

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

RÁDIÓTECHNIKA ÉS SZÁMELMÉLET*

Írta: BALTH. VAN DER POL

Előadásom tárgya két oly tudományág kapcsolata, melyek az első pillanatra talán egymástól teljesen idegennek tűnnek. Nincs is tudomásom arról, hogy az irodalomban e két terület kapcsolatával foglalkoznának. Gondolok egyrészt a szó legtágabb értelmében vett *rádiótechnikára*, arra a témakörre, melyről mindnyájan igen sokat hallottunk, s mellyel személyesen is megismerkedtünk — ha másként nem, hát otthoni rádiókészülékünk használata révén; másrészt a *számelméletre*, mint az ún. tiszta matematika egy részére, mely talán éppen a „legtisztább” matematikai diszciplinának tekinthető. GAUSS-nak — a nagy német matematikusnak — tulajdonítják ezt a megállapítást: „Ha a matematika a tudományok királynője, akkor a számelmélet a matematika királynője”. — A számelmélet nagyrészt a természetes számokkal: 1, 2, 3, ... foglalkozik. E természetes számok mindenféle tulajdonságokban meglepően gazdagok és némelyik rájuk vonatkozó tétel az emberi értelem által eddig elért legmagasabb régiókba tartozik. Ez indította KRONECKERT, egy másik matematikust, a következő kijelentésre: „Az egész számokat Isten teremtette, minden egyéb emberek műve.”

A természetes számokat bizonyos fokig mindnyájan ismerjük; például, mikor reggel koronában és öreben fizetünk a tejesnek, természetes számokkal van dolgunk. De a természetes számok sorozata túllépi a százat, túl a milliót, sőt a legnagyobb számokat is, melyekkel a csillagászatban találkozunk. Így az az anyag, ami a számelmélettel foglalkozók rendelkezésére áll, végtelenbe nyúlik. A természetes számok mindegyike vagy törzsszám (prímszám), vagy összetett szám. (A prímszámok az egységen és önmagukon kívül semmi más egész számmal nem oszthatók.) Az első prímszámok: 2, 3, 5, 7, ..., de törzsszám például

107, 141, 183, 460, 469, 231, 731, 687, 303, 715, 884, 105, 727

is, amely (a tizes számrendben felírva) 39 jegyű szám.

* Ez az előadás a Dán Műszaki Akadémián hangzott el 1953. jan. 20-án abból az alkalomból, hogy a szerzőt — az UNESCO Nemzetközi Rádiózási Tanácsadó Bizottságának (C. C. I. R.; székhelye: Genf, Svájc) igazgatóját — a Valdemar Poulsen-díjjal tüntették ki. Az előadás szövege a *Journal of the Franklin Institute* 255. kötetének 6. számában (1953. jún., 475—495. o.) jelent meg, „Radio Technology and the Theory of Numbers” címmel.

Egy ilyen nagy számnál annak megállapítása, hogy nem összetett, azaz hogy az 1-et kivéve egyetlen nála kisebb természetes számmal sem osztható, — nyilván nem könnyű feladat. És mégis nemrégiben egy amerikai matematikus, Dr. D. H. LEHMER, mikor felkerestem Los Angeles-i matematikai „laboratóriumát“, azt újságolta, hogy ő még nagyobb törzsszámot fedezett fel; bizonyára ez a legnagyobb szám, melyről bizonyosan tudjuk, hogy tényleg prím. Ez a szám

$$2^{1270} - 1,$$

mely a decimális rendszerben felírva 386 jegyű; Dr. LEHMER modern elektronikus számológépének 14 percre volt szüksége e szám meghatározásához, míg egy emberi lény csak mintegy 125 év alatt végezte volna el ugyanazt.¹

Milyen kapcsolat áll fenn mármost a rádiótechnika és a számelmélet között?

Mielőtt erre a kérdésre válaszolnék, szeretnék — még általánosabb értelemben — foglalkozni egyrészt a matematika, másrészt a fizika és a technika között fennálló kapcsolattal. A tudomány története azt mutatja, hogy a matematika jórészt a „tisztá matézis“ művelői révén fejlődött, akik e tudomány szépségének varázslatos hatása alatt álltak; akiket elbűvölt a tárgykör titokzatos általánossága és akik életüket azzal töltötték, hogy új tényeket és összefüggéseket fedeztek fel ezen az igen kiterjedt és csodálatos területen. Hogy eredményeik alkalmazhatók-e az asztronómiában, a fizikában, a kémiában vagy — mondjuk — a technikában, az elsődleges szempontként rendszerint nem érdekelte őket. Fő célkitűzésük arra irányult, hogy tételeiket mind elvontabb és elvontabb esetekre terjesszék ki, és munkásságuknak vezérelve az általánosság volt. Ebben az értelemben veendő Sir BERTRAND RUSSELL angol matematikus és filozófus híres mondása, hogy „egy matematikus sohasem olyan boldog, mint mikor nem ismeri azt, amiről beszél“.

Néhány matematikus oly messzire ment e téren, hogy egyenesen büszke volt arra, ha eredményei a gyakorlatban nem voltak alkalmazhatók. Mondják, hogy egyik nagy matematikus a következő megjegyzést tette: „A Bessel-függvények szép függvények *annak ellenére*, hogy sok alkalmazásuk van.“

A fizika és a technika a tiszta matematikától kétségkívül bizonyos mértékig függetlenül fejlődött. Természetes tehát, hogy a fizikusok és a műszakiak egyszerre csak meglepődve fedezték fel, hogy pontosan azokat a matematikai segédeszközöket és módszereket, amelyekre nekik szükségük van problémáik megoldására, már hiánytalanul kifejlesztették a tiszta matematika művelői,

¹ ERDŐS PÁL szíves információja szerint 1953 óta ugyanazzal a géppel sikerült még nagyobb törzsszámot találni: $(2^{2281} - 1)$ -et. — Természetesen ezek csak „előörsök“: nem ismerjük az összes kisebb prímszámokat. (A fordító megjegyzése.)

akiknek annak idején a legcsekélyebb szándékuk vagy éppen érdeklődésük sem fűződött eredményeik esetleges gyakorlati alkalmazásához.

Előadásom fő célja annak megmutatása, hogy nézetem szerint a fizika és a rádiótechnika oly fejlődési fokozatot ért el, melyben szorosan a számelmülethez tartozó módszerek és eredmények alkalmazhatók — és nagy sikerrel kezdik is azokat alkalmazni — tipikusan fizikai, ill. rádiótechnikai problémák megoldására.

Tudom, hogy némelyik matematikus nem ért egyet ezzel a nézettel. Nem tudom, merjem-e idézni ebben a vonatkozásban G. H. HARDYt, a nagy angol matematikust, mégpedig két okból: először, mivel nagy adósságom van vele szemben mindazért, amit szép matematikai kutatómunkája során, különösen pedig a számelmülethez adott nekünk és másodsor, mert többé már nem tud vitába szállni velem.² Ha tehát megkockáztatom, hogy mégis idézem őt, ezt minden köteles tisztelet kifejezése mellett teszem. — A különben elbűvölő és némelykor egyenesen patetikus (1) esszében,³ melyet nem sokkal halála előtt írt, a következőket mondja (60—61. oldal):

...“ Ha a számelmülethez fel lehetne használni bárminő gyakorlati és nyilvánvalóan tiszteletreméltó célra, ha közvetlenül az emberi boldogság előmozdítására vagy az emberi szenvedés enyhítésére lehetne fordítani, mint a fizioiógiát és a kémiát, akkor bizonyosan sem GAUSS, sem bármelyik más matematikus nem lett volna oly esztelen, hogy kifogásolja az ilyen alkalmazásokat vagy sajnálkozzék ezek miatt. De a tudomány éppen annyira dolgozik a gonosznak, mint a jónak (s persze különösen háborús időben); és megokoltnak tekinthető mind GAUSS, mind kisebb matematikusok öröme afelett, hogy legalább egy tudomány van — s ez az övék —, amelynek a közönséges emberi tevékenységtől való nagyfokú elszakadottsága lehetővé teszi, hogy megőrizték nemesnek és tisztának.”

Egy másik nagy matematikus és számelmülethez-kutató, EDMUND LANDAU ezt írta „standard“ (2) műve első kötetének 21. oldalán: „GORDAN pflegte etwa zu sagen: Die Zahlentheorie ist nützlich, weil man nämlich mit ihr promovieren kann.“⁴

E szempontok helyesek és többé-kevésbé indokoltak lehettek abban az időpontban, amikor íródtak, de az én véleményem az, hogy a fizika és a rádiótechnika olyan fejlődési fokot ért el, hogy területükön igenis nagy sikerrel alkalmazhatók olyan ideák, módszerek és eredmények, amelyek tipikusan a

² Mint ismeretes, HARDY 1947. dec. 1-én meghalt. (A ford. megj.)

³ Zárójelbe tett kövér számok a dolgozat végén levő irodalomjegyzékre utalnak.

⁴ GORDAN szokta mondani: „A számelmülethez hasznos, mert az ember doktori fokozatot szerezhet vele.”

felsőbb számelmélet körébe tartoznak. Hadd adjak önöknek néhány, tézisémet illusztráló példát:

(a) Kocka-alakú kristályok *Röntgen*-spektroszkópiájában észrevették, hogy bizonyos hullámhosszúságú sugarak nem verődnek vissza. Azt találjuk, hogy az előforduló visszaverődések a következő egész számoknak felelnek meg: 1, 2, 3, 4, 5, 6, —, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, —, 16, 17, ..., s kitűnt, hogy a hiányzó n számok $n = 4^k (8m + 7)$ alakúak, ahol k és m pozitív egészek. Mármost a számelmélet azt tanítja, hogy ezek oly számok, melyek nem állíthatók elő három vagy ennél kevesebb négyzetszám összegeként; az idézett tény nyilván

I. TÁBLÁZAT

A természetes számok additív előállítása négy vagy kevesebb négyzetszámmal

1	$= 1^2$
2	$= 1^2 + 1^2$
3	$= 1^2 + 1^2 + 1^2$
4	$= 2^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$
5	$= 2^2 + 1^2$
6	$= 2^2 + 1^2 + 1^2$
7	$= 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$
8	$= 2^2 + 2^2$
9	$= 3^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$
10	$= 3^2 + 1^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$
11	$= 3^2 + 1^2 + 1^2$
12	$= 2^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$
13	$= 3^2 + 2^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$
14	$= 3^2 + 2^2 + 1^2$
15	$= 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$
16	$= 4^2$
17	$= 4^2 + 1^2 = 3^2 + 2^2 + 2^2$
18	$= 3^2 + 3^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2 = 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$
19	$= 3^2 + 3^2 + 1^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$
20	$= 4^2 + 2^2 = 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$
21	$= 4^2 + 2^2 + 1^2$
22	$= 3^2 + 3^2 + 2^2 = 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$
23	$= 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$
24	$= 4^2 + 2^2 + 2^2$
25	$= 5^2 = 4^2 + 3^2 = 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$
26	$= 5^2 + 1^2 = 4^2 + 3^2 + 1^2 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2$
27	$= 3^2 + 3^2 + 3^2 = 5^2 + 1^2 + 1^2 = 4^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$
28	$= 4^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$

szoros kapcsolatba hozható euklideszi terünk három dimenziójával. — A mellékelt I. táblázatban ideiktattam egy rövid listát, mely a 28-ig terjedő természetes számok négy vagy kevesebb négyzetszám összegére való felbontását tartalmazza. Négynél több négyzetszámmra nincs szükség, viszont négy összeadandó feltétlenül szükséges 7, 15, 23, ... esetében, melyek mind a fent említett alakúak.

(b) Egy kristályrács belsejében fellépő potenciálok elmélete (például az ismert *Madelung*-konstans) legjobban az elliptikus theta-függvények felhasználásával vezethető le, amelyek egyúttal az analitikus tárgyalás alapját képezik egész számok négyzetösszegekként való előállításának elméletében. Valóban, a két levezetés teljesen analóg.

(c) A *Planck*-féle sugárzási formulával és az *Einstein*—*Bose*, valamint *Fermi*-féle statisztikákkal kapcsolatosan bizonyos szempontok szorosan összefüggnek $\zeta(s)$ -sel, a *Riemann*-féle zetafüggvénnyel, melynek definíciója:

$$(1) \quad \zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

s amely gyakorlatilag minden, a törzsszámok eloszlására vonatkozó aritmetikai vizsgálat alapja. Ezt a tényt — úgy látszik — olyannyira felismerték az Egyesült Államokban, hogy a háború alatt még a ζ -függvény tulajdonságaira vonatkozó tisztán matematikai kutatásokat is a „biztonsági“ témakörök közé sorolták (NORBERT WIENERTől kapott szóbeli közlés).

(d) Egy másik számelméleti függvény, amely most kezd jelentős szerepet játszani a fizikában, a $p(n)$ partíció-függvény. A következő generátor-függvény segítségével értelmezzük:

$$(2) \quad \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n \quad (|x| < 1).$$

$p(n)$ nem más, mint azoknak a lehetőségeknek a száma, ahányféleképpen az n egész számot fel lehet írni bármilyen pozitív egészek összegeként, ismétlések megengedése mellett. Így például:

$$\begin{aligned} 6 &= 5 + 1 = 4 + 2 = 4 + 1 + 1 = 3 + 3 = 3 + 2 + 1 = \\ &= 3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 1 + 1 = \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \end{aligned}$$

ami tizenegy különböző változatot jelent 6-nak pozitív egészek összegeként való felírására, tehát $p(6) = 11$.

E $p(n)$ partíció-függvény és aszimptotikus viselkedése újabban alkalmazást nyer a fizika különböző részeiben, köztük a kristályok növekedésének

elméletében (3) s felhasználható bizonyos olyan irregularitások megmagyarázására, amelyek kristályok felületén néha fellépnek.

Ezt a néhány példát, amelyekben a modern problémák sikerrel foghatók meg a számelmülethez tartozó módszerekkel és eredményekkel, az elméleti fizika területéről kölcsönöztük.

De a rádiózással kapcsolatban is termékenyen alkalmazható a matematikának ez az egyik legabsztraktabb ága. Hadd szolgáljak Önöknek ismét néhány példával.

(e) Ismeretes, hogy amikor periodikus elektromotoros erő *relaxációs oszcillációt* végző rendszerre hat, ez a rendszer bizonyos körülmények között oly rezgésre kényszerül, amelynek frekvenciája a ható frekvenciának osztója. Ezek a rezgések kiterjedt felhasználására kerülnek a televízióban. Így tehát frekvencia-„demultiplikációval“, azaz *osztással* van dolgunk. — Nos, a számok oszthatóságának problémaköre a számelmületnek egy jellegzetes része és talán éppen legfontosabb fejezeteinek egyike. Nem tűnik valószínűtlennek, hogy itt ismét aritmetikai módszerek segíthetnek megvilágítani e nagy mértékben komplex jelenséget, amelyet gyakran felhasználunk a praxisban. Ugyanakkor számos, különböző nemzetiségű matematikus még folytatja az elméleti kutatásokat a szóbanforgó területen, köztük MARY L. CARTWRIGHT az angliai Cambridge-ben (4).

(f) Hadd adjak mindjárt egy másik, nagyon „klasszikus ízű“ példát: a két vezető gömb közötti kapacitás problémáját. Ennek egyik igen elegáns megoldását Lord KELVIN adta meg 100 évvel ezelőtt az „elektromos képek“ általa kidolgozott elmélete segítségével (5).

Mindamellett talán nem közismert, hogy az a kifejezés, melyet KELVIN kapott a két, kölcsönösen egymáson kívüli, a , ill. b sugarú és c centrum-távolságú gömb közötti $C_{a,b}$ kapacitásra, a következő alakban írható:

$$(3) \quad C_{a,b} = \frac{EI}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ d(n) - d\left(\frac{n}{2}\right) \right\} \alpha^n,$$

ahol

$$\alpha = \frac{E-I}{E+I}$$

és E, I jelenti azon körök közös külső, ill. belső érintőinek hosszát, melyek e gömböknek egy, a középpontjaikon átmenő síkkal való metszése útján adódnak. (3)-ban ott találjuk a $d(n)$ függvényt, a számelmélet egyik jellegzetes függvényét, amely az n szám osztóinak számát adja meg. Hogy egy példát mondjunk: $d(6) = 4$, mivel 6-nak négy (pozitív) osztója van, ti. 1, 2, 3

és 6. Megjegyezzük, hogy a (3)-ban $d\left(\frac{n}{2}\right)$ nullával helyettesítendő bármely

páratlan n -re. Eszerint, (3)-ban néhány tagot explicite kiírva, adódik:

$$(3a) \quad \left\{ C_{a,b} = \frac{EI}{c} \right\} \alpha + \alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4 + 2\alpha^5 + 2\alpha^6 + 2\alpha^7 + \alpha^8 + 3\alpha^9 + \\ + 2\alpha^{10} + 2\alpha^{11} + 4\alpha^{12} + \dots + 2\alpha^{6089} + 16\alpha^{6090} + 2\alpha^{6091} + \dots \}.$$

$C_{a,b}$ (3) vagy (3a) alatti alakjának birtokában, ahol az együtthatók számelméleti jellegűek, felismerhető a probléma analógiája a híres *Dirichlet*-féle problémával. Az utóbbi a $\sum_1^N d(n)$ összeg aszimptotikus viselkedésének meghatározásában áll, $N \rightarrow \infty$ mellett (6).

Tudomásunk szerint a jelenlegi irodalomban nem található semmiféle formula, mely approximatív értéket adna e $C_{a,b}$ kapacitásra, midőn a gömbök nagyon közel vannak egymáshoz, azaz d távolságuk kicsi mindkét sugárhoz képest. Ez esetben α nagyon közel van az egységhez és (3) vagy (3a) sorunk ekkor valóban nagyon lassan konvergál. A (3) kifejezés azonban lehetővé tette számunkra, hogy olyan matematikai módszereket alkalmazzunk, amelyek jellemzőek a számelméletre. Így két egyenlő a sugarú gömb esetén, melyek egymástól kicsi d távolságra vannak, a következő egyszerű kifejezést találtuk a kölcsönös kapacitásra:

$$(4) \quad C_{a,a} \approx \frac{1}{4} a \log \left(\frac{a}{d} \right).$$

A (4) képlet teljes levezetését a Függelék tartalmazza.

Láthatjuk tehát, hogyan használhatók fel a modern számelméletből kölcsönzött analitikus módszerek még egy nagyon klasszikus elektromosságtani problémában is.

(g) De van még egy tipikus — s igen alapvető — rádió-probléma, amelyet sohasem láttam az irodalomban világosan kifejtve, s amely szintén arra vezet bennünket, hogy számelméleti eredményeket használjunk fel.

Tegyük fel, hogy valamely v feszültséget, mely az idő két koszinuszos függvényének szuperpozíciója után áll elő, vagyis amely

$$(5) \quad v = a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t$$

alakú, olyan detektorra alkalmazunk, melynek i karakterisztikája kvadratikusságú függvénye v -nek:

$$(6) \quad i = 2av^2.$$

(5)-nek (6)-ba való helyettesítésével adódik:

$$i = a \{ a^2 (1 + 2 \cos 2\omega_1 t) + b^2 (1 + \cos 2\omega_2 t) + \\ + 2ab [\cos (\omega_1 + \omega_2)t + \cos (\omega_1 - \omega_2)t] \}.$$

E formula világosan mutatja, hogy az áram a következő frekvenciákat „tartalmazza“:

$$0, 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2.$$

Mikor azonban a detektor-karakterisztika olyan, hogy v -nek csak komplikáltabb transzcendens függvényeként állítható elő, mint pl. az ún. „lineáris detekció“ esetében, vagy midőn $i = e^{\beta v}$, akkor az eredő áram frekvenciái közt — ideértve a negatívakat is — általában alapprofrekvenciák minden lineáris kombinációja előfordul, ti.

$$(7) \quad m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Ha továbbá ω_1 és ω_2 kommenzurábilisak, s alkalmas idő-skálát használunk,

(7) helyettesíthető

$$(7a) \quad ma + nb$$

-vel, ahol a és b egész szám. Egészeknek egy ilyen típusú kombinációját a számelméletben „modulus“-nak nevezzük (7) és $[a, b]$ -vel jelöljük. Megjegyezzük, hogy ezzel kapcsolatban FUETER idéz WILHELM FLIEß: „Zum Ablauf des Lebens“ című könyvéből, amelyben utóbbi azt állítja, hogy [23, 28] előállít minden olyan számot, ami az emberi életben fontos. FLIEß megemlíti pl., hogy

$$\begin{aligned} 1 \cdot 28 - 1 \cdot 23 &= 5, \\ 3 \cdot 23 - 2 \cdot 28 &= 13, \\ 5 \cdot 23 - 4 \cdot 28 &= 3, \\ 5 \cdot 28 - 6 \cdot 23 &= 2, \end{aligned}$$

s a kapott 5, 13, 3, 2 számok az emberi életben különösen fontos életkorokat reprezentálnak. Azonban, amint FUETER világosan rámutat, a [23, 28] modulus elemei, vagyis a

$$23n + 28m \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

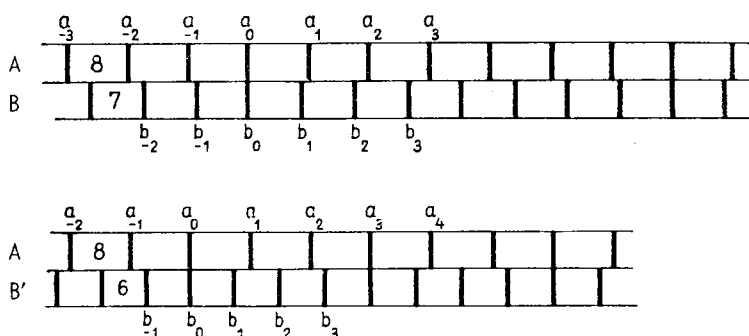
számok valójában minden egész számot „lefednek“ — $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig. Bármely adott egész szám előállítható, ha megtaláljuk a megfelelő (m, n) szempárt.

Ez a helyzet a 23 és 28 bázisok esetében, mivel 23 és 28 legnagyobb közös osztója az egység. Ha viszont pl. a $16n + 20m$ modulust vesszük, akkor a generált számok nyilván 4 összes többszöröse, minthogy 16 és 20 legnagyobb közös osztója 4.

Visszatérve mármost a kombinációs hangokkal kapcsolatos rádió-problémáinkra, az általános elmélet arról tájékoztat bennünket, hogy a (7a) modulus előállítja az a, b számok vagy (az idő-skála alkalmas transzformációjával) az ω_1 és ω_2 legnagyobb közös osztójának összes pozitív és negatív egész-számú többszöröseit. Ennélfogva azok a kombinációs hangok, amelyeket egy transzcendens detektorral nyerünk, mind szabályosan és egyenletesen oszlanak el, egymástól oly frekvencia-távolságra, amely megfelel a és b legnagyobb

közös osztójának, feltéve, hogy ω_1 és ω_2 kommenzurábilisak; különben a kombinációs hangok „mindenütt sűrűek”. Így például előzetesen megállapíthatjuk, hány kombinációs hang lesz található egy adott frekvencia-sávban s ez a szám csak a sáv szélességétől függ, viszont nem függ a sáv helyzetétől a frekvenciaspektrumban.

Az említett tétel, ti. hogy az $ma + nb$ alakú számok, ahol a és b rögzített egészek, míg m és n egymástól függetlenül végig fut az összes pozitív és negatív egész számokon, nem egyebek, mint az a, b számok legnagyobb közös osztójának (egészszámú) többszörösei, alapvető fontosságú a számelméletben. Valóban, két számnak, a -nak és b -nek legnagyobb közös osztóját legjobban úgy definiálhatjuk, mint a (7a) kifejezés legkisebb pozitív értékét, melyet m és n alkalmas megválasztásával kaphatunk meg.



1. és 1a ábra. A kombinációs hangok eloszlásának szemléltetése nóniuszon, amidőn a detektorra két szinuszos rezgést viszünk

Érdeemes itt megjegyezni, hogy a szóbanforgó fundamentális tétel hogyan szemléltethető a technológiában jól ismert nóniusszal. Két lineáris skála segítségével magyarázhatjuk meg a dolgot a legjobban. Az 1. ábrában a két skála egyikét A -val, a másikat B -vel jelöltük. Az A skálán két egymásutáni vonás távolsága: (a_n, a_{n+1}) egyenlő 8 egységgel, míg a B skálán a szukcesszív vonások távolsága: (b_n, b_{n+1}) 7 egység. Mármost először is úgy állítjuk a skálákat, hogy a — tetszés szerint választott — „nulla-vonások” (a_0 és b_0) egy vonalba essenek. Akkor világosan látható, hogy az A skála valamely a_n vonásának a B skála bármely másik b_m vonásától való távolsága éppen $8n - 7m$ egység.

Speciálisan az ábrából világosan látható, hogy

$$a_1 - b_1 = 1 \text{ egység,}$$

$$a_2 - b_2 = 2 \text{ egység,}$$

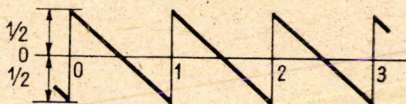
$$a_3 - b_3 = 3 \text{ egység,}$$

.....

úgyhogy ily módon az összes egész számok generálhatók. A legkisebb fel-lépő pozitív távolság (itt 1) 8-nak és 7-nek legnagyobb közös osztója.

Tekintsük ezután az 1a ábrát, ahol ismét van egy A skála, míg a B skálát egy B' skála helyettesíti, melyen a vonások hat egységre vannak egymástól.

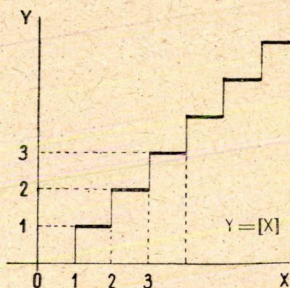
Itt az A és B skálán felvett egy-egy vonás legkisebb távolsága (eltekintve zérustól) 2-vel egyenlő; mint például a_1 és b_1 , vagy b_3 és a_2 között. Az összes többi távolságok 2 többszörösei, amely 8 és 6 legnagyobb közös osztója.



2. ábra. Az $y = Sa(x)$ fűrészfog-függvény

Most utolsó híradástechnikai példánkra térünk.

(h) A 2. ábrán az ún. „fűrészfog“-függvény látható, amelyet $Sa(x)$ -szel jelölünk. A grafikon legnagyobb, ti. $\frac{1}{2}$ ordinátájú pontjai (s egyúttal a legkisebb, $-\frac{1}{2}$ ordinátájúak is) az $x = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ helyekhez tartoznak; a függvény tehát egységnyi ugrást mutat ezekben a pontokban, egyébként pedig (szakaszonként) lineárisan fogyó.



3. ábra. Az $y = [x]$ függvény grafikonja

Ilyen időfüggvényt használnak minden televíziós adóban és vevőben a kép vonalainak és mezőinek periódikus „letapogatására“. Jelentős technikai fejlődést érték el az utóbbi időben alkalmas alakú és viselkedésű fűrészfogfüggvények kísérleti előállítása terén. Ugyanakkor azonban éppen ez az $Sa(x)$ fűrészfog-függvény, melyet oly nagy mértékben alkalmazunk a híradástechnikában, a számelmélet legalapvetőbb függvénye. Ez világossá válik egy igen egyszerű konstrukció segítségével.

Az egész számok grafikus ábrázolásakor a 3. ábrát kapjuk. Ezt a lépcsős függvényt a számelméletben így jelöljük:

$$(8) \quad y = [x].$$

Ha (8)-ból kivonjuk az egyszerű $y = x$ függvényt és hozzáadunk $\frac{1}{2}$ -et, az $Sa(x)$ fűrészfog-függvényt kapjuk:

$$(9) \quad Sa(x) = [x] - x + \frac{1}{2},$$

mely 1 szerint periódikus, azaz

$$\text{Sa}(x+1) = \text{Sa}(x).$$

Ez az $\text{Sa}(x)$ függvény oly alapvető szerepet játszik a számelméletben, hogy nem meglepő, ha valóban lépten-nyomon előfordul. Legyen szabad néhány példát adnom:

Az első a

$$\Pi(x) = \Gamma(x+1)$$

faktoriális-, ill. gammafüggvényre vonatkozó *Stirling*-féle formulával kapcsolatos.

Fennáll a jólismert

$$(10) \quad \Pi(x) = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} e^{\mu(x)} \quad (x > 0)$$

képlet, ahol $\mu(x)$ 0-hoz tart, midőn $x \rightarrow \infty$. Az utóbbi $\mu(x)$ függvény eléggé bonyolult, azonban nagyon elegáns és egyszerű módon fejezhető ki a fűrészfog-függvény segítségével, nevezetesen:

$$(11) \quad \mu(x) = \int_0^{\infty} \frac{\text{Sa}(u)}{u+x} du.$$

De (11) tovább általánosítható, ha bevezetjük a $\zeta(s)$ *Riemann*-féle zeta-függvény *Hurwitz*-féle általánosítását, $\zeta(s, x)$ -et (8). Ennek definíciója a $\text{Re } s > 1$ félsíkban:

$$\zeta(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^s} \quad (\text{Re } s > 1, x > 0),$$

úgyhogy

$$\zeta(s, 1) = \zeta(s).$$

A $\zeta(s, x)$ függvény analitikusan folytatható a $\text{Re } s < 1$ félsíkban és szintén előállítható az $\text{Sa}(x)$ fűrészfog-függvény segítségével a következőképpen:⁵

$$(12) \quad \frac{1}{s} \left\{ \zeta(s, x+1) - \frac{1}{(s-1)x^{s-1}} + \frac{1}{2x^s} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{\text{Sa}(u)}{(u+x)^{s+1}} du$$

($\text{Re } s > -1, x > 0$).

(12) a (11) formula általánosítása, amennyiben $s \rightarrow 0$ esetén az utóbbira redukálódik.

Ha pedig (12)-ben s -et a $-1 < \text{Re } s < 0$ sávra korlátozzuk, x helyébe zérus is tehető és így a *Riemann*-féle zetafüggvényre a következő elegáns kifejezést kapjuk:

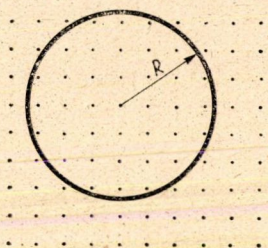
$$(13) \quad \frac{1}{s} \zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{\text{Sa}(u)}{u^{s+1}} du \quad (-1 < \text{Re } s < 0);$$

⁵ (12) baloldalán $s=0$ és $s=1$ esetén a megfelelő határérték veendő. (A ford. megj.)

ez az a függvény, amelynek tanulmányozásához olyan sokkal járult hozzá HARALD BOHR, a nagy dán matematikus, s mely az egész törzsszámelmélet alapja. — A (11), 12 és (13) képlet csupán néhány példa a fűrészfog-függvény előfordulására az analízisben.

Egy másik, tipikusan számelméleti példa a következő:

Tekintsünk egy négyzetes rácspontrendszert (4. ábra), melyben két szomszédos rácspont távolsága egységnyi. Ha egy olyan kört rajzolunk, melynek középpontja egy tetszőleges rácspont, sugara pedig R hosszúságú, akkor a körbe eső rácspontok száma nyilván növekedni fog R növelésekor. A számelméletnek egy klasszikus problémája az R sugarú körbe eső rácspontok számának, $A(R^2)$ -nek a meghatározása. Már első látásra világos, hogy ha R igen nagyvá válik, akkor ez a szám közelítőleg egyenlő a kör területével, azaz $\pi \cdot R^2$ -tel. A korrekció, melyet alkalmaznunk kell, hogy pontos eredményt kapjunk ebből a közelítésből, elegáns módon fejezhető ki a következő, fűrészfog-függvényekből álló sor alakjában, ahol $R = \sqrt{x}$:



4. ábra. A rácspontok száma egy R sugarú kör belsejében

$$\frac{1}{4} \{ A(x) - \pi \cdot x \} = \text{Sa}(x) - \text{Sa}\left(\frac{x}{3}\right) + \text{Sa}\left(\frac{x}{5}\right) - \text{Sa}\left(\frac{x}{7}\right) + \dots$$

Az $\text{Sa}(x)$ fűrészfog-függvénynek olyan tulajdonságai is vannak, amelyek grafikonjából azonnal láthatók. Valóban, a periodikus $\text{Sa}(x)$ függvény bizonyos szempontokból egyszerűbb, mint — mondjuk — a $\sin 2\pi x$ függvény, jöllehet Fourier-sora:

$$(14) \quad \text{Sa}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{2\pi i k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k x}{\pi k}$$

végtelen sok szinusz-tagot tartalmaz.

A szóbanforgó tulajdonságok egyike:

$$(15) \quad \sum_{k=1}^n \text{Sa}\left(x - \frac{k}{n}\right) = \text{Sa}(nx),$$

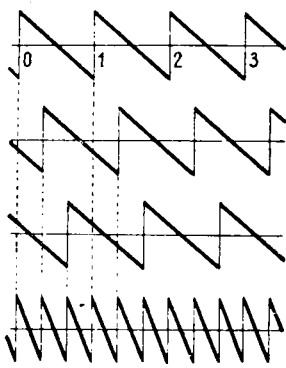
melyet az 5. ábra (az $n=3$ esetben) illusztrál. Szavakban kifejezve ez azt jelenti, hogy n fűrészfog-függvény szuperpozíciója, melyek közül mindegyik $1/n$ fázisdifferenciával van eltolva az előhöz képest, újabb fűrészfog-függvényt szolgáltat, de n -szer akkora frekvenciával. — Ilyen jellegű tulajdonságoknak kétségtelenül vannak alkalmazásai a híradástechnikában.

A fűrészfog-függvénynek vannak más sajátosságai is (l. 6. ábra), melyek kísérleti vonatkozásban használhatók lehetnek, mint pl.:

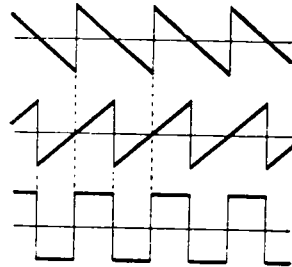
$$(16) \quad \text{Sa}(x) - \text{Sa}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{\text{in}}(2\pi x),$$

ahol $\sum_{\text{in}}(2\pi x)$ azt a „négyzetes szinusz“-függvényt jelöli, mely (-1) -ről $(+1)$ -re „ugrik“ az $x = \dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ pontokban és $(+1)$ -ről (-1) -re az $x = \dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ helyeken, míg a szakadási helyek közötti intervallumokban az 1, ill. -1 konstanssal egyenlő. A következő két alakban is felírható:

$$\sum_{\text{in}}(2\pi x) = \frac{\sin 2\pi x}{|\sin 2\pi x|} = (-1)^{[2x]}.^6$$



5. ábra. Három, rendre $0/3, 1/3, 2/3$ periódussal eltolt fűrészfog-függvény összeadása újabb fűrészfog-függvényt szolgáltat, melynek frekvenciája az eredetinek háromszorosa



6. ábra. Ha egy fűrészfog-függvényből kivonunk egy másik, fél periódussal eltolt fűrészfog-függvényt, egy „négyzetes szinusz“-függvényt kapunk

A függvény tehát bizonyos analógiát mutat a közönséges szinuszfüggvénnyel, eltekintve diszkontinuus viselkedésétől.

Nem nehéz megmutatni (például geometriailag), hogy $\sum_{\text{in}}(2\pi x)$ fűrészfog-függvényekből a következő módon is előállítható (l. 7. ábra):

$$(17) \quad 2 \text{Sa}(x) - \text{Sa}(2x) = \frac{1}{2} \sum_{\text{in}}(2\pi x).$$

Megjegyzendő, hogy (17) (16)-ból és (15)-ből is következik, ha az utóbbiban

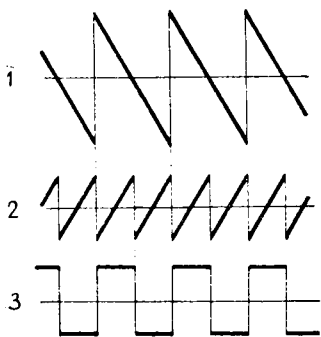
⁶ Mint látható, egyúttal $\sum_{\text{in}}(2\pi x) = \text{sgn}(\sin 2\pi x)$, feltéve, hogy a szakadási helyekhez tartozó függvényértékeket 0-nak vesszük. Ez az ún. Rademacher-féle ortogonális rendszer első tagja. (A ford. megj.)

n -et 2-nek vesszük. A fűrészfog-függvények összes fenti tulajdonságai, sok egyéb tulajdonsággal együtt, könnyen levezethetők az operátorszámítás segítségével (9).

Megmutatható az is, hogy $Sa(x)$ 2^n frekvenciájú „négyzetes szinusz“-függvények szerint sorba fejthető. Valóban:

$$Sa(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum \sin(2^{n+1} \cdot 2\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (-1)^{[2^n x]}.$$

Az $Sa(x)$ fűrészfog-függvénynek ezt a $\sum \sin$ -függvényekből való összetételét illusztrálja a 8. ábra. Legfelül öt „négyzetes szinusz“-függvény található: a, b, c, d és e . Az A grafikon a és b összetétele, míg B a, b, c, d, e szuperpozíciója útján jön létre.



7. ábra. Egy fűrészfog-függvénynek egy másik, kétszer akkora frekvenciájú, de feleakkora amplitúdójú fűrészfog-függvényből való kivonása egy „négyzetes szinusz“-függvényt szolgáltat

$Sa(x)$ ilyen kifejtésének, (14) alatti Fourier-sorával ellentétben, az az érdekes tulajdonsága van, hogy az ún. Gibbs-féle jelenség itt nem lép fel. A 9. ábra a fűrészfog-függvénynek közönséges Fourier-komponensekből (szinuszfüggvényekből) való hasonló összetételét szemlélteti; világosan látható a keletkező Gibbs-féle jelenség: a szakadási helyek közelében fellépő „túl-lengések“.

Nemrég ismertem fel a fűrészfog-függvényre vonatkozó következő függvényegyenleteket (a második az első folyománya):

$$(18) \quad \begin{aligned} Sa(Sa(x)) &= -Sa\left(x + \frac{1}{2}\right), \\ Sa\{Sa(Sa(x))\} &= Sa(x). \end{aligned}$$

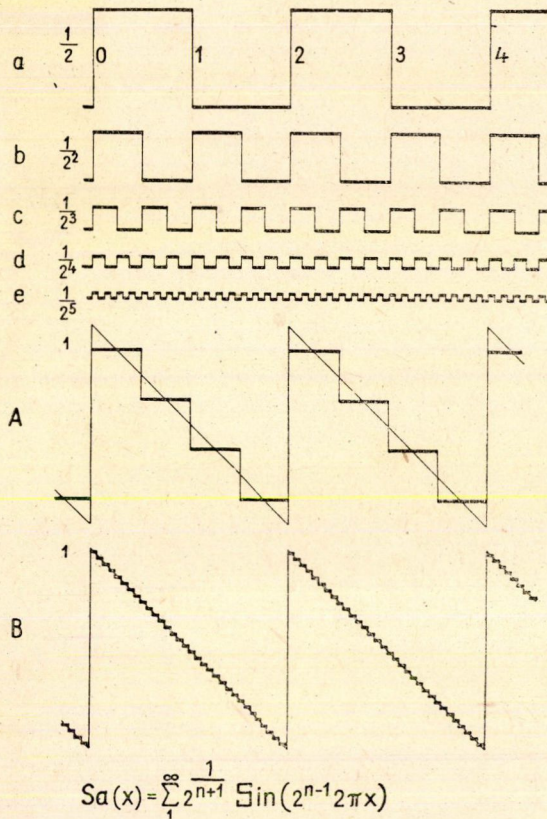
(18) tehát azt mutatja, hogy az $Sa(x)$ függvényt kétszer egymásután önmagára alkalmazva, az eredeti fűrészfog-függvényt kapjuk. Eszerint bármely páratlan számú iteráció mindig reprodukálja $Sa(x)$ -et.

A (15), (16), (17) és (18) alatti relációk mind viszonylag egyszerűek, de sokkal mélyebb, a fűrészfog-függvényt tartalmazó összefüggések is vannak. Például LANDAU (2, II. kötet, 170. lap) bebizonyítja a következő érdekes formulát:

$$(19) \quad \int_0^1 Sa(mx) \cdot Sa(nx) dx = \frac{1}{12} \frac{(m, n)}{\{m, n\}}.$$

Itt m és n két pozitív egész számot jelent, (m, n) ezeknek legnagyobb közös osztója, $\{m, n\}$ pedig m és n legkisebb közös többszöröse.

Ez a fűrészfog-függvény számelméleti előfordulására tipikus és elég mélyen fekvő példa.



8. ábra. Fűrészfog-függvény összetétele „négyzetes szinusz”-függvényekből

Végül, olyan sajátságok, mint a (15), (16), (17) és (19) alattiak tovább általánosíthatók, ha megjegyezzük, hogy $Sa(x)$ azonosítható az első Bernoulli-polinom: $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ negatívjával, amennyiben az utóbbit a $0 < x \leq 1$ intervallumon kívül periodikusan kiterjesztjük.

Tehát fennáll:

$$(20) \quad Sa(x) = -B_1(x - [x]).$$

(A Bernoulli-polinomokat definiálhatjuk generátor-függvénnyel is:

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n.)$$

Így a $B_n(x)$ polinomok ismert tulajdonságai rögtön alkalmazhatók a mi $Sa(x)$ fűrészfog-függvényünkre, s ezek közül néhánynak bizonyos technikai értéke is lehet. A közelmúltban találtam egy formulát, amely általánosítja a Landau-féle relációt. Nem akarom ideiktatni ennek legáltalánosabb alakját, csak a következő speciális esetet:⁷

$$(21) \quad \begin{cases} \int_0^1 B_k(mx - [mx]) \cdot B_k(nx - [nx]) dx = \\ = (-1)^{k+1} \cdot \frac{k! k!}{(2k)!} B_{2k}(0) \left(\frac{(m, n)}{\{m, n\}} \right)^k. \end{cases}$$

E képletben tehát az $(m, n)/\{m, n\}$ viszonyszám valamely k -adik hatványát nyerjük (k pozitív egész) a LANDAU (19) alatti formulájában szereplő első hatvány helyett.

Remélhetőleg a fenti érvek meggyőzőek abból a szempontból, hogy megérett az idő a számelméletben, a matematika talán legelvontabb s legtisztább ágában nyert módszereknek és eredményeknek a fizika és a rádiótechnika területén való alkalmazására.

A magam részéről nem érzem azt, hogy e technikai alkalmazások megfosztanak a számelméletet sokféle szépségtől, „charme“-jától és bonyolult lényegétől. Ellenkezőleg, számos, ma még rejtett tétel és reláció napvilágra kerülhet ily

9. ábra. Egy fűrészfog-függvénynek szinuszfüggvényekből való összetétele a tipikus „túllengést“ mutatja a diszkontinuitásoknál. („Gibbs-féle jelenség“).

módon. Valóban, a fejlődő technika már elérte azt a fokot, amikor jelentős mértékben támogathatja a számelméletet, ma midőn — például — az e és π számokat több mint 2000 tizedesig kiszámították a modern elektronikus számológépek segítségével. Ugyancsak kidolgoznak módszereket és terveket arra, hogy numerikusan vizsgálják — ugyanilyen készülék felhasználásával —

⁷ Vö. M. MIKOLÁS, Farey series and their connection with the prime number problem I., *Acta Sci. Math.* Szeged, 13 (1950), 93—117; Lemma 5. — A diofantikus approximációk elméletébe vágó alkalmazásokat és a Hurwitz-féle zetafüggvényre való általánosítást illetően l.: M. MIKOLÁS, Integral formulae of arithmetical characteristics relating to the zeta-function of Hurwitz, *Publicationes Math.* Debrecen, 5 (1957), 44—53. (A ford. megj.)

a híres *Riemann*-féle sejtést, mely szerint a $\zeta(s)$ függvény minden nem-triviális zérushelye a $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ egyenesen fekszik.⁸ Ez a hipotézis a legnagyobb fontosságú a modern számelmélet szempontjából, és a felsőbb aritmetika számos eredménye lényegesen finomítható volna, ha RIEMANN állítása bizonyítható lenne. A probléma azonban ma még megoldatlan és mindeztideig dacolt a modern analízis legszellemesebb, legkörmönfontabb és legkidolgozottabb módszereivel, még ha a jelenkori matematikusok legnagyobbjai alkalmazták is azokat. A technika — talán hamarosan — döntő járulékokat adhat ezen az igen érdekes területen. Biztosra vehetjük, hogy az egész számelmélet meglehetősen új szemléletet kapna, ha a modern elektronikus módszerekkel sikerülne találni akár csak egyetlen olyan nem-triviális „zeta-gyököt” is, mely — eltérően attól a végtelen sok kritikus sávbeli gyöktől, melynek létezéséről tudunk — *nem* fekszik a $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ egyenesen.

A tiszta matematika művelői és a gyakorlati szakemberek között harmonikus együttműködés van most kialakulóban a számelmélet szempontjából alapvető jelentőségű, messzemenő eredmények elérésére — mint ahogy az sok más tudományágban is megfigyelhető. Jó példa erre az amsterdami Matematikai Centrum, ahol a numerikus osztály — melyet bőven elláttak elektronikus és mechanikai számológépekkel — értékes és ösztönző szolgálatot tesz az absztrakt kutatással foglalkozó más csoportoknak, legyenek azok az intézetben belül vagy azon kívül.

Megítélésem szerint ebben az irányban továbbhaladva nagy haladást reméltünk ezen a majdnem határtalan területen — a számelmélet területén —, amely olyannyira bővelkedik szép összefüggésekben s olyan törvényszerűségeken, melyeknek megfelelőit hiába keressük a matematika más ágaiban.

IRODALOM

- (1) G. H. HARDY: *A Mathematician's Apology*, Cambridge, 1948.
- (2) EDMUND LANDAU: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Leipzig, 1927.
- (3) H. N. V. TEMPERLEY: Statistical Mechanics and the Partition of Numbers, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, Vol. 48, p. 683 (1952).
- (4) M. L. CARTWRIGHT: Non-linear Vibrations: a Chapter in Mathematical History (Matem. Egyes. elnöki székfoglaló előadás), *The Mathematical Gazette*, May 1952, p. 81.

⁸ Azóta a szóbanforgó vizsgálatok már jelentősen előrehaladtak s jelenleg is folynak. Vö. D. H. LEHMER, On the roots of the Riemann zeta-function, *Acta Math.*, 95 (1956), 291—298 — ahol $\zeta(s)$ -nek a $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} s > 0$ félegyenesen levő első tízezer gyökére vonatkozó eredmények vannak röviden ismertetve. (A ford. megj.)

- (5) SIR WILLIAM THOMSON: On the Mutual Attraction or Repulsion Between Two Electrified Spherical Conductors, (1) *Journal de Mathématiques*, 1845, (2) *Phil. Mag.*, April, August, 1853. (Mindkettő újra nyomva a "Papers on Electrostatics and Magnetism" c. gyűjteményben, London, 1872, 86. és 144. o.)
- (6) G. H. HARDY and E. M. WRIGHT: *The Theory of Numbers*, Oxford, 1938, p. 262.
- (7) R. FUETER: *Synthetische Zahlentheorie*, Berlin—Leipzig, 1927, p. 7.
- (8) E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON: *Modern Analysis*, Cambridge, 1935, p. 265.
- (9) BALTH. VAN DER POL and H. BREMMER: *Operational Calculus Based on the Two-Sided Laplace Transform*, Cambridge, 1950.
- (10) J. H. JEANS: *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, Cambridge, 1915, pp. 196—199.

Függelék

Ha a „Kelvin-képek“ segítségével meghatározzuk a két, kölcsönösen egymáson kívüli, a ill. b sugarú, c centrumtávolságú gömb közötti $C_{a,b}$ kapacitást, a számolás eredménye így írható (l. pl. (10)):

$$(1) \quad C_{a,b} = \frac{EI}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1 - \alpha^{2n}} = \frac{EI}{c} h(\alpha),$$

ahol

$$\alpha = \frac{E - I}{E + I},$$

míg

$$E = [c^2 - (a - b)^2]^{\frac{1}{2}}$$

és

$$I = [c^2 - (a + b)^2]^{\frac{1}{2}},$$

ahol E és I egy mindkét gömb középpontján átmenő síkban a főkörök külső ill. belső érintőinek hosszát jelenti.

Ezek után az (1) alatti sor a következőképpen alakítható át:

$$h(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1 - \alpha^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{(2m+1)n},$$

ami rögtön erre a kifejezésre vezet:

$$(2) \quad h(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[d(n) - d\left(\frac{n}{2}\right) \right] \alpha^n;$$

itt $d(n)$ az n szám osztóinak száma (például $d(6) = 4$, mivel 6 összes osztói:

1, 2, 3 és 6) és $d\left(\frac{n}{2}\right)$ nullával helyettesítendő, midőn n páratlan.

A (2) alatti sor szoros kapcsolatban van a híres *Dirichlet*-féle problémával ((6), 262. o.).

Avégből, hogy (2) számára approximációt nyerjünk abban az esetben, mikor a gömbök közötti távolság kicsi a gömbsugarakhoz képest (ami igen kevés 1 alatti α -értéknek felel meg), a következő módon járhatunk el.

Új x változót vezetünk be

$$\alpha = e^{-e^{-x}}$$

helyettesítéssel, úgyhogy (2)-ből

$$(3) \quad h(e^{-e^{-x}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ d(n) - d\left(\frac{n}{2}\right) \right\} e^{-ne^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \left\{ e^{-ne^{-x}} - e^{-2ne^{-x}} \right\}.$$

adódik.

$e^{-e^{-x}}$ -nek kétoldali Laplace-transzformációnál $\Pi(p)$ felel meg ("operational image", vö. (9)); írjuk:

$$e^{-e^{-x}} = \Pi(p) \quad (\operatorname{Re} p > 0),$$

s ennek alapján

$$h(e^{-e^{-x}}) = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \Pi(p) \cdot \zeta^2(p) \quad (\operatorname{Re} p > 1).$$

(3)-nak egy $x \rightarrow \infty$ határátmenethez tartozó közelítő értékét megadja az inverz-integrál reziduuma $p = 1$ -nél:

$$\begin{aligned} h(e^{-e^{-x}}) &\approx \frac{1}{2\pi i} \oint_{p=1} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \frac{\Pi(p)}{p} \zeta^2(p) e^{px} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{p=1} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \frac{\Pi(p)}{p} \left(\frac{1}{p-1} + \gamma + \dots\right) \left(\frac{1}{p-1} + \gamma + \dots\right) e^{px} dp \end{aligned}$$

(itt $\gamma = 0,57722 \dots$ az Euler-konstans), ami $p = 1 + z$ mellett

$$\begin{aligned} &= \frac{e^x}{2\pi i} \oint_{z=0} \left(1 - \frac{1}{2^{z+1}}\right) \Pi(z) \left(\frac{1}{z} + \gamma + \dots\right) \left(\frac{1}{z} + \gamma + \dots\right) e^{zx} dz = \\ &= \frac{e^{2\pi x}}{2\pi i} \oint_{z=0} \frac{1}{2} (1 + z \log 2 + \dots) (1 - \gamma z + \dots) \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2\gamma}{z} + \gamma^2\right) e^{zx} dz. \end{aligned}$$

Az integrandusból csupán a z^{-1} -et tartalmazó tagokat tartva meg, kapjuk:

$$(4) \quad h(e^{-e^{-x}}) \approx \frac{e^x}{2\pi i} \oint_{z=0} \frac{1}{2z} (\gamma + x + \log 2) dz = \frac{e^x}{2} (\gamma + x + \log 2),$$

s ez éppen (3) kívánt aszimptotikus kifejezése $x \rightarrow \infty$ esetére. Visszatérve az

eredeti „geometriai“ változókra — feltételünk $I \ll E$ — adódik:

$$e^{-e^{-x}} = \frac{E-I}{E+I} \approx 1 - \frac{2I}{E};$$

innen

$$e^{-x} = -\log \left(1 - \frac{2I}{E} \right) \approx \frac{2I}{E} \quad \text{vagy} \quad x \approx \log \frac{E}{2I}.$$

Helyettesítsük ezt be (4)-be:

$$h(\alpha) \approx \frac{1}{2} \frac{E}{2I} \left(\gamma + \log \frac{E}{2I} + \log 2 \right) = \frac{E}{4I} \left(\gamma + \log \frac{E}{I} \right);$$

tehát a kapacitás aszimptotikus kifejezése $E \gg I$ mellett (nagyon közeli gömbök esete):

$$(5) \quad C_{a,b} \approx \frac{E^2}{4c} \left(\gamma + \log \frac{E}{I} \right).$$

A jobboldal még tovább egyszerűsíthető, ha bevezetjük a két gömb közötti kis d távolságot:

$$d = c - (a + b);$$

minthogy

$$E^2 \approx 4ab,$$

$$I^2 \approx 2d(a + b),$$

tehát

$$(6) \quad C_{a,b} \approx \frac{ab}{a+b} \left(\gamma + \frac{1}{2} \log \frac{2ab}{d(a+b)} \right).$$

Egyenlő méretű gömbök esetén ($a = b$) (6) a következő alakot ölti:

$$C_{a,a} \approx \frac{a}{2} \left(\gamma + \frac{1}{2} \log \frac{a}{d} \right).$$

Ha pedig a d távolság oly kicsi, hogy még γ -t is elhanyagolhatjuk $\frac{1}{2} \log \frac{a}{d}$ -hez képest, akkor két olyan gömb közötti kapacitásra, melyeknek sugara egyaránt a , s melyeknek (centrálismenti) d távolsága igen kicsi, a következő végső képletet kapjuk:

$$C_{a,a} \approx \frac{1}{4} a \log \left(\frac{a}{d} \right).$$

Fordította: Mikolás Miklós,

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet