FÜGGVÉNYEGYENLETEK ÉS ALGEBRAI MÓDSZEREK A GEOMETRIAI OBJEKTUMOK ELMÉLETÉBEN, I.

Írta: HOSSZÚ MIKLÓS

TARTALOM

Bevezetés

Valamely k-dimenziós X_k euklidesi tér x elemeit k-komponensű n-dimenziós *geometriai objektumoknak* nevezzük, ha hozzárendelhetők egy n-dimenziós E_n euklidesi tér P pontjaihoz úgy, hogy a $P = \alpha Q$ (koordináta) transzformáció alkalmával a Q-hoz rendelt $y = x\alpha = F(x, \alpha)$ az x-en kívül csupán a $P = \alpha Q$ transzformációtól függ (funkcionálisan). Ha a $P = \alpha Q$ transzformációk *sereget* alkotnak, akkor az $y = x\alpha$ transzformációk is:

$$\text{(I)} \qquad (x\alpha)\beta = x(\alpha\beta), \qquad x \in X_k; \quad \alpha, \beta \in \mathcal{O},$$

azaz két transzformáció helyettesíthető eggyel.

Ha $F(x, \alpha)$-nak a $P = \alpha Q$-tól való függése a

$$P, Q, \frac{dP}{dQ} = \left(\frac{\partial P_i}{\partial Q_j}\right), \ldots, \frac{d^m P}{dQ^m}$$

paraméterekkel leírható, akkor x-et *m-ed osztályú speciális geometriai objektumnak* nevezzük. Elég csupán a tiszta *differenciális* objektumokat vizsgálni [5,6][1], melyeknél F nem függ explicite P és Q-tól:

$$y = x\alpha = F(x, \alpha) = F\left(x, \frac{dP}{dQ}, \ldots, \frac{d^m P}{dQ^m}\right).$$

A $P = \alpha Q = \alpha\beta R$ transzformáció ismétlése során x az (I) alatti törvényszerűség szerint transzformálódik, tehát $\alpha\beta$ a $P = \alpha(\alpha R)$ összetett függvény deriváltjait foglalja össze;

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{dP}{dQ}, \ldots, \frac{d^m P}{dQ^m}\right), \\ \beta &= \left(\frac{dQ}{dR}, \ldots, \frac{d^m Q}{dR^m}\right), \\ \alpha\beta &= \left(\frac{dP}{dR}, \ldots, \frac{d^m P}{dR^m}\right), \end{aligned}\right\} \quad P = \alpha Q = \alpha\beta R,$$

így az $\alpha\beta$ műveletet az összetett függvény deriválási szabálya értelmezi.

Az x-hez rendelt transzformációk (operátorok) értelmezési tartományát $\mathcal{O}$-vel fogjuk jelölni. Ez rendszerint félcsoport, mely tartalmaz egy $\mathcal{G}$ csoportot.

Az $x \in X$ geometriai objektumot az $y = x\alpha$ transzformációs törvény (operációi) jellemzi. Így az (I) (transzformáció) függvényegyenlet megoldása révén az összes különböző típusú geometriai objektum felsorolható. E dolgozat célja (I) megoldásának visszavezetése a megadott $\mathcal{O}$ (vagy $\mathcal{G}$ csoport) szerkezetének vizsgálatára, és egyes speciális esetekben e szerkezeti vizsgálat végrehajtása.

Az I. fejezet 1—2. §-ban látni fogjuk, hogy (I) megoldása $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}$-on egyenértékű az (absztrakt) $\mathcal{G}$ csoport nemkonjugált alcsoportjainak megkeresésével, és speciálisan $\mathcal{G}$ valamely $\mathfrak{N}$ normálosztóján, rögzített $x = x_0$ helyen az $\alpha \in \mathfrak{N}$ változóban invertálható $x\alpha$ operációk meghatározása egyenértékű

[1] A szögletes zárójelben álló számok a dolgozat III. része végén található irodalom jegyzékre utalnak.

$\mathcal{G}$ bizonyos endomorfizmusainak megkeresésével.[2] Az utóbbi visszavezetési tétel alkalmazható akkor is, ha $\mathcal{G}$ két részcsoport szorzatára bontható, és az egyes tényező részcsoportok normálosztóján invertálható $x_0\alpha$; erről szól a 3. §. A 3. §-ban előzőleg még a megoldást szolgáltató endomorfizmust vizsgáljuk két részcsoport szorzatára bomló $\mathcal{G}$-n. A II. fejezet 1. §-ban az n-dimenziós objektumok $\mathcal{G}_n$ csoportjának általános tulajdonságait ismerjük meg, a 2. §-ban pedig az $m=3$. osztályú $\mathcal{G}_1^3$ csoport összes egy- és kétparaméteres, az egységelem környezetében folytonos, illetve folytonosan differenciálható, egyszeresen összefüggő alcsoportjait fogjuk meghatározni. A 3. §-ban vizsgáljuk a $\mathcal{G}_1^3$ bizonyos részein invertálható megoldásokat, és meghatározásukra adunk egy általános eljárást, amit példákon alkalmazni is fogunk.

A III. fejezetet az objektumok algebrájának szenteljük; objektumok X halmaza *algebrát* alkot, ha abban értelmezve van egy $xy\in X$ művelet, amely automorf az $\bar{x}=x\alpha$ transzformációkkal szemben: $\overline{xy}=\bar{x}\bar{y}$. Itt az előzőkkel szemben nem követeljük meg (I)-et. Az 1. §-ban bebizonyítjuk, hogy tetszőleges k-dimenziós X_k algebra izomorf egy olyan X_k'-vel, mely az $x'y'=x'+\gamma(y'-x')$ művelettel van ellátva, feltéve, hogy bizonyos elsőrendű differenciálhatósági feltételek is teljesülnek. A 2. §-ban másodrendű differenciálhatóság felhasználásával kimutatjuk, hogy bármely $k=1$ dimenziós X_1 algebra izomorf egy olyan X_1'-vel, melyben az $\bar{x}=x\alpha$ operációk (transzformációk) affinitások:

$$\bar{x}'=x'a+b \quad [a=a(\alpha),\, b=b(\alpha)],$$

s az ilyen transzformációkkal szemben automorf műveletek mindig

$$x+\gamma(y-x) \quad \text{vagy} \quad c_1x+c_2y+c_3$$

alakúak, ahol

$$\gamma(at)=a\gamma(t), \quad \text{illetve} \quad c_3(a-1)=(c_1+c_2-1)\,b.$$

Az objektumok algebráját lehet általánosabban is értelmezni; ha $(xy)\alpha$-ról csak annyit tudunk, hogy x és y valamilyen transzformáltjaiból alkotható:

$$(xy)\alpha=H[K(x,\alpha),L(y,\alpha)]$$

(esetleg más

$$x\alpha\neq K(x,\alpha)\neq L(x,\alpha)$$

transzformációs törvénnyel), akkor az X_k és a $x'+\gamma(y'-x')$ művelettel ellátott X_k' között csak izotopizmus [2] áll fenn. Ezekre és még egyéb, több változóra történő általánosításokra a 4. §-ban térünk rá, s látunk néhány általános visszavezetési tételt.

[2] Illetve egyenértékű bizonyos speciális alcsoportok megkeresésével. Az ilyen tulajdonságú megoldások meghatározásának problémáját Aczél János [1] vetette fel.

I. FEJEZET

AZ xa OPERÁCIÓ (TRANSZFORMÁCIÓ) ELŐÁLLÍTÁSA AZ ab (PARAMÉTER) MŰVELET FÜGGVÉNYEKÉNT

1. §. Visszavezetés a $\mathfrak{G}$ (paraméter) csoport szerkezetének vizsgálatára.

1. Megállapodunk néhány elnevezésben és jelölésben.

Az $\mathfrak{O}$ strukturát, vagy speciálisan a $\mathfrak{G}$ csoportot egy X halmaz *operátor tartományának* nevezzük, ha fennáll:

$$(xa)b = x(ab), \qquad x \in X;\ a,\ b \in \mathfrak{O}. \tag{1}$$

A geometriai objektumok elméletének irodalmával ellentétben itt *jobboldali* operátort vettünk; ez inverz operátor létezése esetén mindegy elvileg, mert pl. az ax baloperátorral együtt $xa = a^{-1}x$ jobboldali operátor:

$$\underline{(xa)b} = b^{-1}(a^{-1}x) = (b^{-1}a^{-1})x = (ab)^{-1}x = \underline{x(ab)},$$

tehát az áttérés egyik oldali operátorról a másik oldalira egyértelmű. A geometriai objektumok elméletében jobbról írott baloperátor írás terjedt el: (1) helyett az

$$F[F(x, a), b] = F(x, ba)$$

jelölést használja több szerző. Később látni fogjuk, hogy lényeges számolási könnyebbséget jelent a jobboperátor írás; egyébként a másik oldali operátorral is teljesen hasonló (duális) tételek bizonyithatók. Hogy mégse térjünk el túlságosan a bevett szokásoktól, xa helyett az ax jelölést használva, az egyes geometriai objektum transzformációs törvényeket felírjuk az irodalomban megszokott (kontravariáns) alakban is.

Operátorok $\mathfrak{G}$ csoportját (általában $\mathfrak{O}$ halmazát) *tranzitivnek* nevezzük X felett, ha van X-nek olyan x_τ eleme, mely tetszőleges $x \in X$-be transzformálható: $x_\tau \mathfrak{G} = X$. Ekkor nyilván $x\mathfrak{G} = X$ is teljesül bármely $x \in X$-nél. Ugyanis alkalmas $a \in \mathfrak{G}$-vel $x = x_\tau a$, tehát

$$x\mathfrak{G} = (x_\tau a)\mathfrak{G} = x_\tau(a\mathfrak{G}) = x_\tau\mathfrak{G} = X.$$

Ha a $\mathfrak{G}$ csoporttal mint operátor tartománnyal ellátott x *unitér* azaz $\mathfrak{G}$ egységelemére: e-re fennáll $xe = x$ $(x \in X)$, akkor X egymástól idegen $X_\tau = x_\tau\mathfrak{G}$ tranzitivitási tartományok összege: $X = \cup X_\tau$. Az $x_\tau \in X$ elemek halmaza X-nek egy *kifeszítő rendszere.* Minthogy előző megjegyzésünk szerint egy tranzivitási tartományt bármely eleme kifeszíti, ezért az X_τ terek közül bármely kettő közös része üres. Nyilván nem jelent különösebb megszorítást X unitér volta, hiszen xa-t már egyértelmű módon jellemzi az X-nek az

$\overline{X} = Xe$ unitér részén való viselkedése: bármely $x \in X$ és $a \in \mathcal{G}$ esetén

$$\left.\begin{array}{l} \underline{xa} = x(ea) = (xe)a = \overline{x}a, \\ \overline{x}e = (xe)e = xe = \overline{x}, \end{array}\right\} \quad x \to \overline{x} = xe \in \overline{X} = Xe,$$

s ez nyilván érvényes bármely egységelemes $\mathcal{O}$ struktúrán.

$\mathcal{G}$ s elemeit, melyek egy $x_\tau \in X$-et változatlanul hagynak, az x_τ elem *stacioner* operátorainak nevezzük. Ezek nem üres $\mathcal{S}$ halmaza nyilván részcsoportja (általában részstruktúrája) $\mathcal{G}$-nek.

Az X-ben ugyan nem értelmezünk műveletet, de X *operátor izomorfizmusának* (röviden o-izomorfizmusának) fogjuk nevezni valamely X' halmazra való $x \leftrightarrow x'$ leképezését. $\mathcal{O}$ operátor tartománya marad X'-nek is, ha az operátorok hatását így értelmezzük:

$$x' \circ a = (xa)', \qquad x \in X,\ a \in \mathcal{O}.$$

Ez egyértelmű vonatkozást létesít az xa és az $x' \circ a$ műveletek között: egyikük meghatározza a másikat. Hasonló módon értelmezzük az $x \to x'$ *o-homomorfizmust* is. X-nek minden operátor-homomorf X' képéhez is hozzárendelhető $\mathcal{O}$ operátor tartományként, s nyilván az $x \to x'$-vel képezett $x' \circ a = (xa)'$ ekkor is kielégíti az (1)-hez hasonló

$$(1') \quad (x' \circ a) \circ b = (xa)' \circ b = [(xa)b]' = [x(ab)]' = x' \circ (ab), \quad x' \in X';\ a,\ b \in \mathcal{O}$$

operátor követelményt, csak most $x' \circ a$-ról a visszatérés xa-ra nem egyértelmű. Természetesen, $x \to x'$ csak akkor értelmez homomorfizmust, ha $x' = y'$-vel együtt

$$(xa)' = (ya)', \qquad a \in \mathcal{G},$$

azaz $x' \circ a = (xa)'$ értelmezése független x választásától. Izomorf-homomorf struktúrák helyett a félreértés veszélye nélkül használhatjuk a megfelelő izomorf-homomorf műveletek elnevezést.

2. Az előbb értelmezett fogalmak felhasználásával kimondhatjuk a következőt:

1. TÉTEL: *Adott $\mathcal{F}$ félcsoport hozzárendelhető önmagához és bármely o-homomorf képéhez operátor tartományként, és tranzitív operátor tartományként csak ezekhez rendelhető hozzá.*

A tétel első része nyilvánvaló, a második rész bizonyítása végett tekintsük az

$$\alpha(\in \mathcal{F}) \to \alpha^\tau = x_\tau \alpha \qquad (\in X_\tau = x_\tau \mathcal{F})$$

leképezést, mellyel valóban

$$xa = \underline{\alpha^\tau} a = (x_\tau \alpha) a = x_\tau(\alpha a) = (\alpha a)^\tau.$$

A tétel más szavakkal azt mondja ki, hogy adott $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ félcsoporton és egy tetszőleges rögzített $x_\tau \in X$ elem által kifeszített $X_\tau = x_\tau \mathcal{F}$ tranzitivitási tartományon (1) legáltalánosabb megoldása

$$xa = \alpha^\tau a = (\alpha a)^\tau, \qquad a \in \mathfrak{F},$$

ahol $\alpha \to \alpha^\tau = x$ az $\mathfrak{F}$ tetszőleges operátor-homomorf leképezése X_τ-ra. Eszerint (1) megoldása $\mathfrak{F}$-en egyenértékű $\mathfrak{F}$ összes o-homomorfizmusainak a megkeresésével. Ez utóbbi struktúra probléma megoldása különösen egyszerű pl. egy csoporton. Érvényes a következő:

2. TÉTEL. *Egy $\mathcal{G}$ csoport $\mathfrak{S}$ alcsoportja szerinti*

$$\mathcal{G} = \mathfrak{S}\bar{a},\ \mathfrak{S}\bar{b}, , \ldots, = \mathfrak{S}\mathcal{H}$$

felbontás jobboldali $\mathcal{H}$ reprezentáns rendszere homomorf képe $\mathcal{G}$-nek:

$$\bar{\alpha} \circ a = \overline{\alpha a}, \quad \alpha = \alpha' \bar{\alpha}(\in \mathcal{G}) \to \bar{\alpha}(\in \mathcal{H}); \ a \in \mathcal{G}. \tag{2}$$

O-izomorfizmustól eltekintve $\mathcal{G}$-nek nincs is egyéb o-homomorf képe.

A tétel más szavakkal a tranzitív permutációs csoportok reprezentálhatóságát mondja ki a teljes permutációs csoport alcsoportjaihoz tartozó mellékosztályok permutációiként [10].

Megjegyzés. Konjugált $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}' = c^{-1}\mathfrak{S}c$ alcsoportokhoz, melyeket $\mathcal{G}$-nek egy $a \to c^{-1}ac$ (belső) automorfizmusa egymásra képez le, o-izomorf maradékrendszer tartozik; alkalmas o-izomorfizmus

$$\mathfrak{S}a \leftrightarrow \mathfrak{S}'c^{-1}ac = c^{-1}(\mathfrak{S}a)c.$$

A megegyező alcsoportokhoz tartozó különböző maradékrendszerek között pedig nyílván o-izomorfizmus áll fenn. Viszont nyilvánvaló, hogy o-izomorf X, X' halmazok elemeihez tartozó stacioner operátorok alcsoportjai egymás konjugáltjai; ha ugyanis x_τ stacioner operátorainak alcsoportja $\mathfrak{S}$, akkor $x' = (x_\tau c)'$-é $\mathfrak{S}_c = c^{-1}\mathfrak{S}c$, hiszen

$$x' \circ \mathfrak{S}' = [(x_\tau c)c^{-1}\mathfrak{S}c]' = (x_\tau \mathfrak{S}c)' = (x_\tau c)' = x',$$

tehát $\mathfrak{S}' \subseteq \mathfrak{S}_c$, és másrészt hasonlóan $c\mathfrak{S}_c c^{-1} \subseteq \mathfrak{S}'$ vagyis valóban $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_c$.

Másszóval *az o-izomorfizmushoz szükséges és elegendő a rögzített elemekhez tartozó stacioner operátorok alcsoportjainak konjugáltsága.* [5]

KÖVETKEZMÉNY. A $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}$ csoporton (1) összes, legfeljebb o-izomorfizmustól eltekintve különböző megoldásainak megkeresése egyenértékű $\mathcal{G}$ összes nemkonjugált $\mathfrak{S}$ alcsoportjainak[3] és a hozzájuk tartozó $\mathcal{H}$ jobboldali maradék-

[3] A $\mathcal{G}$ különböző $\mathfrak{S}$ alcsoportjai közül nem kellene számításba venni azokat, melyeknek van $\mathcal{G}$ normálosztóját képező része; u. i. ha $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{T}$, ahol $\mathfrak{N}$ a $\mathcal{G}$ normálosztója, akkor $\mathfrak{N}$ elemei X minden elemének stacioner operátorai, mert

$$x\mathfrak{N} = (x_\tau c)\mathfrak{N} = x_\tau(c\mathfrak{N}) = x_\tau(\mathfrak{N}c) = (x_\tau\mathfrak{N})c = x_\tau c = x,$$

vagyis xa-t leírja már a $\mathcal{G}/\mathfrak{N}$ faktorcsoporton való viselkedése [5]. Hogy ne kelljen $\mathcal{G}$ faktorcsoportjait így különválasztva vizsgálni, eltekintünk ettől a megkülönböztetéstől, és $\mathcal{G}$ alcsoportjai közül számításba vesszük azokat is, melyeknek van $\mathcal{G}$ normálosztóját képező (az egységelemtől különböző) része.

rendszereknek a meghatározásával [3,5], vagyis az összes ismétlés nélküli $\mathcal{G} = \mathcal{S}\mathcal{H}$ faktorizációk meghatározásával, ahol $\mathcal{S}$ a $\mathcal{G}$-nek alcsoportja. A megoldásokat egy x_τ elem által kifeszített $X_\tau = x_\tau \mathcal{G}$ tranzitvitási tartománnyal operátor-izomorf $\mathcal{H}$-n a (2) képlet (a mellékosztályok tranzlációja) szolgáltatja, ahol $a \to \bar{a}$ a $\mathcal{G}$-nek $\mathcal{H}$-ra való tetszőleges leképezése (o-homorfizmusa).

ÖSSZEFOGLALVA: Adott $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ félcsoporton (1) legáltalánosabb megoldásának megkeresése egyenértékű az önmagán operáló $\mathcal{F}$ o-homomorf képeinek meghatározásával, s egy $\mathcal{G}$ csoporton az összes o-izomorfizmustól eltekintve különböző megoldások megkeresése egyenértékű $\mathcal{G}$ összes nemkonjugált alcsoportjainak meghatározásával. A 2. tételben éppen azt bizonyítottuk, hogy egy önmagán operáló $\mathcal{G}$ csoport o-homomorf képe o-izomorf $\mathcal{G}$ valamely $\mathcal{S}$ alcsoportja szerinti $\mathcal{H}$ jobboldali maradékrendszerével, analóg módon azzal, hogy egy csoport homomorf képe izomorf valamely normálosztó szerinti faktorcsoporttal.

2. §. Bizonyos részhalmazon invertálható *xa*

1. Egy csoport összes alcsoportjainak meghatározása általában nem egyszerű feladat, ezért a következőkben más szemszögből vizsgáljuk (1) megoldásának kérdését.

ACZÉL JÁNOS [1] az (1) megoldásánál más felfogást követ: $\mathcal{O}$-nak egy előre megadott $\mathcal{H}$ (rendszerint normálosztó, de legalább csoport) részén feltételezi az

$$x = x_\tau \xi \longleftrightarrow x' = \xi \quad (\in \mathcal{H})$$

leképezés létezését, és így keresi xa-t. Egy $X = x_\tau \mathcal{O}$ tranzitivitási tartományon ilyen $\mathcal{H}$ bizton létezik: egyik legszűkebb $x_\tau \mathcal{H} = X$ tulajdonságú $\mathcal{H}$. ACZÉL JÁNOS vizsgálataiban $\mathcal{H}$ megválasztása önkényes, de hasznos, mert sok esetben minden további differenciálhatósági, folytonossági, sőt csoport stb. feltétel nélkül nyerhető xa legáltalánosabb alakja. Az általános algebrai módszerek ekkor is sikeresen alkalmazhatók:

Az $x \longleftrightarrow x'$ leképezéssel áttérünk X-ről $\mathcal{H}$-ra, s azon értelmezzük

$$x' \circ a = (xa)', \qquad x (\in X) \longleftrightarrow x' (\in \mathcal{H}), \; a \in \mathcal{O}$$

-t, mely nyilván szintén kielégíti az

$$(x' \circ a) \circ b = x' \circ (ab), \qquad x' \in \mathcal{H}; \; a, \, b \in \mathcal{O} \tag{1'}$$

operátor követelményt. Minthogy $x \longleftrightarrow x'$ invertálható, ezért létezik $e \in \mathcal{H}$, melyre

$$x_\tau e = x_\tau, \quad x'_\tau = e$$

teljesül. Így

$$e \circ \xi = x'_\tau \circ \xi = (x_\tau \xi)' = \xi, \qquad \xi \in \mathcal{H}.$$

Ezután bevezetjük $\mathcal{C}$-nak $\mathcal{H}$-ra való

$$a \to \pi a = e \circ a$$

leképezését, mellyel,

$$\xi \circ a = (e \circ \xi) \circ a = e \circ (\xi a) = \pi(\xi a), \quad \xi \in \mathcal{H},\ a \in \mathcal{C}.$$

Itt azonban az $a \to \pi a$ leképezést nem ismerjük, csupán annyit tudunk róla, hogy

$$(e \circ a) \circ b = e \circ (ab)$$

fennállása miatt kielégíti a

$$\pi[(\pi a) b] = \pi(ab), \qquad a, b \in \mathcal{C} \tag{3}$$

függvényegyenletet. Erre tekintettel $\xi \circ a$-t úgyis felírhatjuk, hogy ξ helyett $\pi \alpha$-t írunk:

$$(\pi \alpha) \circ a = \pi(\alpha a),$$

s ez azt fejezi ki, hogy $\mathcal{H}$ az $\mathcal{C}$ operátor-homomorf képe. Ismételjük azonban, hogy itt az $a \to \pi a$ leképezést nem tekinthetjük adottnak, csupán azt tudjuk róla, hogy kielégíti (3)-t. Az viszont nyílvánvaló, hogy (3) fennállása esetén az $a \to \pi a$ leképezés operátor-homomorfizmus, vagyis α választásától függetlenül értelmezi $(\pi \alpha) \circ a$-t, mely valóban ki is elégíti az (1') operátor követelményt:

$$(\xi \circ a) \circ b = \pi[\pi(\xi a) b] = \pi(\xi a b) = \xi \circ (a b).$$

Mármost (3) megoldása végett feltételezve, hogy $\mathcal{H}$ csoport,

$$(\pi a) \xi \in \mathcal{H} \quad \text{ha} \quad \xi \in \mathcal{H},$$

ezért (3)-ban $b = \xi \in \mathcal{H}$-t helyettesítve,

$$(\pi a) \xi = \pi(a \xi)$$

adódik. Ha $\mathcal{C} = \mathcal{G}$ csoport, akkor felbontható a $\mathcal{H}$ szerinti

$$\mathcal{G} = a' \mathcal{H}, \qquad b' \mathcal{H}, \ldots$$

baloldali maradékosztályokra. Ha $a \in a' \mathcal{H}$, akkor

$$a = a' \bar{a}, \qquad a \in \mathcal{H}.$$

tehát

$$\pi a = \pi(a' \bar{a}) = (\pi a') \bar{a} = (\pi a') a'^{-1} a.$$

Vezessük be ezután π helyett a

$$\pi a = (\chi a^{-1}) a$$

összefüggéssel a χ függvényt, akkor az előzővel összehasonlítva látjuk, hogy

$$\chi a^{-1} = (\pi a') a'^{-1}$$

csak a'-tól függ. Helyettesítsük ezt a π-t (3)-ba:

$$\{\chi[(\pi a) b]^{-1}\} (\chi a^{-1}) a b = [\chi(ab)^{-1}] a b,$$

vagyis ab-vel jobbról való egyszerűsítés után, új változókkal

$$\chi[a(\pi b^{-1})^{-1}] \chi b = \chi(ab).$$

Az előbbi megállapítás szerint χa csak a-nak az a' reprezentánsától függ. Ha történetesen $\mathcal{H} = \mathfrak{N}$ normálosztó, akkor $\pi b^{-1} \in \mathfrak{N}$ miatt

$$[a(\pi)^{-1}]' = [a'\bar{a}(\pi)^{-1}]' = a',$$

tehát az

$$a \to \chi a = \chi a' = \chi(a\mathfrak{N}) = \pi(a'^{-1})a' \qquad \in \mathfrak{N}a$$

leképezés kielégíti a

$$\chi a \chi b = \chi(ab)$$

összefüggést, azaz $\mathcal{G}$-nek endomorfizmusa. Az ilyen χ-vel képezett

$$\pi a = (\chi a'^{-1})a\,(\in \mathfrak{N})$$

valóban ki is elégíti (3)-at, tehát (1') megoldása

$$\xi \circ a = \pi(\xi a) = [\chi(\xi a)^{-1}]\xi a = (\chi a^{-1})\xi a,$$

s kimondható a következő:

3. TÉTEL: *Az $X, \mathcal{O}$ halmazon értelmezett* (1) *függvényegyenletnek az adott $\mathcal{O}$ struktura $\mathcal{H}$ részén az*

$$x = x_\iota \xi \leftrightarrow x' = \xi \qquad (\in \mathcal{H})$$

invertálhatósági feltételt kielégítő legáltalánosabb megoldása

$$(xa)' = \xi \circ a = \pi(\xi a)[= (\pi a) \circ a = \pi(aa)], \qquad x \in X,\ a \in \mathcal{O},$$

ahol $a \to \pi a (\in \mathcal{H})$ a

(3) $$\pi[(\pi a)b] = \pi(ab), \quad \pi\xi = \xi; \qquad a, b \in \mathcal{O};\ \xi \in \mathcal{H}$$

összefüggést kielégítő (egyébként tetszőleges) leképzés (o-homomorfizmus). Ha $\mathcal{O} = \mathcal{G}$ csoport, melynek $\mathcal{H} = \mathfrak{N}$ normálosztója, akkor

(4) $$(xa)' = \xi \circ a = (\chi a^{-1})\xi a, \qquad a \in \mathcal{G},$$

ahol

(5) $$a \to \chi a = \chi(a\mathfrak{N}) \qquad \in a\mathfrak{N}$$

a $\mathcal{G}$-nek (tetszőleges) endomorfizmusa:

(6) $$\chi a \chi b = \chi(ab), \qquad ab \in \mathcal{G}.$$

MEGJEGYZÉS. Általában $\mathcal{H}$ nem választható teljesen önkényesen: ha $\mathcal{O} = \mathcal{G}$ csoport, akkor a 2. tétel szerint $\mathcal{H}$ csak $\mathcal{G}$ valamely $\mathfrak{S}$ alcsoportja szerinti jobboldali maradékrendszere lehet; akkor viszont az

$$a = a'\bar{a} \to \pi a = \bar{a}, \qquad a' \in \mathfrak{S}$$

leképezés valóban ki is elégíti (3)-t, hiszen

$$\overline{\bar{a}b} = \overline{\mathfrak{S}\bar{a}b} = \overline{a'\bar{a}b} = \overline{ab}.$$

2. A χ endomorfizmusok meghatározása is struktúra probléma, vagyis $\mathcal{G}$ bizonyos speciális alcsoportjainak megkeresésével egyenértékű. Ezzel kapcsolatban érvényes a következő:

4. TÉTEL: *Ahhoz, hogy egy*

$$a \to \chi a = \chi(a\mathfrak{N}) \qquad \in a\mathfrak{N}$$

alakú leképezés a $\mathfrak{G}$-nek endomorfizmusa legyen, szükséges és elegendő, hogy az $\mathfrak{N}$ normálosztó szerinti $a\mathfrak{N}$ $(a \in \mathfrak{G})$ maradékosztályoknak ezen osztályok alcsoportot alkotó $\mathfrak{T}$ reprezentáns rendszerére való leképezése legyen.

A szükségesség nyílvánvaló annak alapján, hogy a χa $(a \in \mathfrak{G})$ elemek $\mathfrak{T}$ halmaza a $\mathfrak{G}$-nek alcsoportja, merthisz két ilyen elem szorzata is ugyanilyen, továbbá

$$\chi e = e \in \mathfrak{T}, \qquad (\chi a)^{-1} = \chi a^{-1} \in \mathfrak{T};$$

másrészt pedig $\mathfrak{T}$ valóban az $\mathfrak{N}$ normálosztó reprezentáns rendszere, mert minden $a\mathfrak{N}$ osztálynak megfelel egy és csak egy

$$\chi(a\mathfrak{N}) \in a\mathfrak{N}.$$

Az elégségesség is nyílvánvaló, hiszen bármely

$$a \to \chi a = \chi(a\mathfrak{N})$$

leképezés, melynek $\mathfrak{T}$ képtartománya a $\mathfrak{G}$-nek olyan részcsoportja, hogy az az $\mathfrak{N}$ normálosztó szerinti maradékosztályok reprezentáns rendszere, teljesül (6), mert a reprezentánsok szorzata, mely $\mathfrak{T}$ csoport voltából kifolyólag maga is reprezentáns, megegyezik a szorzat reprezentánsával.

Minthogy egy $\mathfrak{T}$ reprezentáns rendszerre jellemző, hogy a $\mathfrak{G} = \mathfrak{T}\mathfrak{N}$ szorzat előállítás ismétlés nélküli, a 4. tétel a 3. tétellel összevetve más szavakkal azt mondja, hogy az (1) függvényegyenletnek a $\mathfrak{G}$ csoport $\mathfrak{N}$ nornálosztóján invertálható megoldásainak meghatározása egyenértékű az olyan ismétlés nélküli

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{T}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{T}$$

előállítások megkeresésével, melyeknél $\mathfrak{T}$ a $\mathfrak{G}$-nak alcsoportja.

3. §. Két alcsoport szorzatára bontható $\mathfrak{G}$ szerkezeti vizsgálata

1. Az eddigiekben (1) megoldását egyváltozós függvényegyenletek megoldására vezettük vissza. Most egy általános eljárást mutatunk az

$$a \to \chi a = (a\mathfrak{N}) \qquad \in a\mathfrak{N} \tag{5}$$

alakú endomorfizmusok megkeresésére, vagyis

$$\chi a \chi b = \chi(ab) \tag{6}$$

megoldására az (5) teljesülése esetén, midőn ugyanakkor a $\mathfrak{G}$ csoport

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{\mathrm{I}}\mathfrak{G}_{\mathrm{II}} = \mathfrak{G}_{\mathrm{II}}\mathfrak{G}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{G}_{\mathrm{I}} \cup \mathfrak{G}_{\mathrm{II}}$$

részcsoportokra való nem feltétlen ismétlés nélküli felbontását ismerjük. Ekkor

$$(7)\qquad \left.\begin{array}{ll} \varrho a_{I} = \chi a_{I} = \varrho(a_{I}\mathcal{N}_{I}) & \in a_{I}\mathcal{N}_{I} \\ \sigma a_{II} = \chi a_{II} = \sigma(a_{II}\mathcal{N}_{II}) & \in a_{II}\mathcal{N}_{II} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_i \in \mathcal{G}_i \\ \mathcal{N}_i = \mathcal{G}_i \cap \mathcal{N} \end{array}$$

$\mathcal{G}_i$-n értelmezett endomorfizmusok. Észrevesszük azt is, hogy ϱ és σ értelmezése, és χ endomorfizmus volta miatt nem függetlenek, hiszen

$$a = a_{I}a_{II} = \alpha_{II}\alpha_{I}, \qquad a_i,\ \alpha_i \in \mathcal{G}_i$$

esetén

$$\chi a = \chi a_{I}\chi a_{II} = \chi\alpha_{II}\chi\alpha_{I},$$

vagyis érvényes, hogy

$$(8)\qquad \chi a = \varrho a_{I}\sigma a_{II} = \sigma\alpha_{II}\varrho\alpha_{I}, \qquad a = a_{I}a_{II} = \alpha_{II}\alpha_{I}.$$

Kimondhatjuk a következőt:

5. TÉTEL. *Ahhoz, hogy χ a részcsoportok szorzatára bontható*

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{I}\mathcal{G}_{II} = \mathcal{G}_{II}\mathcal{G}_{I} = \mathcal{G}_{I} \cap \mathcal{G}_{II}$$

csoportnak (5) *alakú endomorfizmusa legyen, szükséges és elegendő a* (8) *egyenletek fennállása, ahol ϱ, σ a* (7) *alatti alakú endomorfizmusok.*

A bizonyítás előtt még megadjuk az 5. tétel függvényegyenlet megoldási megfogalmazását is:

KÖVETKEZMÉNY. A (6) függvényegyenlet (5) kiegészítő feltételt kielégítő megoldásának megkeresésére egyenértékű a (7), (8) összefüggéseket kielégítő ϱ, σ endomorfizmusok meghatározásával, ha a $\mathcal{G}$ megfelelő módon faktorizálható.

Minthogy a szükségesség bizonyítása már megtörtént, a következmény dedig nem kíván külön bizonyítást, rögtön rátérünk az elégségesség bizonyítására. Tekintsük először (5)-öt:

$$\chi a = \chi(a_{I}a_{II}) = \varrho a_{I}\sigma a_{II} = \varrho(a_{I}\mathcal{N}_{I})\sigma(a_{II}\mathcal{N}_{II}) =$$
$$= \chi(a_{I}\mathcal{N}_{I}a_{II}\mathcal{N}_{II}) = \chi(a\mathcal{N}) \in a_{I}\mathcal{N}_{I}a\,\mathcal{N}_{II} = a\mathcal{N},$$

ugyanis $\mathcal{N}_{II} = \mathcal{G}_{II} \cap \mathcal{N}$ a $\mathcal{G}_{II}$-nek normálosztója tehát

$$a_{I}\mathcal{N}_{I}a\,\mathcal{N}_{II} = a_{I}\mathcal{N}_{I}\mathcal{N}_{II}a_{II} = a_{I}\mathcal{N}a_{II} = a_{I}a_{II}\mathcal{N} = a\mathcal{N},$$

hiszen

$$\mathcal{N}_{I}\mathcal{N}_{II} = \mathcal{N},$$

mert egyrészt

$$\mathcal{N}_{I}\mathcal{N}_{II} \subseteq \mathcal{N}\mathcal{N} = \mathcal{N},$$

másrészt

$$\mathcal{N}_{I}\mathcal{N}_{I} \supseteq \mathcal{N}_{I}e \cup e\mathcal{N} = (\mathcal{G}_{I} \cap \mathcal{N}) \cup (\mathcal{G}_{II} \cap \mathcal{N}) = (\mathcal{G}_{I} \cup \mathcal{G}_{II}) \cup \mathcal{N} = \mathcal{G} \cap \mathcal{N} = \mathcal{N}.$$

Igazoljuk ezután χ homomorfizmus voltát is. Legyen

$$a = a_{I}a_{II}, \qquad b = t_{II}b_{I}, \qquad ab = c_{I}c_{II},$$

akkor

$$(9)\qquad a_{II}b_{II}b_{I}=a_{I}^{-1}(ab)=a_{I}^{-1}c_{I}c_{II},$$

tehát (8) felhasználásával a

$$\chi a\chi b=\varrho a_{I}\sigma a_{II}\sigma b_{II}\varrho b_{I}=\varrho a_{I}\sigma(a_{II}b_{II})\varrho b_{I}=\varrho a_{I}\chi(a_{II}b_{II}b_{I})=$$
$$=\varrho a_{I}\chi(a_{I}^{-1}c_{I}c_{II})=\varrho a_{I}\varrho(a_{I}^{-1}c_{I})\sigma c_{II}=\varrho a_{I}\varrho a_{I}^{-1}\varrho c_{I}\sigma c_{II}=\chi(c_{I}c_{II})=\chi(ab)$$

egyenlőség sorozatot nyerjük, melynek elejét és végét összehasonlítva kapjuk a bizonyítani kívánt állítást.

Az itt tárgyalt visszavezetés hasznát különösen akkor tapasztaljuk, midőn a ϱ, σ közül az egyik pl. ϱ könnyen meghatározható, s akkor σ-t a (8) alapján tudjuk keresni.[4]

2. Előfordul, hogy a 3. tételben használt invertálhatósági feltétel nem teljesül, de $\mathcal{G}$ faktorizálható oly módon, hogy az egyes tényező részcsoportokon már alkalmazható a 3. tétel. Ha a tényező $\mathcal{G}_i$ részcsoportoknak van olyan $\mathcal{H}_i$ része, hogy azokon xa invertálható egy x_{I}, illetve x_{II} helyen, akkor felírható

$$xa_i=\varphi_i\pi_i[(\varphi_i^{-1}x)a_i],\qquad x\in X,\ a_i\in\mathcal{G}_i,\ i=\mathrm{I},\mathrm{II},$$

ahol

$$(10)\qquad \pi_i[\pi_i a_i)b_i]=\pi_i(a_ib_i),\qquad \pi_i\xi_i=\xi_i;\ a_i,\ b_i\in\mathcal{G}_i;\ \xi_i\in\mathcal{H}_i.$$

Minthogy bármely $a\in\mathcal{G}$ esetén fennáll az

$$a=a_{I}a_{II}=\alpha_{II}a_{I}$$

felbontás, ezért a következőképpen írható

$$\chi a=\varphi_{II}\pi_{II}\{\varphi_{II}^{-1}\varphi_{I}\pi_{I}[(\varphi_{I}^{-1}x)a_{I}]a_{II}\}=\varphi_{I}\pi_{I}\{\varphi_{I}^{-1}\varphi_{II}\pi_{II}[(\varphi_{II}^{-1}x)\alpha_{II}]\alpha_{I}\},$$

azaz bevezetve a

$$(11)\qquad \varphi_{I}^{-1}[(\varphi_{I}\xi_{I})a]=\xi\circ a,\qquad \varphi_{I}^{-1}\varphi_{II}=\omega,\ (\omega\mathcal{H}_{II}=\mathcal{H})$$

jelöléseket,

$$(12)\qquad \xi_{I}\circ a=\omega\pi_{II}[\omega^{-1}\pi_{I}(\xi_{I}a_{I})a_{II}]=\pi_{I}\{\omega\pi_{II}[(\omega^{-1}\xi_{I})\alpha_{II}]\alpha_{I}\}$$

az X-szel o-izomorf $\mathcal{H}_{I}$ halmazon értelmezett operáció. Igy tehát nyílvánvaló a következő:

6. TÉTEL. *Legyen a $\mathcal{G}_{I}$, $\mathcal{G}_{II}$ részcsoportok szorzatára bontható $\mathcal{G}$ csoport $\mathcal{H}_{I}$, $\mathcal{H}_{II}$ részén legalább egy-egy x_i kelyen*

$$\varphi_i\xi_i=x_i\xi_i,\quad \xi_i\in\mathcal{H}_i,\quad i=\mathrm{I},\mathrm{II}$$

[4] A 4. tételre való tekintettel az 5. tétel azt állítja, hogy a $\mathcal{G}=\mathcal{G}_{I}\mathcal{G}_{II}=\mathcal{G}_{II}\mathcal{G}_{I}$ csoportnak az adott $\mathfrak{N}$ normálosztóval képezett ismétlés nélküli $\mathcal{G}=\mathfrak{T}\mathfrak{N}$ faktorizációjának megkeresése, melynél $\mathfrak{T}$ a $\mathcal{G}$-nek alcsoportja, egyenértékű a hasonló tulajdonságú

$$\mathcal{G}_i=\mathfrak{T}_i\mathfrak{N}_i,\qquad \mathfrak{N}_i=\mathcal{G}_i\cap\mathfrak{N}$$

faktorizációk meghatározásával, melyeknél fennáll $\mathfrak{T}=\mathfrak{T}_{I}\mathfrak{T}_{II}=\mathfrak{T}_{II}\mathfrak{T}_{I}$.

invertálható; akkor az ω-ra felírt (12_2) egyenlet fennállása szükséges és elegendő ahhoz, hogy a vele és a (10)-et kielégítő π_i-vel meghatározott (12_1) alatti $\xi_{\mathrm{I}} \circ a$ operátorművelet legyen, azaz (1') teljesüljön.

Mielőtt a bizonyításra rátérnék, megadjuk a tétel függvényegyenlet megoldási megfogalmazását:

KÖVETKEZMÉNY. Az (1) függvényegyenletnek a kétváltozós $x\alpha$-ra vonatkozó, az invertálhatósági feltételeket kielégítő megoldásának meghatározása egyenértékű a (10), (12) egyváltozós egyenletnek a π_i, ω-ra vonatkozó megoldásával. A megoldást a (11), (12) képlet szolgáltatja,

A 6. tételbeli feltételek szükségességének bizonyítása már az előzőkben megtörtént. Az elégségesség bizonyításához (1) fennállását kell igazolni, vagyis azt kell kimutatni, hogy érvényes

$$(1') \qquad (\xi_{\mathrm{I}} \circ a) \circ b = \xi_{\mathrm{I}} \circ (ab), \qquad \xi_{\mathrm{I}} \in \mathcal{H}_{\mathrm{I}};\ a, b \in \mathcal{G};$$

ebből már a (11_1) szerint fennálló operátor-izomorfizmus miatt következik (1) is. Tekintsök tehát az

$$a = a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}} \quad b = b_{\mathrm{II}} b_{\mathrm{I}} \quad ab = c_{\mathrm{I}} c_{\mathrm{II}}$$

felbontásokat, mellyel (1')-t a következő, vele egyenértékű alakban írhatjuk fel:

$$[\xi_{\mathrm{I}} \circ (a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}})] \circ (b_{\mathrm{II}} b_{\mathrm{I}}) = \xi_{\mathrm{I}} \circ (c_{\mathrm{I}} c_{\mathrm{II}}),$$

$$\pi_{\mathrm{I}}\{\omega \pi_{\mathrm{II}}[\omega^{-1}(\xi_{\mathrm{I}} \circ a) b_{\mathrm{II}}] b_{\mathrm{I}}\} = \omega \pi_{\mathrm{II}}[\omega^{-1} \pi_{\mathrm{I}}(\xi_{\mathrm{I}} c_{\mathrm{I}}) c_{\mathrm{II}}].$$

Minthogy azonban

$$\omega^{-1}(\xi_{\mathrm{I}} \circ a) = \pi_{\mathrm{II}}[\omega^{-1} \pi_{\mathrm{I}}(\xi_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{I}}) a_{\mathrm{II}}],$$

és (12_2) szerint

$$\pi_{\mathrm{II}}\{\omega \pi_{\mathrm{II}}[\omega^{-1} \pi_{\mathrm{I}}(\xi_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{I}}) a_{\mathrm{II}}] b_{\mathrm{II}}\} = \pi_{\mathrm{II}}[\omega^{-1} \pi_{\mathrm{I}}(\xi_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{I}}) a_{\mathrm{II}} b_{\mathrm{II}}],$$

ezért a (10), (9) összefüggés felhasználásával az igazolandó egyenlőség baloldala átalakítható:

$$\pi_{\mathrm{I}}\{\omega \pi_{\mathrm{II}}[\omega^{-1} \pi_{\mathrm{I}}(\xi_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{I}}) a_{\mathrm{II}} b_{\mathrm{II}}] b_{\mathrm{I}}\} = \omega \pi_{\mathrm{II}}\{\omega^{-1} \pi_{\mathrm{I}}[\pi_{\mathrm{I}}[(\xi_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{I}}) a_{\mathrm{I}}^{-1} c_{\mathrm{I}}] c_{\mathrm{II}}\} =$$
$$= \omega \pi_{\mathrm{II}}\{\omega^{-1} \pi_{\mathrm{I}}[\xi_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{I}} (a_{\mathrm{I}}^{-1} c_{\mathrm{I}})] c_{\mathrm{II}}\} = \omega \pi_{\mathrm{II}}[\omega^{-1} \pi_{\mathrm{I}}(\xi_{\mathrm{I}} c_{\mathrm{I}}) c_{\mathrm{II}}].$$

A 6. tételt tehát bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. Ha $\mathcal{H}_i = \mathcal{N}_i$ normálosztó, akkor be lehet vezetni a

$$\pi_i a_i = \chi(a_i^{-1}) a_i$$

összefüggéssel értelmezett χ_i függvényeket, s ezek (6) miatt nyilván endomorfizmusok lesznek:

$$(6') \qquad \chi_i a_i \chi_i b_i = \chi_i (a_i b_i),$$

és (4) helyett a következő módon adják xa-t:

$$\xi_{|} \circ a = \omega\{(\chi_{||} a_{||}^{-1})\omega^{-1}[(\chi_{|} a_{|}^{-1})\xi_{|} a_{|}]a_{||}\} = (\chi_{|}\alpha_{|}^{-1})\omega[(\chi_{||}\alpha_{||}^{-1})(\omega^{-1}\xi_{|})\alpha]\alpha_{|},$$
$$a = a_{|} a_{||} = \alpha_{||}\alpha_{|}.$$

(Beérkezett: 1958. IV. 24.)

Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc
Matematikai Tanszék