. Az 5. §-ban a standard ideálok és homomorfizmusmagok viszonyát nézzük meg. Ugyanitt adjuk BIRKHOFF és WANG fentebb említett tételeinek általánosításait.

[2] Az L háló a elemét neutrálisnak nevezzük, ha bármely $x, y \in L$-lel együtt disztributív részhálót generál. A háló I ideálja neutrális, ha az L háló ideáljainak $\mathfrak{L}$ hálójában I neutrális elem.

Továbbá tetszőleges háló standard ideál szerinti faktorstruktúráját jellemezzük. A 6. §-ban a két izomorfia tételt és a Jordan—Hölder—Schreier—Zassenhaus tételt bizonyítjuk standard ideálokra. A 7. §-ban ellenpéldákat mutatunk be s a dolgozatot néhány probléma felsorolásával fejezzük be.

2. §. Standard elem és ideál bevezetése

Mielőtt a bevezetésben említett standard ideált definiáljuk, bevezetjük a standard elem fogalmát. Láthatjuk majd, hogy a standard elem és ideál kapcsolata analóg a neutrális elem és ideál viszonyával.

1. DEFINÍCIÓ: *Az L háló s elemét standard elemnek nevezzük, ha L bármely x és y elemére*

(1) $$x \cap (s \cup y) = (x \cap s) \cup (x \cap y).$$

Mindenekelőtt lássunk néhány példát standard elemekre. Az x, y, z $(y > z)$ elemek által generált ötelemű, nem-moduláris hálóban y standard elem, azonban nyilván nem neutrális, továbbá az $(x]$ ideál homomorfizmusmag s x nem standard elem. (Ezzel beláttuk, hogy a következő fogalmak közül semelyik kettő sem ekvivalens: az x elem neutrális; az x elem standard; az $(x]$ ideál homomorfizmusmag.)

Könnyű látni továbbá, hogy disztributív háló minden eleme standard, hiszen (1) disztributív egyenlőség. Ugyancsak mindig standard elem egy tetszőleges háló 1, illetve 0 eleme.

A standard elem néhány jellemzését foglalja össze az

1. TÉTEL: *Az L háló s elemére a következő feltételek ekvivalensek:*

(α) s standard elem;

(β) L minden olyan u és t elemére, amelyre $u \leqq s \cup t$, fennáll $u = (u \cap s) \cup (u \cap t)$;

(γ) kongruenciareláció az a Θ_s reláció, amelynél $x \equiv y(\Theta_s)$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $(x \cap y) \cup s_1 = x \cup y$ valamilyen $s_1 \leqq s$-re;

(δ) L bármely x és y elemére

(i) *$s \cup (x \cap y) = (s \cup x) \cap (s \cup y)$,*

(ii) *$s \cup x = s \cup y$ és $s \cap x = s \cap y$ fennállásából $x = y$ következik.*

BIZONYÍTÁS: A négy feltétel ekvivalenciáját ciklikusan fogjuk kimutatni.

(α)-ból következik (β). Mivel $u \leqq s \cup t$, ezért $u = u \cap (s \cup t)$, de ez utóbbit (1) alapján kifejtve $u = (u \cap s) \cup (u \cap t)$, ami u-nak épp a kívánt előállítása.

(β)-ből következik (γ). Felhasználjuk a [4] dolgozat 1. lemmáját. Eszerint ahhoz, hogy Θ_s kongruenciareláció, elegendő belátni az alábbi a)—d) állítások teljesülését.

a) $x \equiv x(\Theta_s)$ minden $x \in L$-re. Valóban minden $x \in L$ esetén $(x \cap x) \cup (x \cap s) = x \cup x$ és így az $x \cap s = s_1$ jelöléssel adódik állításunk.

b) Ha $x \geqq y \geqq z$, $x \equiv y(\Theta_s)$ és $y \equiv z(\Theta_s)$, akkor $x \equiv z(\Theta_s)$. A feltételekből ugyanis $x = y \cup s_1$ és $y = z \cup s_2$ ahol $s_1, s_2 \leqq s$ s így $x = y \cup s_1 = (z \cup s_2) \cup s_1 = z \cup (s_1 \cup s_2)$, ami épp azt jelenti, hogy $x \equiv z(\Theta_s)$, mert $s_1 \cup s_2 \leqq s$.

c) Ha $x \geqq y$ és $x \equiv y(\Theta_s)$, akkor bármely $u \in L$-re $x \cup u \equiv y \cup u(\Theta_s)$ és $x \cap u \equiv y \cap u(\Theta_s)$. Valóban a feltételek miatt $x = y \cup s_1$, $(s_1 \leqq s)$, s így mindkét oldal u-val egyesítve kapjuk, hogy $x \cup u = (y \cup u) \cup s_1$, azaz $x \cup u \equiv y \cup u(\Theta_s)$. Továbbá $x = y \cup s_1$ és $s_1 \leqq s$ miatt $x \cap u \leqq y \cup s_1 \leqq y \cup s$, tehát a (β) feltételt u, t helyett az $x \cap u, y$ elemekre alkalmazva s $x \geqq y$-t is figyelembe véve, adódik $x \cap u = (x \cap u \cap y) \cup (x \cap u \cap s) = (y \cap u) \cup s_2$, ahol $s_2 = x \cap u \cap s \leqq s$, ami épp a kivánt reláció teljesülését jelenti.

d) $x \equiv y(\Theta_s)$ ekvivalens azzal, hogy $x \cup y \equiv x \cap y(\Theta_s)$. Ezen állítás nyilvánvaló, mert Θ_s definíciójában x és y csak mint $x \cup y$ és $x \cap y$ szerepel.

(γ)-ból következik (δ). Lássuk be először az (i) feltétel teljesülését. Θ_s definíciója alapján $x \equiv s \cup x(\Theta_s)$ és $y \equiv s \cup y(\Theta_s)$. Ezen két kongruencia megfelelő oldalainak metszésével adódik $x \cap y \equiv (s \cup x) \cap (s \cup y)(\Theta_s)$; azonban a monotonitás miatt $x \cap y \leqq (s \cup x) \cap (s \cup y)$, tehát (γ) alapján kapjuk, hogy $(x \cap y) \cup s_1 = (s \cup x) \cap (s \cup y)$, ahol $s_1 \leqq s$. Ebből — mindkét oldalt s-sel egyesítve, s szem előtt tartva, hogy $s_1 \leqq s$ és $(s \cup x) \cap (s \cup y) \geqq s$ — adódik $(x \cap y) \cup s = (s \cup x) \cap (s \cup y)$, ami épp az (i) feltétel.

Másodszor igazoljuk az (ii) feltételt. Mivel $s \cup y \equiv y(\Theta_s)$, ezért ha mindkét oldalon x-szel metszünk és felhasználjuk az (ii)-ben szereplő $x \cup s = y \cup s$ feltételt, azt kapjuk, hogy $x = (x \cup s) \cap x = (y \cup s) \cap x \equiv y \cap x(\Theta_s)$, azaz (γ) miatt $(x \cap y) \cup s_1 = x$, ahol $s_1 \leqq s$. Ezen utolsó egyenlőségből $s_1 \leqq x$, tehát egyszersmind $s_1 \leqq s \cap x = s \cap y \leqq y$ $(s \cap x = s \cap y$ (ii) második feltétele következtében), azaz $x = (x \cap y) \cup s_1 \leqq (x \cap y) \cup y = y$. Hasonlóképp kaphatjuk, hogy $y \leqq x$, azaz $x = y$, ami a bizonyítandó állítás volt.

(δ)-ból következik (α). Legyen $a = x \cap (s \cup y)$ és $b = (x \cap s) \cup (x \cap y)$. Be fogjuk bizonyítani, hogy $s \cup a = s \cup b$, $s \cap a = s \cap b$ s ekkor (ii)-ből $a = b$ adódik, amivel (α) igazolva lesz. Valóban, $s \cap a = s \cap (x \cap (s \cup y)) = x \cap (s \cap (s \cup y)) = x \cap s$, továbbá a monotonításból folyólag $x \cap s \leqq b \leqq [x \cap (s \cup y)] \cup [x \cap (s \cup y)] = a$, így $a \cap s = x \cap s$-ből $b \cap s = x \cap s$ adódik, tehát $a \cap s = b \cap s$. Másrészt (i)-ből $s \cup a = s \cup [x \cap (s \cup y)] = (s \cup x) \cap (s \cup y) = s \cup (x \cap y) = s \cup (x \cap s) \cup (x \cap y) = s \cup b$, amivel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzés. A (δ) feltételben (i) ekvivalens a következővel

(i') az $x \to x \cup s$ leképezés L endomorfizmusa;

az állítás nyilvánvaló. Továbbá a bizonyításból látható, hogy (ii) a következő gyengébb feltétellel pótolható:

(ii') $x \geqq y$ esetén $s \cup x = s \cup y$, $s \cap x = s \cap y$ fennállásából $x = y$ következik.

Fel szeretnénk hívni a figyelmet még arra a fontos tényre, hogy Θ_s *a legkisebb olyan kongruenciareláció, melynél* $(s]$ *osztály*, azaz $\Theta_s = \Theta[(s]]$.[3] Rátérünk ezután a standard ideál definiálására.

2. DEFINÍCIÓ: *Az L háló S ideálját standard ideálnak nevezzük, ha L ideáljainak $\mathfrak{L}$ hálójában S standard elem, azaz bármely két I és K ideálra*

$$I \cap (S \cup K) = (I \cap S) \cup (I \cap K).$$

Standard ideálokra példát nyújtanak a standard elemek is, mert minden standard elem által generált főideál standard ideál.

Az 1. tételnek standard ideálokra vonatkozó analogonját, néhány feltétellel bővítve mondja ki a

2. TÉTEL: *Az L háló S ideáljára a következő feltételek ekvivalensek:*

(α') *S standard ideál;*

(α'') *bármely két I és K főideálra $I \cap (S \cup K) = (I \cap S) \cup (I \cap K)$;*

(β') *bármely I ideálra $S \cup I$ elemei $s \cup x$ alakúak, ahol $s \in S$, $x \in I$;*

(β'') *bármely I főideálra $S \cup I$ elemei $s \cup x$ alakúak, ahol $s \in S$ és $x \in I$;*

(γ') *kongruenciareláció az a Θ_S relációja $\mathfrak{L}$-nek, amelynél $I \equiv K$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $(I \cap K) \cup S_1 = I \cup K$, valamilyen $S_1 \subseteq S$ ideálra;*

(γ'') *kongruenciareláció azon $\Theta[S]$ relációja L-nek, amelynél $x \equiv y\,(\Theta[S])$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $(x \cap y) \cup s = x \cup y$, alkalmas $s \in S$-sel;*

(δ') *bármely I és K ideálra*

(i*) $S \cup (I \cap K) = (S \cup I) \cap (S \cup K)$,

(ii*) $S \cap I = S \cap K$ és $S \cup I = S \cup K$ *fennállásából $I = K$ adódik.*

BIZONYÍTÁS. Belátjuk, hogy (β') ekvivalens a következő feltétellel.

(β^*) Minden olyan I és K ideálra, amelyre $I \subseteq S \cup K$, fennáll $I = (I \cap S) \cup (I \cap K)$.

Elég belátnunk, hogy (β^*)-ból következik (β'), viszont ha $S \cup K$ valamely a eleme nem volna $s \cup x\,(s \in S, x \in K)$ alakban előállítható, akkor az $I = (a]$ ideál nyilván nem tehetne eleget a fenti feltételnek. Megjegyezzük még, hogy (β'')-nek is hasonló analogonja érvényes I és K főideálokra.

2. tétel feltételei az 1. tételben szereplő feltételek analogonjai, s ezért az (α'), (β'), (γ'), (δ') feltételek helyessége következik az 1. tétel $\mathfrak{L}$-re való alkalmazásából. Mivel (α'') speciális esete (α')-nek, továbbá az (α'')$\rightarrow$(β''), (β'')$\rightarrow$ $\rightarrow$(γ'') ugyanúgy látható be, mint az 1. tétel analóg feltételeinél, ezért téte-

[3] $\Theta[I]$-vel jelöljük (lásd [4]), az I ideálhoz tartozó legkisebb homomorfizmust indukáló kongruenciarelációt, $\Theta_{a,b}$ pedig az $a \equiv b$ által generált minimális kongruenciarelációt jelöli.

lünk teljesen bizonyítva lesz, ha belátjuk, hogy (γ'')-ből következik (β'). Valóban, tegyük fel (γ'') teljesülését az S ideálra és legyen I tetszőleges ideál, továbbá $x \in S \cup I$. Az ideál-egyesítés definíciójánál fogva alkalmas $s \in S$ és $i \in I$ elemekkel $x \leqq s \cup i$. Tekintsük az $y = x \cap i$ elemek. $s \equiv s \cap i(\Theta[S])$, így $x = x \cap (s \cup i) \equiv [(s \cap i) \cup i] \cap x = y(\Theta[S])$, tehát ($\gamma''$) miatt $x = y \cup s'$, alkalmas $s' \in S$-sel, ami bizonyítandó volt.

Ezzel a 2. tétel bizonyítását befejeztük.

Végül még egy megjegyzést teszünk a standard elem és ideál viszonyára vonatkozóan. Nyilvánvaló, hogyha az L hálóban van standard elem s, akkor létezik standard ideál is, nevezetesen $(s]$. Fordítva azonban a standard ideál egzisztenciája nem vonja maga után a standard elem létezését. Erre triviális példát szolgáltathat egy tetszőleges, 0 és 1 elemmel nem rendelkező egyszerű háló[4] (lásd a 7. § 1. példáját), amelyben nem lehet standard elem, mert akkor a standard elem által generált főideál az 1. tétel (γ) feltétele miatt homomorfizmusmag volna, s így a háló nem lenne egyszerű. Standard ideál viszont van benne, mert az egész háló, mint ideál, standard. Egy kevésbé triviális példát nyerünk, ha tekintjük két előbbi típusú háló, L_1 és L_2 kardinális öszszegét (azaz $x \geqq y$ megőrzi jelentését L_1 és L_2-n belül, továbbá $x > y$ minden $x \in L_1$ és $y \in L_2$-re), amely hálóban L_2 nem triviális standard ideál, viszont standard elem nyilván nem létezik.

3. §. A standard elem (ideál) néhány tulajdonsága

A standard elem (ideál) legfontosabb tulajdonságait az 1. (illetve 2.) tétel sűríti magába. Ezeknek néhány következményét nézzük most meg.

1. LEMMA: *A standard elemek az L háló disztributív részhálóját alkotják, továbbá az $s \to \Theta_s$ megfeleltetés izomorfizmus, így a Θ_s kongruenciarelációk $\Theta(L)$-nek részhálóját alkotják.*

BIZONYÍTÁS: Legyen s_1 és s_2 stardard elem. Ekkor az (1) képlet ismételt alkalmazásával nyerjük, hogy bármely $x, y \in L$-re $x \cap [(s_1 \cup s_2) \cup y] = x \cap [s_1 \cup (s_2 \cup y)] = (x \cap s_1) \cup [x \cap (s_2 \cup y)] = (x \cap s_1) \cup (x \cap s_2) \cup (x \cap y) = [x \cap (s_1 \cup s_2)] \cup (x \cap y)$, ami épp azt jelenti, hogy $s_1 \cup s_2$ standard elem. Hogy az $s \to \Theta_s$ megfeleltetés $\cup$-re nézve izomorfizmus, az rögtön látható, mert $\Theta_{s_1} \cup \Theta_{s_2} = \Theta_{s_1 \cup s_2}$ ugyanaz mint (lásd a [3] lábjegyzetet) $\Theta[(s_1]] \cup \Theta[(s_2]] = \Theta[(s_1 \cup s_2]]$ (mivel Θ_s az $(s]$ ideált osztályként tartalmazó legkisebb kongruenciareláció). Ez az egyenlőség, mint ismeretes (lásd [4]), általános érvényű, így ezen speciális esetben is alkalmazható.

[4] Egy hálót egyszerűnek nevezünk, ha csak triviális kongruenciarelációi vannak.

Lássuk be, hogy $\Theta_{s_1} \cap \Theta_{s_2} = \Theta_{s_1 \cap s_2}$. Valóban, ha $x \equiv y\,(\Theta_{s_1} \cap \Theta_{s_2})$, akkor $x \equiv y\,(\Theta_{s_1})$, ezért $(x \cap y) \cup s_1' = x \cup y\; (s_1' \leqq s_1)$. Másrészt $x \equiv y\,(\Theta_{s_2})$ is fennáll, s ebből $s_1' = (x \cup y) \cap s_1' \equiv (x \cap y) \cap s_1'\,(\Theta_{s_2})$, így alkalmas $s \leqq s_2$-vel $s_1' = [(x \cap y) \cap s_1'] \cup s$. Mivel $s \leqq s_1'$ igaz, ezért $s \leqq s_1 \cap s_2$, és $(x \cap y) \cup s = (x \cap y) \cup [(x \cap y) \cap s_1'] \cup s = (x \cap y) \cup s_1' = x \cup y$, vagyis $x \equiv y\,(\Theta_{s_1} \cap \Theta_{s_2})$ akkor és csak akkor következik be, ha alkalmas $s \in (s_1 \cap s_2]$ elemmel $(x \cap y) \cup s = x \cup y$, ami az 1. tétel ($\gamma$) feltétele szerint ekvivalens azzal, hogy $s_1 \cap s_2$ standard, továbbá, hogy $\Theta_{s_1} \cap \Theta_{s_2} = \Theta_{s_1 \cap s_2}$.

Végül a standard elemek alkotta részháló disztributívitása nyílvánvaló, mert mint láttuk ez a háló izomorf $\Theta(L)$ egy részhálójával, amely szükségképp disztributív.

Az 1. lemmát standard ideálokra valamivel élesebb formában tudjuk kimondani.

2. LEMMA: *A standard ideálok az L háló ideáljai $\mathfrak{L}$ hálójának $\cup$-re nézve komplett, $\cup$-végtelen disztributív*[5] *részhálóját alkotják és az $S \to \Theta[S]$ megfeleltetés $\cup$-komplett izomorfizmus az S standard ideálok és a hozzájuk tartozó $\Theta[S]$ kongruenciarelációk között.*

BIZONYÍTÁS: Az 1. lemma miatt elegendő már csak a komplettségre és végtelen disztributívitásra vonatkozó állításokat belátnunk.

$\bigcup\limits_{\alpha} S_\alpha$ nyilván standard ideál, mert bármely I ideált is tekintjük, $\bigcup\limits_{\alpha} S_\alpha \cup I$ valamely x eleméhez kiválasztható az S_α ideálok közül véges sok úgy, hogy $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_{\alpha_i} \cup I$. Láttuk azonban, hogy $\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_{\alpha_i}$ standard ideál, így $x = s \cup u$ $\left(s \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_{\alpha_i} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha} S_\alpha,\ u \in I\right)$ ami a 2. tétel (β') feltétele miatt éppen azt jelenti, hogy $\bigcup\limits_{\alpha} S_\alpha$ standard ideál, vagyis a standard ideálok hálója $\cup$-re nézve komplett. A $\Theta[\bigcup\limits_{\alpha} S_\alpha] = \bigcup\limits_{\alpha} \Theta[S_\alpha]$ reláció fennáll tetszőleges ideálokra (lásd [4]), továbbá $\Theta(L)$-ben érvényes az $\cup$-végtelen disztributívitás, ez pedig $\cup$-komplett részháló-tartó tulajdonság s ezzel a 2. lemmát bizonyítottuk.

3. LEMMA: *Standart elem (ideál) homomorf képe is standard.*

BIZONYÍTÁS: Az állítás a standard elem (ideál) definíciójából nyilvánvaló.

Megjegyezzük, hogy a 3. lemma megfordítása nem igaz, azaz alkalmas hálónak lehet olyan homomorfképbeli standard eleme, melynek egyetlen inverz képe sem standard (lásd 7. § 2. példa).

4. LEMMA: *Ha az S standard ideálnak az I ideállal való metszete és egyesítése is főideál, akkor I szintén főideál.*

[5] Azaz korlátlanul fennáll az $S \cap \bigcup\limits_{\alpha} S_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha} (S \cap S_\alpha)$ egyenlőség.

BIZONYÍTÁS: Legyen $S \cap I = (b]$ és $S \cup I = (a]$; a 2. tétel (β') feltétele alapján ekkor $a = s \cup x\,(s \in S, x \in I)$. Állítjuk, hogy $I = (x \cup b]$. Valóban, legyen $w \geq x \cup b$ és $w \in I$. Ekkor $(a] \supseteq S \cup (w] \supseteq S \cup (x \cup b] \supseteq S \cup (x] = (a]$, azaz $S \cup (w] = S \cup (x \cup b]$, továbbá $(b] = S \cap I \supseteq S \cap (w] \supseteq S \cap (x \cup b] \supseteq S \cap (b] = (b]$, azaz $S \cap (w] = S \cap (x \cup b]$. Ez utóbbi két egyenlőség viszont a 2. tétel (δ') (ii*) feltétele alapján azt jelenti, hogy $(w] = (x \cup b]$, így $w = x \cup b$, amivel a lemma bizonyítását befejeztük.

KOROLLÁRIUM: *Ha az L háló S és T standard ideáljainak metszete és egyesítése is főideál, akkor S és T szintén főideál.*

A korollárium a 4. lemmának triviális következménye.

5. LEMMA: *Ha s az L háló standard eleme, ekkor az $(a]$ főideálban $a \cap s$ szintén standard elem.*

BIZONYÍTÁS: Az $(a]$ főideál elemei valamennyien $x \cap a$ alakba írhatók, ahol x végigfutja L elemeit. Elég tehát a standard elem definíciója alapján belátni, hogy $(x \cap a) \cap [(s \cap a) \cup (y \cap a)] = [(x \cap a) \cap (s \cap a)] \cup [(x \cap a) \cap (y \cap a)]$. Valóban, az igazolandó egyenlőség baloldalából kiindulva, (1) többszöri alkalmazásával nyerjük, hogy $(x \cap a) \cap [(s \cap a) \cup (y \cap a)] = (x \cap a) \cap [(s \cup y) \cap a] = (x \cap a) \cap (s \cup y) = (x \cap a \cap s) \cup (x \cap a \cap y) = [(x \cap a) \cap (s \cap a)] \cup [(x \cap a) \cap (y \cap a)]$, ami az állítás volt.

4. §. Neutrális elemek és disztributív részhálók

A bevezetésben említett okok miatt a standard ideálokat oly módon kellett értelmeznünk, hogy magukba foglalják a neutrális ideálokat is és moduláris hálóban e két fogalom egyezzék meg. Kimutatjuk, hogy a standard ideálok, sőt elemek eleget tesznek a következő kikötéseknek:

6. LEMMA: *Minden neutrális elem (ideál) standard.*

BIZONYÍTÁS: Az állítás a definícióból nyilvánvaló.

Ismeretes G. BIRKHOFF (lásd [1] 28. old.) azon tétele, mely szerint az L háló a eleme akkor és csak akkor neutrális, ha az 1. tétel (δ) (i) és (ii) feltételein kívül még azon feltételt is kielégíti, hogy

(iii) az $x \to x \cap a$ leképezés L endomorfizmusa.

E tételből nyilvánvaló, hogy

7. LEMMA: *Az a standard elem (ideál) akkor és csak akkor neutrális, ha* (iii) *teljesül.*

Továbbá világos az is, hogy

8. LEMMA: *Ha az a elem standard az L hálóban és duálisában is, akkor a neutrális.*

Ismeretes továbbá (lásd [1] 79. old.), hogy egy moduláris hálóban az a elem akkor és csak akkor neutrális, ha az $x \to x \cap a$ vagy az $x \to x \cup a$ megfeleltetés endomorfizmus. Ebből nyilvánvalóan adódik a

9. LEMMA: *Moduláris hálóban minden standard elem neutrális.*

Mivel moduláris háló ideáljainak hálója szintén moduláris, ezért a 9. lemmából adódik a következő

KOROLLÁRIUM: *Moduláris háló minden standard ideálja neutrális.*

A következő 3. tétel az előző lemmát nagymértékben általánosítja. Hogy a 9. lemmát mégis külön igazoltuk, azzal csak kitüntetett szerepét szerettük volna hangsúlyozni.

3. TÉTEL: *Gyengén moduláris*[6] *háló minden standard eleme neutrális.*

BIZONYÍTÁS: Legyen az L hálónak s standard eleme. A 7. lemma alapján elég belátnunk, hogy az $x \to x \cap s$ leképezés endomorfizmus, vagy ami ezzel ekvivalens: $s \cap (x \cup y) = (s \cap x) \cup (s \cap y)$.

Az egyszerűség kedvéért vezessük be az $a = s \cap (x \cup y)$ és $b = (s \cap x) \cup \cup (s \cap y)$ jelöléseket. Tegyük fel, hogy valamilyen $x, y \in L$-re az előbbi egyenlet nem teljesül, azaz $a > b$.

Először belátjuk, hogy $a \cup x > b \cup x$ és $a \cup y > b \cup y$. Tegyük fel ugyanis, hogy ezek valamelyike pl. $a \cup x > b \cup x$ nem teljesül; ekkor $a > b$ miatt $a \cup x = b \cup x$. Tekintsük az $s \cap x \equiv x(\Theta_{s \cap x, x})$ kongruenciát és egyesítsük ezen kongruencia mindkét oldalát b-vel, majd messük el a-val. Kapjuk, hogy (lásd a [6] lábjegyzetet) $\overline{s \cap x, x} \to \overline{b, a}$, mert figyelembe véve a és b jelentését adódik $a \cap (b \cup (s \cap x)) = a \cap b = b$ és $a \cap (b \cup x) = a \cap (a \cup x) = a$. A gyenge modularitás következtében ekkor $\overline{b, a} \to \overline{u, v}$, ahol $s \cap x \leqq u < v \leqq x$. Mivel azonban $a, b \leqq s$ tehát az utóbbi hozzárendelés miatt teljesül $u \equiv v(\Theta_s)$, azaz az 1. tétel (γ) feltétele alapján $v = u \cup s_1 (s_1 \leqq s)$. Ekkor azonban $v = u \cup s_1 \leqq \leqq u \cup (s \cap x) = u$, mert $s_1 \leqq x$ és $s_1 \leqq s$ fennállásából $s_1 \leqq s \cap x$ adódik. Ez utóbbi azonban ellentmondásban van azzal a feltevésünkkel, hogy $u < v$ és így igazoltuk, hogy $a \cup x > b \cup x$. Hasonlóan látható be $a \cup y > b \cup y$.

Ezek után igazoljuk, hogy $\overline{s \cap (b \cup x), b \cup x} \to \overline{a \cap (b \cup y), a}$; valóban, messük el az $s \cap (b \cup x)$ ill. $b \cup x$ elemeket először x-szel, s kapjuk az $s \cap x$ és

[6] Azt mondjuk, (lásd [3]), hogy az L háló a, b elempárjához hozzá van rendelve a c, d elempár, jelben $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ ha alkalmas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemekkel teljesülnek a következő egyenletek:

$$\{\ldots[/(a \cup b) \cup x_1/ \cap x_2] \cup x_3/ \cap \ldots\} \cup x_n = c \cup d,$$
$$\{\ldots/[/(a \cap b) \cup x_1/ \cap x_2] \cup x_3/ \cap \ldots\} \cup x_n = c \cap d.$$

Az L hálót gyengén modulárisnak nevezzük (lásd [4]), ha valahányszor $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ $(a > b, c > d)$, akkor $\overline{c, d} \to \overline{a_1, b_1}$ $(a \geqq a_1 > b_1 \geqq b)$.

x elemeket. Ez utóbbi két elemet egyesítve a $b \cup y$ elemmel adódik $(b \cup y) \cup (s \cap x) = b \cup y$ (mert $s \cap x \leqq (s \cap x) \cup (s \cap y) = b \leqq b \cup y$) és $(b \cup y) \cup x = b \cup (x \cup y)$. Végül a-val történő metszés után eljutunk az $a \cap (b \cup y)$, ill. $[b \cup (x \cup y)] \cap a = a$ elemekhez (az utóbbi abból következik, hogy $b \cup (x \cup y) \geqq s \cap x \cup y) = a$). Ezzel a kivánt hozzárendelést bizonyítottuk. A gyenge modularitást alkalmazandó még be kell látnunk, a hozzárendelésben szereplő elempárok különbözőségét. Feltéve, hogy $a \cap (b \cup y) = a, b \cup y \geqq a$ adódna s így $a \cup y = b \cup y$ állna fenn, ellentétben a már bizonyított $a \cup y > b \cup y$-nal; másrészt ebből már az is látható, hogy $s \cap (b \cup x) = b \cup x$ sem lehet, mert ez ellentmondana a már bizonyított $\overline{s \cap (b \cup x), b \cup x} \to \overline{a \cap (b \cup y), a}$ hozzárendelésnek. A gyenge modularitás alapján tehát létezik olyan $\overline{z, w}$ elempár, mely kielégíti az $s \cap (b \cup x) \leqq z < w \leqq b \cup x$ egyenlőtlenségeket és $\overline{a \cap (b \cup y), a} \to \overline{z, w}$. Ugyanúgy, mint az előzőkben, ezen relációból is $z \equiv w(\Theta_s)$ adódik, tehát $w = z \cup s'$ $(s' \leqq s)$. Azonban $w \leqq b \cup x$ miatt $s' \leqq s \cap (b \cup x)$, mert $s \geqq a > b$ tehát $w = z \cup s' \leqq z \cup (s \cap (b \cup x)) = z$, ami ellentmond $w > z$-nek. Ellentmondásra vezetett tehát az $a > b$ feltétel s így a 3. tétel bizonyítását befejeztük.

1. KOROLLÁRIUM: *Ha az L háló ideáljainak $\mathfrak{L}$ hálója gyengén moduláris, akkor L minden standard ideálja neutrális.*

2. KOROLLÁRIUM: *Relatív komplementumos háló minden standard eleme neutrális.*

Az első korolláriumot bizonyítandó alkalmaznunk kell a 3. tételt az L háló ideáljainak hálójára, $\mathfrak{L}$-re. A második korollárium egyszerűen abból a tényből adódik, hogy minden relatív komplementumos háló gyengén moduláris (lásd [4]).

A neutrális elemet azzal a tulajdonsággal definiáltuk, hogy bármely két elemmel együtt disztributív részhálót generál. Analóg állítást tartalmaz a standard elemekre vonatkozólag a

4. TÉTEL: *Legyen az L hálónak s_1 és s_2 standard eleme. Ekkor az $\{s_1, s_2, x\}$ részháló disztributív minden $x \in L$-re.*

BIZONYÍTÁS: O. ORE [6] cikkében kimutatta, hogy egy háló y, z és w elemei akkor és csak akkor generálnak disztributív részhálót, ha y, z és w minden a, b, c permutációjára fennállanak a következő egyenlőségek:

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c), \tag{2}$$

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c), \tag{3}$$

$$(a \cap b) \cup (a \cap c) \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \cap (b \cup c). \tag{4}$$

Ha speciálisan az $y = s_1, z = s_2, w = x$ elemeket vizsgáljuk, akkor a (2) egyenlet, mivel b vagy c standard, a standard ideál definíciója miatt fennáll.

(3)-at igazolandó, elég az $a = s_1$ helyettesítést elvégezni az 1. tétel (δ) feltétele miatt. A $b = s_1, c = s_2$ eset is könnyen kiszámítható. Végül belátjuk a (4) egyenlet teljesülését. Felhasználva, hogy az 1. lemma alapján $s_1 \cap s_2$ és $s_1 \cup s_2$ is standard elemek, továbbá az 1. tétel (α), (δ) feltételeinek ismételt alkalmazásával adódik, hogy $(s_1 \cap s_2) \cup (s_1 \cap x) \cup (s_2 \cap x) = (s_1 \cap s_2) \cup [(s_1 \cup s_2) \cap x] = [(s_1 \cap s_2) \cup (s_1 \cup s_2)] \cap [(s_1 \cap s_2) \cup x] = (s_1 \cup s_2) \cap (s_1 \cup x) \cap (s_2 \cup x)$, ami a bizonyítandó volt.

5. §. Standard ideálok és homomorfizmusmagok

Ha az s elem standard, akkor az 1. tétel (γ) feltételéből azonnal adódik, hogy $L/(s] \sim [s)$. Kérdés, hogy mi mondható abban az esetben, ha a vizsgált standard ideál nem főideál.

5. TÉTEL: *Legyen az L hálónak S standard ideálja. Ekkor az L/S háló ideáljainak hálója izomorf $\mathfrak{L}$-nek $[S, L]$ intervallumával, s így az $[S, L]$ intervallum izomorfiától eltekintve meghatározza L/S-et.*

BIZONYÍTÁS: Minden $K \in [S, L]$, L-beli ideálnak feleltessük meg L/S azon ideálját, melybe K az $L \to L/S$ homomorfizmusnál átmegy. Ez a leképezés nyilván homomorf, így elég kimutatni, hogy ha $I \supset J \supseteq S$, akkor I és J az $L \to L/S$ leképezésnél nem esik egybe. Valóban, ha minden $x \in I$-hez lenne olyan $y \in J$, hogy $x \equiv y(\Theta[S])$ állna fenn, akkor $(x \cap y) \cup s = x \cup y$ teljesülne valamilyen $s \in S$-re. Ekkor azonban $x \cap y$ és $s \in J$-ből $x \cup y \in J$ adódik, vagyis $I = J$ állna fenn, ellentétben feltevésünkkel.

A tétel utolsó állítása azon ismert tényből adódik, hogy egy hálót ideáljainak hálója izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározza, mivel egy háló izomorf ideálhálójának alulról elérhetetlen elemei alkotta hálójával (A. KOMATU eredménye, lásd részletesebben [1], 64. old.).

Következőkben egyszerű feltételt adunk meg arra, hogy egy háló minden homomorfizmusmagja standard ideál legyen.

6. TÉTEL: *Ha az L 0-elemes hálóban minden $[0, a]$ intervallum komplementumos, akkor L minden homomorfizmusmagja standard.*

BIZONYÍTÁS: Legyen az L hálónak I egy homomorfizmusmagja. Tekintsük a $\Theta[I]$ kongruenciarelációt és legyen $a \equiv b(\Theta[I])$ $(a > b, a, b \in L)$. Feltevésünk szerint a $[0, a]$ intervallum komplementumos, tehát létezik egy olyan b' elem, melyre $b \cap b' = 0$ és $b \cup b' = a$. Feltettük, hogy $a \equiv b(\Theta[I])$, tehát $b' = a \cap b' \equiv b \cap b' = 0(\Theta[I])$ s mivel I homomorfizmusmag, következik $b' \in I$. Ez azonban $b' \cup b = a$ miatt az 1. tétel (γ) feltétele szerint éppen azt jelenti, hogy I standard ideál.

Az előző bizonyítás kis módosítással megismételhető, ha L-ről azt tesszük fel, hogy relatív komplementumos, azaz érvényes a következő

1. KOROLLÁRIUM: *Az L relatív komplementumos háló minden homomorfizmusmagja standard.*

A 6. tételt a 9. lemmával összevetve adódik G. BIRKHOFF ismert tétele:

2. KOROLLÁRIUM: *Komplementumos moduláris hálóban egy-egyértelmű megfeleltetés van a homomorfizmusmagok és neutrális ideálok között.*

Ily módon a 6. tétel BIRKHOFF ezen tétele általánosításának tekinthető. BIRKHOFF tétele általánosítható úgyis, hogy az 6. tételt nem a 9. lemmával, hanem az általánosabb 3. tétellel vetjük egybe.

Ezután rátérünk egy SHIH—CHIANG WANG-tól [9] származó tétel általánosítására.

7. TÉTEL: *Az L relatív komplementumos* 0 *és* 1 *elemes háló kongruenciarelációnak hálója akkor és csak akkor Boole-algebra, ha minden standard ideálja főideál.*

BIZONYÍTÁS: Elegendőség. Ismeretes, hogy relatív komplementumos hálóban minden I ideál legfeljebb egy kongruenciarelációnál — ti. $\Theta[I]$-nél — alkot osztályt. A 6. tétel és feltételünk alapján minden I homomorfizmusmag standard főideái, $I=(s]$ s így $\Theta[I]=\Theta_s$. s a 3. tétel 2. korolláriuma alapján neutrális s így komplementuma s' is az, tehát $\Theta_s \cap \Theta_{s'}=\Theta_{s\cap s'}=\Theta_0$ és $\Theta_s \cup \Theta_{s'}=\Theta_{s\cup s'}=\Theta_1$ vagyis $\Theta_{s'}$ komplementuma Θ_s-nek, azaz $\Theta(L)$ valóban komplementumos.

Szükségesség. A relatív komplementumosság következtében (6. tétel 1. korollárium) L minden kongruenciarelációja $\Theta[S]$ alakú, ahol S standard ideál. Legyen $\Theta[S]$ komplementuma $\Theta[T]$, ekkor $\Theta[S] \cup \Theta[T]=\Theta[S \cup T]=\Theta[(1]]$ és $\Theta[S] \cap \Theta(T]=\Theta[S \cap T]=\Theta[(0]]$. Mivel azonban S, T s így $S \cap T$ és $S \cup T$ szintén standard ideálok, tehát szükségképpen $S \cap T=(0]$ és $S \cup T=(1]$, ami a 4. lemma korolláriumának alapján maga után vonja, hogy S és T főideálok. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

6. §. Izomorfia tételek, Zassenhaus lemma

Ebben a paragrafusban a két izomorfiatételt s ennek néhány következményét nézzük meg.

8. TÉTEL: *(Standard ideálok első izomorfia tétele). Legyen adott az L háló S standard ideálja, s egy tetszőleges I ideálja. Ekkor $I \cap S$ standard ideál I-ben, mint hálóban és*

$$I \cup S/S \simeq I/I \cap S.$$

BIZONYÍTÁS: Az 5. lemmát alkalmazva az L háló ideáljainak hálójára adódik első állításunk. A maradék állítás pedig speciális esete az első általános izomorfia tételnek (lásd RÉDEI [7]).

9. TÉTEL: *(Standard ideálok második izomorfia tétele). Legyen adva az L hálónak S ideálja és T standard ideálja, s teljesüljön $S \supseteq T$. S akkor és csak akkor standard, ha S/T standard ideálja L/T-nek. Ekkor*

$$L/S \sim L/T\Big/_{S/T}.$$

BIZONYÍTÁS: Ha S standard, akkor a 3. lemma speciális eseteként adódik, hogy S/T standard L/T-ben. Megfordítva, legyen S/T standard L/T-ben. Kimutatjuk, hogy S-re teljesül a 2. tétel (γ'') feltétele. Mint ahogy az 1. tétel „(β)-ból következik (γ)" részéből látható, ehhez elég belátni, hogy $x \equiv y(\Theta[S])$ és $x \geqq y$ fennállása esetén minden u-ra $x \cap u \equiv y \cap u(\Theta[S])$. Jelölje a' az a elem homomorf képét az $L \sim L/T$ homomorfizmusnál. Mivel $x' \equiv y'(\Theta[S/T])$ és S/T standard L/T-ben, ezért alkalmas $s' \in S/T$-vel fennáll $x' \cap u' = (y' \cap u') \cup s'$. Lévén T standard L-ben, ebből $x \cap u = [(y \cap u) \cup s] \cup t \, (t \in T)$ adódik, ami az $s_1 = s \cup t$ jelöléssel a bizonyítandó $x \cap u = (y \cap u) \cup s_1, s_1 \in S$ állításba megy át. Megjegyezzük, hogy a bizonyítás során erősen támaszkodtunk arra az állításra, hogy $\Theta[S/T]$ kongruenciaosztályai épp $\Theta[S]$ kongruenciaosztályainak homomorf képei.

Tudjuk, hogy a két izomorfia tételnek közvetlen folyománya a Zassenhaus lemma. A 3. § lemmáiból ugyanúgy bizonyítható, mint csoportok esetén [7]-ben történik.

ZASSENHAUS LEMMA: *Legyen az L hálónak I és K ideálja, továbbá S standard ideálja I-nek és T standard ideálja K-nak. Ekkor $S \cup (I \cap T)$ standard ideálja $S \cup (I \cap K)$-nak és $T \cup (K \cap S)$ standard ideál $T \cup (I \cap K)$-ban, továbbá fennáll az*

$$S \cup (I \cap K)\Big/_{S \cup (I \cap T)} \simeq T \cup (I \cap K)\Big/_{T \cup (K \cap S)}$$

izomorfizmus.

A Jordan—Hölder—Schreier tétel megfogalmazása végett bevezetjük a következő fogalmat:

3. DEFINÍCIÓ: *Az L háló ideáljainak valamely*

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq \ldots \supseteq I_n$$

sorozatát az $[I_n, I_0]$ intervallum n hosszúságú standard-sorozatának nevezzük, ha I_j standard ideál I_{j-1}-ben $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Valódinak nevezzük a standard-sorozatot, ha „$\supseteq$" helyett mindenütt „$\supset$" szerepel. Végül kompozíció-sorozatnak nevezzük minden olyan I_n és I_0 közti valódi standard-sorozatot, melynek nincs tőle különböző standard-sorozat finomítása az $[I_n, I_0]$ intervallumban.

JORDAN—HÖLDER—SCHREIER TÉTEL: *Az L háló bármely két, $[I_u, I_0]$ intervallumbeli standard-sorozata finomítható úgy, hogy a két finomított sorozat hossza megegyezik, s továbbá a két sorozat faktorhálói sorrendtől eltekintve páronként izomorfok. Továbbá, ha a tekintett intervallumban létezik kompozíció-sorozat, akkor minden standard-sorozat kompozíció-sorozattá finomítható.*

Ezen állítások ugyanúgy következnek a Zassenhaus lemmából, mint ahogy az csoportoknál, gyűrűknél szokásos (lásd pl. [7]).

Érdekes, hogy a standard ideálok Zassenhaus lemmája az izomorfia tételek nélkül is könnyen bizonyítható. A részletekre itt nem térünk ki, csupán megjegyezzük, hogy az 5. tétel következményeként elég standard elemekre igazolni az állítást, amely speciális esetben ez már nem okoz különleges nehézségeket.

7. §. Ellenpéldák és problémák

1. A dolgozat első részében mutattunk példát olyan hálóra, amelynek létezik standard ideálja, de standard eleme nincs. E példa teljessé tételéhez adósok vagyunk egy egyszerű és nem korlátos háló megkonstruálásával.

Tekintsük az egész számok láncának direktszorzatát a kételemű hálóval; ezen háló elemei $(n, 0)$, ill. $(n, 1)$ alakúak, ahol n tetszőleges egész szám és 0, ill. 1 a kételemű háló zéró, illetve egységeleme. Definiáljuk a nyert hálóhoz még az $x_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ elemeket, s kössük ki a következő relációk teljesülését:

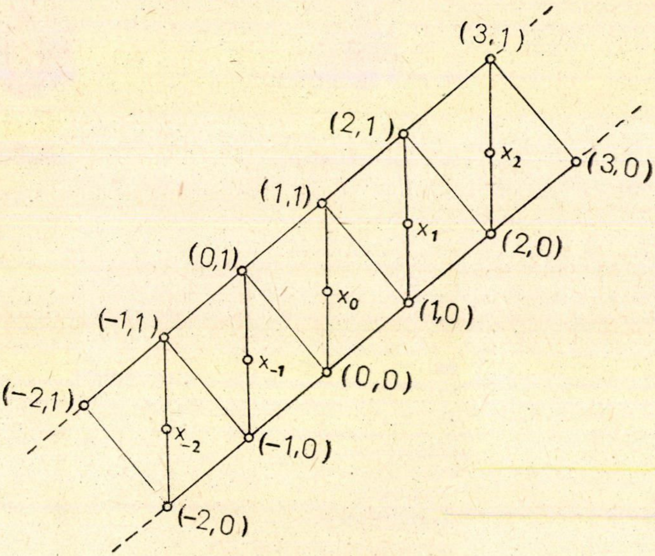
$$x_n \cup (n, 1) = x_n \cup (n+1, 0) = (n+1, 1) \text{ és } x_n \cap (n, 1) = x_n \cap (n+1, 0) = (n, 0).$$

A kapott részben rendezett halmazról (1. ábra) könnyű diszkusszióval kimutatni, hogy eleget tesz a fenti követelményeknek.

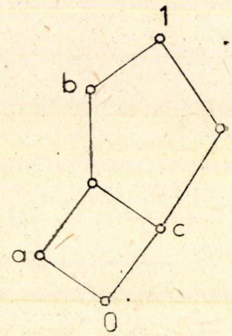
2. Példa olyan elemre, melynek homomorf képe standard és ezen homomorfképbeli elem egyetlen inverz képe sem standard az eredeti hálóban. Tekintsük az $x, y, z\,(y > z)$ elemek által generált ötelemű nem moduláris hálót. Ebben x nem standard s mégis az $y \equiv z$ reláció által indukált homomorf képben x homomorfképe standard elem, s mivel x homomorfképének egyetlen inverz képe x, ezért x kívánt tulajdonságú elem.

3. Gyengén moduláris hálóban nem minden homomorfizmusmag standard ideál. Erre példát szolgáltat a 2. ábrán látható háló és annak $(a]$ ideálja, amely homomorfizmusmag, de nem standard, mivel $a \equiv 0$-ból következik $y = y \cap (a \cup z) \equiv y \cap (0 \cup z) = y \cap z$, s mégis $y = (y \cap z) \cup a_1$ nem állhat fenn semmilyen $a_1 \leqq a$-ra.

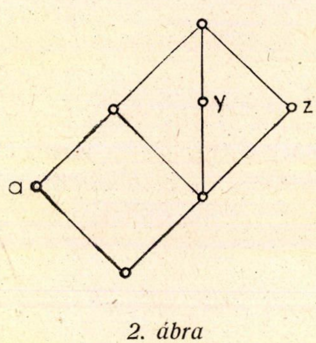
4. Ha az L hálónak egy S ideáljára érvényes, hogy bármely I ideállal $S \cup I / S \simeq I / S \cap I$, akkor S-ről röviden azt mondjuk, hogy eleget tesz az első



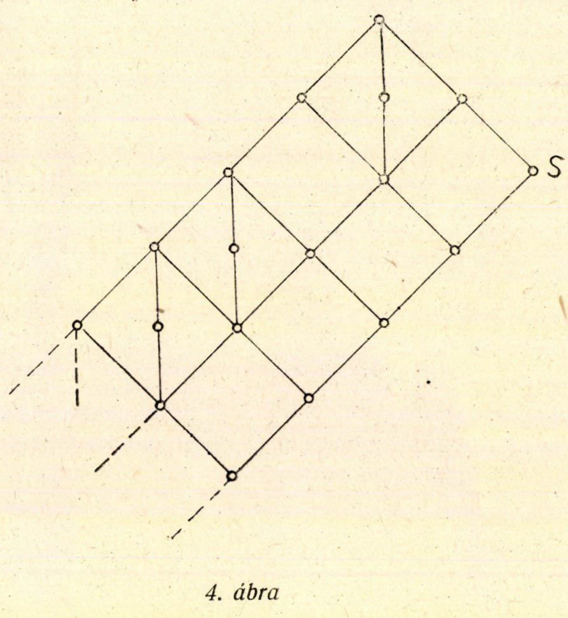
1. ábra



3. ábra



2. ábra



4. ábra

izomorfia tételnek. Láttuk, hogy a standard ideálok eleget tesznek az első izomorfia tételnek. Fordítva azonban — miként azt a 3. ábra $(a]$ főideálja illusztrálja — nem minden, az első izomorfia tételnek eleget tevő ideál standard. Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy ezen példában az első izomorfia tételnek eleget tevő ideálok $((0], (c], (a], (b]$ és $(1])$ nem alkotják az ideálok hálójának részhálóját. Sikerült azonban olyan példát is adni, ahol egy, az első izomorfia tételnek eleget tevő ideál nem standard s az első izomorfia tételnek eleget tevő ideálok mégis az ideálok hálójának részhálóját alkotják.

5. A második izomorfia tétel izomorfia-képlete gyengébb alakba megfogalmazva már nem jellemzi a standard ideálokat, amennyiben érvényes a következő:

Létezik olyan L háló, s ennek egy S ideálja, úgy, hogy S homomorfizmusmag, de nem standard ideál, továbbá minden $T \subseteq S$ homomorfizmusmagra S/T standard ideál L/T-ban és $L/S \sim {}^{L/T}\!/_{S/T}$.

Ezen állításunkat a 4. ábrán feltüntetett háló igazolja.

Végül néhány megoldatlan problémát szeretnénk felsorolni.

Lehet arra példát konstruálni, hogy gyengén moduláris* háló ideálhálója nem szükségképpen gyengén moduláris. Így a 3. tétel analogonja standard ideálokra nem mondható ki automatikusan a 3. tétel $\mathfrak{L}$-re való alkalmazásával. Ellenben, felmerül a kérdés, hogy vajon ennek ellenére

1. Igaz-e hogy gyengén moduláris hálókban minden standard ideál neutrális? Mi a helyzet relatív komplementumos hálókban?

2. Be lehet bizonyítani, hogy csökkenő láncfeltételű moduláris hálókban minden első izomorfia tételnek eleget tevő ideál standard. Mi állítható gyengén moduláris hálókban?

3. Jellemezzük az első izomorfia tételnek eleget tevő ideálokat láncfeltétel nélküli hálókban!

4. A 2. tétel (δ') feltételének megfelelően jellemzi vajon a standard ideálokat a következő feltétel:

(δ'') bármely I és K főideálra

(i*) $S \cup (I \cap K) = (S \cup I) \cap (S \cup K)$,

(ii*) $S \cap I = S \cap K$ és $S \cup I = S \cup K$ fennállásából $I = K$ adódik.

(Az állítás helyességét sugallja az a tény, hogy a (δ') és (δ'') feltétel között ugyanaz a kapcsolat, mint a 2. tétel (α') és (α''); (β') és (β''), ill. (γ') és (γ'') feltételei között.)

IRODALOM

[1] G. BIRKHOFF: *Lattice Theory,* New York, 1948.
[2] R. P. DILWORTH: The sructure of relatively complemented lattices, *Ann. of Math.,* (2) **51** (1950) 348—359.
[3] GRÄTZER GY. és SCHMIDT E. T.: Hálók ideáljai és kongruenciarelációi I., *Magyar Tud. Akad. III. Osztályának Közleményei,* 7 (1957) 93—109.
[4] GRÄTZER GY. és SCHMIDT E. T.: Hálók ideáljai és kongruenciarelációi II., *Magyar Tud. Akad. III. Osztályának Közleményei,* 7 (1957) 417—434.
[5] J. HASHIMOTO: Ideal Theory for Lattices, *Math. Japonicae,* 2 (1952) 149—186.
[6] O. ORE: Remarks on structures and group relations, *Naturf. Gesellschaft Zürich,* **85** (1940) 1—4.
[7] RÉDEI L.: *Algebra,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
[8] K. SHODA: Über die allgemeinen algebraischen Systeme, *Proc. Imp. Acad. Tokyo,* (1941—1944) 17—20.
[9] S. WANG: On permutable congruence relations, *Acta Math. Sinica,* 3 (1953) 133—141.

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

(Beérkezett: 1958. III. 4.)