

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

GREEN-FÜGGVÉNYRE VONATKOZÓ EGYENLŐTLENSÉGEK*

Irta: D. M. EJDUSZ (Leningrád)

Legyen a háromdimenziós tér korlátos Ω tartományának a határa S . Feltesszük, hogy az S határ λ -kitevőjű *Ljapunov*-felület. Tekintsük a *Laplace*-operátornak az Ω tartományra vonatkozó *Dirichlet*-feladathoz tartozó $G(x, y)$ *Green*-függvényét. Ez

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi r_{xy}} + g(x, y)$$

alakú, ahol r_{xy} az Ω tartomány x és y pontja közötti távolság, $g(x, y)$ pedig a *Green*-függvény reguláris része. A $g(x, y)$ függvény nem korlátos $\Omega \times \Omega$ -ban, érvényes azonban a

$$|g(x, y)| \leq \frac{1}{4\pi r_{xy}}$$

egyenlőtlenség. LEVY [3] cikkében kísérlet történt a $g(x, y)$ deriváltjaira vonatkozó analog egyenlőtlenség bebizonyítására, de az ott közölt megfontolások hibásak. [2] közleményünkben rövidítve ismertettük a

$$(1) \quad |Dg(x, y)| \leq c_1 r_{xy}^{-2}$$

egyenlőtlenség bizonyítását; itt $Dg(x, y)$ az egyik pont bármelyik koordinátája szerint vett első deriváltat, c_1 pedig csak Ω -tól függő állandót jelent (az ilyen állandókat a továbbiakban c_i -vel jelöljük).

A jelen cikk 1. §-ában bebizonyítjuk, hogy a

$$g_1(x, y) = \frac{1}{16\pi^2} \int_S \frac{1}{r_{xt}} \frac{\partial}{\partial n_t} \left(\frac{1}{r_{ty}} \right) dS_t$$

függvény bizonyos értelemben a $g(x, y)$ függvény főrésze. Nevezetesen bebizonyítjuk, hogy $\Omega \times \Omega$ -ban¹ fennállnak a

$$(2) \quad |g_1(x, y)| \leq c_2 r_{xy}^{-1},$$

$$(3) \quad |g(x, y) - g_1(x, y)| \leq c_3 r_{xy}^{\lambda-1}$$

* Математический Сборник 45 (87), (1958) 455—470.

¹ Ω mindig nyílt tartományt jelent.

egyenlőtlenségek, továbbá az első deriváltakra vonatkozó analóg egyenlőtlenségek, amelyekből speciálisan következik (1). A 2. §-ban a másodrendű deriváltakat vizsgáljuk.

Ismertetjük a felhasználandó jelöléseket. A t, x, y, z, u, v, w betűkkel az $\Omega + S$ halmaz pontjait jelöljük. Legyen $f(u)$ az $u \in \Omega$ pont függvénye, akkor $D^k f(x)$ -szel fogjuk jelölni az u pont koordinátái szerint képezett bármelyik k -adrendű derivált értékét az x pontban. Ha $f(u, v)$ két pont függvénye, akkor $D^k f(u, v)$ -vel jelöljük az elől álló u pont koordinátái szerint vett k -adrendű deriváltakat.

Tartozzék a t pont az S felülethez. $S_{t\delta}$ -val fogjuk jelölni S -nek a t középpontú, δ sugarú gömb belsejében fekvő részét. n_t -vel jelöljük S külső normálisát a t pontban, T_t -vel a t pontbeli érintősíkot. Ha t és t_1 az S felület pontjai, ϱ_{tt_1} -gyel jelöljük a t_1 pont n_t -től való távolságát.

q -val fogjuk jelölni a *Ljapunov*-féle gömb sugarát, amelyet oly kicsinynek tételezünk fel, hogy teljesülnek a következő feltételek:

1. Ha t és t_1 az S felület pontjai, továbbá $r_{tt_1} < q$, akkor $r_{tt_1} < 2\varrho_{tt_1}$.

2. Akármilyen $t \in S$ pontot veszünk is, az S felület S_{tq} -ban foglalt bármely S' darabjának a felszíne kisebb, mint az S' felületdarab T_t -re való vetületének kétszeres területe.

3. $S_{t\delta}$ -nak T_t -re való vetülete, — ahol δ tetszésszerű, q -nál nem nagyobb szám — tartalmazza a T_t -ben fekvő, t középpontú, $\frac{1}{2}\delta$ sugarú kört.

A q sugár ilyen megválasztása mindig lehetséges (lásd [1], 16—17. oldal).

Legyen x az Ω tartomány egyik pontja. Akkor $\bar{x}$ -sal fogjuk jelölni az S felület x -hez legközelebb eső pontját. Jegyezzük meg, hogy x rajta van $n_{\bar{x}}$ -on.

m -mel fogjuk jelölni az Ω tartomány átmérőjét. Rögzítsünk egy p számot úgy, hogy $p \geq 3$, $pq \geq m$.

$\sigma_{t\delta}$ -val $\left(t \in S, 0 < \delta < \frac{1}{2}q\right)$ jelöljük S -nek az n_t tengelyű, δ sugarú körhenger által kimetszett és a t pontot tartalmazó részét. $T_{t\delta}$ -val jelöljük $\sigma_{t\delta}$ vetületét T_t -re.

Legyen $\varphi(t, y)$ a $t \in S$, $y \in \Omega + S$ pontok függvénye. Akkor $\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial n_t}$ -vel jelöljük a $\varphi(t, y)$ függvénynek (rögzített y mellett) az n_t irányban vett deriváltját a t helyen. (Természetesen ilyenkor a φ függvénynek értelmezve kell lenni n_t mentén is t -hez eléggé közel.)

Legyen továbbá

$$v_1(t, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_t} \left(\frac{1}{r_{ty}} \right),$$

ahol $t \in S$, $y \in \Omega + S$.

Már megállapodtunk abban, hogy a csak Ω -tól függő állandókat c_i -vel jelöljük. Ha az állandó függhet még valamilyen $a_1, a_2, \dots, a_n$ numerikus paraméterektől is, akkor $c_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -nel fogjuk jelölni. Ezenkívül néha θ -val és k_i -vel is fogunk jelölni állandókat.

1. §.

1. LEMMA. Az x, y pontok tartozzanak $\Omega + S$ -hez, továbbá legyen $0 \leq \alpha < 2$, $0 \leq \beta < 2$. Akkor az

$$F_0(x, y) = \int_S r_{xt}^{-\alpha} r_{yt}^{-\beta} dS_t$$

függvényre fennáll $\alpha + \beta > 2$ esetén az

$$F_0(x, y) \leq c_4(\alpha, \beta) r_{xy}^{2-\alpha-\beta},$$

$\alpha + \beta = 2$ esetén az

$$F_0(x, y) \leq c_5(\alpha, \beta) |\ln r_{xy}|,$$

$\alpha + \beta < 2$ esetén az

$$F_0(x, y) \leq c_6(\alpha, \beta)$$

egyenlőtlenség.

Ha az x, y pontok S -hez tartoznak, akkor ezeknek az egyenlőtlenségeknek a bizonyítása szerepel az [1] könyvben (156—158. o.). A lemma bizonyítása hasonló módon végezhető, ezért elhagyjuk.

2. LEMMA. Legyen $\varphi(t, y)$, ahol $t \in S$, $y \in \Omega$, a t pont folytonos függvénye. Tegyük fel, hogy minden $t \in S$, $y \in \Omega$ pontpárra teljesül a

$$(4) \quad |\varphi(t, y)| \leq k_1 r_{ty}^{-2}$$

egyenlőtlenség, ahol k_1 állandó. Ezenkívül legyen minden $y \in \Omega$ -ra

$$(5) \quad \int_S |\varphi(t, y)| dS_t \leq k_2,$$

ahol k_2 állandó. Akkor az

$$F(x, y) = \int_S r_{xt}^{-\alpha} \varphi(t, y) dS_t$$

függvényre, ahol $0 \leq \alpha < 2$, $x \in \Omega + S$, $y \in \Omega$, fennáll az

$$(6) \quad |F(x, y)| \leq c_7(k_1, k_2, \alpha) r_{xy}^{-\alpha}$$

egyenlőtlenség.

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel, hogy $2pr_{x\bar{x}} < r_{xy}$. Vezessük be a $\Sigma = S_{\bar{x}\delta}$ jelölést, ahol $\delta = p^{-1}r_{xy}$. Így $\delta \leq q$. Legyen $t \in \Sigma$; akkor, mint könnyen látható, $r_{ty} \geq \frac{1}{2}r_{xy}$. (4) folytán

$$\left| \int_{\Sigma} r_{xt}^{-\alpha} \varphi(t, y) dS_t \right| \leq \frac{16\pi k_1}{r_{xy}^2} \int_0^{\delta} \varrho^{1-\alpha} d\varrho = \frac{16\pi k_1 p^{\alpha-2}}{(2-\alpha)r_{xy}^{\alpha}}.$$

Most legyen $t \in S - \Sigma$. Akkor $2pr_{xt} \geq r_{xy}$. Az (5) egyenlőtlenségből kapjuk:

$$\left| \int_{S-\Sigma} r_{xt}^{-\alpha} \varphi(t, y) dS_t \right| \leq k_2 (2p)^{\alpha} r_{xy}^{-\alpha}.$$

Innen következik (6).

Abban az esetben, amikor $2pr_{x\bar{x}} \geq r_{xy}$, a (6) egyenlőtlenség (5)-ből adódik.

3. LEMMA. *Bármely $z \in S$, $z_1 \in S$, $y \in \Omega + S$ ponthármasra, amely eleget tesz az $r_{zz_1} \leq \theta r_{zy}$ ($0 < \theta < 1$) feltételnek, érvényes a*

$$|\tau_1(z, y) - \tau_1(z_1, y)| \leq c_8(\theta)(r_{zy}^{-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda})$$

egyenlőtlenség. Abban a speciális esetben, amikor $y \in S$, teljesül a

$$|\tau_1(z, y) - \tau_1(z_1, y)| \leq c_9(\theta)(r_{zy}^{\lambda-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda})$$

egyenlőtlenség.

E lemma egyszerű bizonyítását elhagyjuk.

4. LEMMA. *Legyen $\varphi(t, y)$, ahol $t \in S$, $y \in \Omega$, a t pont folytonos függvénye és teljesüljön rá a*

$$(7) \quad |\varphi(t, y)| \leq k_3 r_{ty}^{-\alpha}$$

egyenlőtlenség, ahol $0 < \alpha \leq 2$ (ha $\alpha \leq 2$, akkor még feltesszük, hogy fennáll az (5) egyenlőtlenség). Vezessük be a

$$\Phi(z, y) = \int_S \tau_1(z, t) \varphi(t, y) dS_t$$

jelölést. Akkor bármely $z \in S$, $z_1 \in S$, $y \in \Omega$ ponthármasra, amely eleget tesz az $r_{zz_1} \leq \theta r_{zy}$ ($0 < \theta < 1$) feltételnek, érvényes a

$$|\Phi(z, y) - \Phi(z_1, y)| \leq c_{10}(\theta, \alpha, k_3, \lambda')(r_{zy}^{\lambda-1-\alpha} r_{zz_1} + r_{zy}^{-\alpha} r_{zz_1}^{\lambda'})$$

egyenlőtlenség, ahol λ' tetszés szerinti, λ -nál kisebb pozitív szám.²

BIZONYÍTÁS. Legyen $\Sigma_0 = S_{z\delta}$, ahol $\delta = \theta r_{zy}$, továbbá $\Sigma_1 = S_{z\delta_1}$, ahol $\delta_1 = \frac{1}{2}(1 + \theta)r_{zy}$. Akkor

$$\Phi(z, y) = \int_{S-\Sigma_1} \tau_1(z, t) \varphi(t, y) dS_t + \int_{\Sigma_1} \tau_1(z, t) \varphi(t, y) dS_t \equiv \Phi_1(z, y) + \Phi_2(z, y).$$

² $\alpha = 2$ esetén c_{10} függ még k_2 -től is.

Legyen $t \in S - \Sigma_1$; akkor $r_{zz_1} \leq \frac{2\theta}{1+\theta} r_{zt}$. Alkalmazva a z, z_1, t pontokra a 3. lemmát, kapjuk:

$$|\Phi_1(z, y) - \Phi_1(z_1, y)| \leq c_{11}(\theta) \int_{S - \Sigma_1} (r_{zt}^{\lambda-3} r_{zz_1} + r_{zt}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda}) |\varphi(t, y)| dS_t.$$

Innen

$$|\Phi_1(z, y) - \Phi_1(z_1, y)| \leq k_3(c_{12}(\theta) r_{zz_1} r_{zy}^{\lambda+\lambda_1-3} + c_{13}(\theta) r_{zz_1}^{\lambda} r_{zy}^{\lambda_1-2}) \int_S r_{zt}^{-\lambda_1} r_{ty}^{-\alpha} dS_t,$$

ahol $\lambda_1 = 2 - \frac{\alpha}{2}$. Az $\alpha < 2$ esetben az 1. lemma alapján

$$|\Phi_1(z, y) - \Phi_1(z_1, y)| \leq k_3 c_{14}(\theta, \alpha) (r_{zy}^{\lambda-1-\alpha} r_{zz_1} + r_{zy}^{-\alpha} r_{zz_1}^{\lambda}).$$

$\alpha = 2$ esetén az (5) egyenlőtlenségből következik:

$$|\Phi_1(z, y) - \Phi_1(z_1, y)| \leq k_2 c_{15}(\theta) (r_{zy}^{\lambda-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda}).$$

Most legyen $t \in \Sigma_1$; akkor $r_{ty} \geq \frac{1}{2}(1-\theta)r_{zy}$. (7)-ből következik, hogy a $t \in \Sigma_1$ pontokra

$$(8) \quad |\varphi(t, y)| \leq k_3 c_{16}(\theta, \alpha) r_{zy}^{-\alpha}.$$

Vezessük be a

$$\psi(t, y) = \begin{cases} \varphi(t, y) & \text{ha } t \in \Sigma_1 \\ 0 & \text{ha } t \in S - \Sigma_1 \end{cases}$$

jelölést. Akkor

$$\Phi_2(z, y) = \int_S \tau_1(z, t) \psi(t, y) dS_t.$$

[1]-ben be van bizonyítva (77–80. o.), hogy a

$$P(z) = \int_S \tau_1(z, t) \mu(t) dS_t$$

függvényre, ahol $\mu(t)$ az S felületen értelmezett korlátos függvény, teljesül a

$$|P(z) - P(z_1)| \leq c_{17}(\lambda') r_{zz_1}^{\lambda'} \sup_{t \in S} |\mu(t)|$$

egyenlőtlenség, ahol $z \in S, z_1 \in S, 0 < \lambda' < \lambda$. Innen és (8)-ből következik:

$$|\Phi_2(z, y) - \Phi_2(z_1, y)| \leq k_3 c_{18}(\theta, \alpha, \lambda') r_{zy}^{-\alpha} r_{zz_1}^{\lambda'}.$$

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

5. LEMMA. Legyen $\varphi(t, y)$, ahol $t \in S, y \in \Omega$, a t pont folytonos függvénye és teljesüljön rá a (7) egyenlőtlenség valamely $\alpha > 0$ mellett. Tegyük fel, hogy vannak olyan pozitív θ, λ', k_4 állandók ($\theta < 1, \lambda' \leq \lambda$), hogy bármely az $r_{t_1} \leq \theta r_{ty}$ feltételnek eleget tevő $t \in S, t_1 \in S, y \in \Omega$ ponthármasra fennáll a

$$(9) \quad |\varphi(t, y) - \varphi(t_1, y)| \leq k_4 (r_{ty}^{-1-\alpha} r_{t_1} + r_{ty}^{-\lambda-\alpha} r_{t_1}^{\lambda'})$$

egyenlőtlenség. Legyenek az $x \in \Omega$, $y \in \Omega$ pontok olyanok, hogy $2pr_{x\bar{x}} \leq r_{xy}$. Vezessük be a $\sigma_{\bar{x}\delta} = \sigma$ jelölést, ahol $\delta = \frac{\theta}{2p} r_{xy}$. Akkor az

$$F(u) = \int_{\sigma} r_{ut}^{-1} \varphi(t, y) dS_t$$

függvénynek az x pontban vett $DF(x)$ deriváltja eleget tesz a

$$|DF(x)| \leq c_{10}(k_3, k_4, \alpha, \lambda') r_{xy}^{\lambda' - \lambda - \alpha}$$

egyenlőtlenségnek.

BIZONYÍTÁS. Legyen $t \in \sigma$. A $\varphi = \varphi_{\bar{x}t}$ jelölés mellett fennáll $r_{\bar{x}t} \leq 2\varrho$. Innen, felhasználva, hogy $r_{\bar{x}y} \geq \frac{3}{4} r_{xy}$, kapjuk: $r_{\bar{x}t} \leq \theta r_{\bar{x}y}$. Következésképpen

$$(10) \quad |\varphi(\bar{x}, y) - \varphi(t, y)| \leq k_4 c_{20}(\alpha) (r_{xy}^{-\alpha-1} r_{\bar{x}t} + r_{xy}^{-\alpha-\lambda} r_{\bar{x}t}^{\lambda'}).$$

(7)-ből és az $r_{ty} \geq \frac{1}{4} r_{xy}$ egyenlőtlenségből adódik:

$$(11) \quad |\varphi(t, y)| \leq 4^{\alpha} k_3 r_{xy}^{-\alpha}.$$

Becsüljük meg először a $\frac{\partial F(x)}{\partial n}$ deriváltat, ahol n az $n_{\bar{x}}$ normális iránya. Kapjuk:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial n} = \int_{\sigma} \frac{\cos(r_{xt}, n_{\bar{x}}) - \cos(r_{xt}, n_t)}{r_{xt}^2} \varphi(t, y) dS_t + \int_{\sigma} \frac{\cos(r_{xt}, n_t)}{r_{xt}^2} \varphi(t, y) dS_t.$$

[1] 78. oldalán be van bizonyítva a

$$|\cos(r_{xt}, n_{\bar{x}}) - \cos(r_{xt}, n_t)| \leq c_{21} r_{\bar{x}t}^{\lambda}$$

egyenlőtlenség. Ebből és a (11) egyenlőtlenségből következik:

$$\left| \int_{\sigma} \frac{\cos(r_{xt}, n_{\bar{x}}) - \cos(r_{xt}, n_t)}{r_{xt}^2} \varphi(t, y) dS_t \right| \leq c_{22}(k_3, \alpha) r_{xy}^{\lambda - \alpha}.$$

Használjuk fel az

$$(12) \quad \int_S \frac{|\cos(r_{xt}, n_t)|}{r_{xt}^2} dS_t \leq c_{23} \quad (x \in \Omega)$$

egyenlőtlenséget (lásd [1], 275. o.). (11)-ből kapjuk:

$$\left| \int_{\sigma} \frac{\cos(r_{xt}, n_t)}{r_{xt}^2} \varphi(t, y) dS_t \right| \leq 4^{\alpha} k_3 c_{23} r_{xy}^{-\alpha}.$$

Ezzel bebizonyítottuk a

$$\left| \frac{\partial F(x)}{\partial n} \right| \leq c_{24}(k_3, \alpha) r_{xy}^{-\alpha}$$

egyenlőtlenséget.

Becsülnünk kell még az $F(u)$ függvénynek az S felület $\bar{x}$ pontbeli valamely érintője irányában vett deriváltját az x helyen. Jelölje az $\bar{x}$ ponthoz tartozó lokális koordinátarendszer tengelyeit ξ, η, n , ahol a ξ és η tengely az S felület $\bar{x}$ pontbeli érintősíkjában fekszik. Legyenek a $t \in \sigma$ pont koordinátái a lokális rendszerben ξ_0, η_0, n_0 , az u pontéi pedig ξ, η, n . Akkor

$$\frac{\partial F(x)}{\partial \xi} = \int_{\sigma} \frac{\xi_0}{r_{xt}^3} (\varphi(t, y) - \varphi(\bar{x}, y)) dS_t + \varphi(\bar{x}, y) \int_{\sigma} \frac{\xi_0}{r_{xt}^3} dS_t.$$

(10) alapján

$$\left| \int_{\sigma} \frac{\xi_0}{r_{xt}^3} (\varphi(t, y) - \varphi(\bar{x}, y)) dS_t \right| \leq c_{25}(k_4, \alpha, \lambda') r_{xy}^{\lambda' - \lambda - \alpha}.$$

Használjuk fel az [1] 344. oldalán bebizonyított alábbi egyenlőtlenséget:

$$\left| \int_{\sigma_{\bar{x}\delta}} \frac{\xi_0}{r_{xt}^3} dS_t \right| \leq c_{26} \delta^{\lambda},$$

ahol $x \in \Omega$, $2\delta < q$. Kapjuk:

$$\left| \frac{\partial F(x)}{\partial \xi} \right| \leq c_{27}(k_3, k_4, \alpha, \lambda') r_{xy}^{\lambda' - \lambda - \alpha}.$$

A lemmát bebizonyítottuk.

6. LEMMA. Legyen $\varphi(t, y)$, ahol $t \in S$, $y \in \Omega$, a t pont folytonos függvénye és tegyen eleget a következő feltételeknek:

a) Minden $t \in S$, $y \in \Omega$ mellett fennáll a (7) egyenlőtlenség, ahol $0 < \alpha \leq 2$ (ha $\alpha = 2$, akkor még feltesszük, hogy minden $y \in \Omega$ pontra teljesül (5)).

b) Vannak olyan pozitív θ, λ', k_4 állandók ($\theta < 1$, $\lambda' \leq \lambda$), hogy bármely az $r_{t_1} \leq \theta r_{ty}$ feltételnek eleget tevő $t \in S$, $t_1 \in S$, $y \in \Omega$ ponthármasra fennáll a (9) egyenlőtlenség.

Akkor az

$$F(x, y) = \int_S r_{xt}^{-1} \varphi(t, y) dS_t \quad (x \in \Omega, y \in \Omega)$$

függvény $DF(x, y)$ deriváltjaira érvényes a

$$|DF(x, y)| \leq c_{28}(k_2, k_3, k_4, \alpha, \lambda', \theta) r_{xy}^{\lambda' - \lambda - \alpha}$$

egyenlőtlenség.

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel, hogy $2pr_{x\bar{x}} > r_{xy}$. Abban az esetben, amikor $\alpha = 2$, (5)-ből következik:

$$|DF(x, y)| \leq 4p^2 k_2 r_{xy}^{-\alpha}.$$

Az $\alpha < 2$ esetben vezessük be a $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ jelölést. Akkor (7)-ből és az 1. lemmából adódik:

$$|DF(x, y)| \leq k_3 r_{x\bar{x}}^{-\beta} \int_S r_{xt}^{\beta-2} r_{ty}^{-\alpha} dS_t \leq (2p)^{\frac{\alpha}{2}} k_3 c_{20}(\alpha) r_{xy}^{-\alpha}.$$

Legyen most $2pr_{x\bar{x}} \leq r_{xy}$. Az $F(u, y)$ függvényt két részre bontjuk:

$$F(u, y) = \int_{\sigma} \frac{\varphi(t, y)}{r_{ut}} dS_t + \int_{S-\sigma} \frac{\varphi(t, y)}{r_{ut}} dS_t \equiv F_1(u, y) + F_2(u, y),$$

ahol u az Ω tartomány tetszés szerinti pontja, $\sigma = \sigma_{\bar{x}\delta}$, $\delta = \frac{\theta}{2p} r_{xy}$. Az 5. lemma szerint

$$|DF_1(x, y)| \leq c_{19}(k_3, k_4, \alpha, \lambda') r_{xy}^{\lambda' - \lambda - \alpha}.$$

Továbbá ha $t \in S - \sigma$, akkor $r_{xt} \geq \delta$. Így, a $2pr_{x\bar{x}} > r_{xy}$ esethez hasonlóan, kapjuk a

$$|DF_2(x, y)| \leq c_{30}(k_2, k_3, \alpha, \theta) r_{xy}^{-\alpha}$$

egyenlőtlenséget. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

1. TÉTEL. $\Omega \times \Omega$ -ban érvényes (2) és (3)³, valamint a következő egyenlőtlenségek:

$$(13) \quad |Dg_1(x, y)| \leq c_{31} r_{xy}^{-2},$$

$$(14) \quad |D(g - g_1)| \leq c_{32}(\lambda') r_{xy}^{\lambda' - 2},$$

ahol λ' tetszés szerinti, λ -nál kisebb szám.

BIZONYÍTÁS. Tartozzék az x és y pont Ω -hoz. Akkor

$$(15) \quad g(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r_{xt}} \frac{\partial G(t, y)}{\partial n_t} dS_t.$$

Innen

$$(16) \quad G(x, y) = \frac{1}{4\pi r_{xy}} + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r_{xt}} \frac{\partial G(t, y)}{\partial n_t} dS_t.$$

³ Ha $\lambda = 1$, akkor a (3) egyenlőtlenséget a következőképpen kell írni:

$$|g - g_1| \leq c_3(\varepsilon) r_{xy}^{-\varepsilon},$$

ahol ε tetszés szerinti pozitív szám.

Legyen z az S felület pontja; akkor (16)-ból következik:

$$(17) \quad \frac{\partial G(z, y)}{\partial n_z} = \tau_1(z, y) + \int_S \tau_1(z, t) \frac{\partial G(t, y)}{\partial n_t} dS_t.$$

Legyen

$$\tau_{i+1}(z, u) = \int_S \tau_i(z, t) \tau_1(t, u) dS_t,$$

ahol $z \in S$, $u \in \Omega + S$. (17) ismételt alkalmazásával kapjuk:

$$(18) \quad \frac{\partial G(z, y)}{\partial n_z} = \sum_{i=1}^l \tau_i(z, y) + \int_S \tau_l(z, t) \frac{\partial G(t, y)}{\partial n_t} dS_t,$$

ahol l -et úgy választjuk, hogy $l = \left\lfloor \frac{2}{\lambda} \right\rfloor + 1$. Az 1. lemma értelmében minden $z \in S$, $t \in S$ pontpárra érvényes a

$$(19) \quad |\tau_l(z, t)| \leq c_{33}$$

egyenlőtlenség. A (12) egyenlőtlenséget átírhatjuk a következőképpen:

$$(20) \quad \int_S |\tau_1(t, y)| dS_t \leq c_{34}.$$

(20)-ból az 1. és 2. lemma alapján következik:

$$(21) \quad \left| \sum_{i=1}^l \tau_i(z, y) \right| \leq c_{35} r_{zy}^{-2}.$$

Az ismert $\frac{\partial G(z, y)}{\partial n_z} \leq 0$ egyenlőtlenség értelmében

$$(22) \quad \int_S \left| \frac{\partial G(t, y)}{\partial n_t} \right| dS_t = 1.$$

(18)-ből (21), (19) és (22) segítségével kapjuk:

$$(23) \quad \left| \frac{\partial G(z, y)}{\partial n_z} \right| \leq c_{36} r_{zy}^{-2}.$$

(15)-ből és (17)-ből adódik:

$$g(x, y) = g_1(x, y) + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r_{xz}} \varphi_0(z, y) dS_z,$$

ahol

$$\varphi_0(z, y) = \int_S \tau_1(z, t) \frac{\partial G(t, y)}{\partial n_t} dS_t,$$

$$g_1(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r_{xt}} \tau_1(t, y) dS_t.$$

(20)-ból és a 2. lemmából következik a (2) egyenlőtlenség, a 3. és 6. lemmából pedig a (13) egyenlőtlenség. Becsülnünk kell még a

$$(24) \quad \Phi_0(x, y) \equiv g(x, y) - g_1(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r_{xz}} \varphi_0(z, y) dS_z$$

függvényt. (22)-ből és (23)-ból a 2. lemma segítségével kapjuk:

$$(25) \quad |\varphi_0(z, y)| \leq c_{27} r_{zy}^{\lambda-2},$$

ahol $z \in S$, $y \in \Omega$, ebből pedig az 1. lemma értelmében következik (3).

(22) és (23) szerint a $\varphi_0(z, y)$ függvényre alkalmazható a 4. lemma.

Ebből a lemmából adódik, hogy bármely, egymással az $r_{zz_1} \leq \frac{1}{2} r_{zy}$ feltétel útján összekapcsolt $z \in S$, $z_1 \in S$, $y \in \Omega$ ponthármasra fennáll a

$$(26) \quad |\varphi_0(z, y) - \varphi_0(z_1, y)| \leq c_{38}(\lambda')(r_{zy}^{\lambda-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda'})$$

egyenlőtlenség. (25)-ből és (26)-ból adódik, hogy a $\Phi_0(x, y)$ függvényre alkalmazható a 6. lemma az $\alpha = 2 - \lambda$ választással. Ebből a lemmából következik (14).

A tételt bebizonyítottuk.

2. §.

Ebben a paragrafusban feltesszük, hogy az S felület az L_2 osztályba tartozik valamilyen $\lambda < 1$ kitevő mellett (az L_2 osztály definícióját lásd [1] 120. oldalán). Minden ilyen tulajdonságú felület 1 kitevőjű *Ljapunov*-felület. Legyen $\varphi(t)$ a $t \in S$ pont folytonosan differenciálható függvénye. $\bar{D}_i \varphi(t)$ -vel ($i = 1, 2, 3$) fogjuk jelölni a $\varphi(t)$ függvény felületi gradiensének vetületeit a rögzített x_1, x_2, x_3 tengelyekre. Ha $\varphi(t, u)$ a $t \in S$, $u \in \Omega + S$ pontpár függvénye, akkor $\bar{D}_i \varphi(t, u)$ -val jelöljük a $\varphi(t, u)$ függvény felületi gradiensének vetületeit, miközben a második helyen álló u pont rögzített.

7. LEMMA. Ha $z \in S$, $y \in \Omega + S$, akkor fennáll a

$$|\bar{D}_i \tau_1(z, y)| \leq c_{39} r_{zy}^{-3}$$

egyenlőtlenség. Ha speciálisan $y \in S$, akkor

$$|\bar{D}_i \tau_1(z, y)| \leq c_{40} r_{zy}^{-2}.$$

Azonkívül bármely, az $r_{zz_1} \leq \theta r_{zy}$ ($0 < \theta < 1$) feltételt kielégítő $z \in S$, $z_1 \in S$, $y \in \Omega + S$ ponthármasra érvényes a

$$|\bar{D}_i \tau_1(z, y) - \bar{D}_i \tau_1(z_1, y)| \leq c_{41}(\theta)(r_{zy}^{-4} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda})$$

egyenlőtlenség. Ha speciálisan $y \in S$, akkor

$$|\bar{D}_i \tau_1(z, y) - \bar{D}_i \tau_1(z_1, y)| \leq c_{42}(\theta)(r_{zy}^{-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^\lambda).$$

Ennek a lemmának az elemi bizonyítását elhagyjuk.

8. LEMMA.⁴ Legyen valamely $\sigma_{z\delta}$ ($z \in S$, $2\delta < q$) tartományban értelmezve egy $\varphi(t)$ függvény, amelyre teljesülnek a

$$(27) \quad |\varphi(i)| \leq k'_0,$$

$$(28) \quad |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq \sum_{i=1}^n k'_i r_{ti}^{\alpha_i}$$

egyenlőtlenségek, ahol $t \in \sigma_{z\delta}$, $t' \in \sigma_{z\delta}$, k'_i és α_i pozitív állandók, $\alpha_i \leq 1$. Akkor az

$$F(v) = \int_{\sigma_{z\delta}} \tau_1(v, t) \varphi(t) dS_t$$

függvény, ahol $v \in \sigma_{z\delta}$, differenciálható S mentén, és tetszés szerinti v, v' pontokra, amelyek $\sigma_{z\delta}$ -hez tartoznak ($\delta_1 = \theta\delta$, $\theta < 1$), érvényesek a

$$(29) \quad |\bar{D}_i F(v)| \leq k'_0 c_{32}(\theta) + \sum_{i=1}^n k'_i \delta^{\alpha_i} c_{44}(\alpha_i),$$

$$(30) \quad |\bar{D}_i F(v) - \bar{D}_i F(v')| \leq k'_0 c_{45}(\theta, \varepsilon_0)(\gamma \delta^{-1} + \gamma^\lambda + \gamma^{\lambda - \varepsilon_0} \delta^{\varepsilon_0}) + \\ + \sum_{i=1}^n k'_i c_{46}(\theta, \alpha_i, \varepsilon_i)(\gamma^\lambda \delta^{\alpha_i} + \gamma^{\alpha_i} + \gamma^{\alpha_i - \varepsilon_i} \delta^{\varepsilon_i})$$

egyenlőtlenségek, ahol $\gamma = r_{vv'}$, az ε_i -k pedig tetszés szerinti pozitív állandók.

BIZONYÍTÁS. Legyenek ξ, η , n lokális koordináták a z pontban, ahol az n tengely n_z -vel megegyező irányítású. Ekkor a $\sigma_{z\delta}$ felületdarab egyenlete $n = f(\xi, \eta)$ alakú lesz, ahol az $f(\xi, \eta)$ függvény másodrendű deriváltjai λ kitevőjű Lipschitz-feltételnek tesznek eleget $T_{z\delta}$ -ban. Jelölje (v_1, v_2, v_3) a v pont, (t_1, t_2, t_3) pedig a t pont koordinátáit a lokális rendszerben. Legyen $w(v_1, v_2)$ a v pont, $u(t_1, t_2)$ a t pont T_z -re való vetülete. Akkor (lásd [1], 389. oldal)

$$(31) \quad F(v) = \Phi(w) \cos(n_v, n_z),$$

ahol

$$\Phi(w) = \int_{T_{z\delta}} Q(w, u) \psi(u) du.$$

Itt

$$\psi(u) = \sqrt{1 + [f'_\xi(t_1, t_2)]^2 + [f'_\eta(t_1, t_2)]^2} \varphi(t), \quad du = dt_1 dt_2, \\ Q(w, u) = \frac{f(t_1, t_2) - f(v_1, v_2) - (t_1 - v_1)f'_\xi(v_1, v_2) - (t_2 - v_2)f'_\eta(v_1, v_2)}{[(t_1 - v_1)^2 + (t_2 - v_2)^2 + (f(t_1, t_2) - f(v_1, v_2))^2]^{3/2}}.$$

⁴ H. L. SZMOLICKIJ bebizonyított egy tételt ([1], 373. oldal), amelynek analogonja a 8. lemma. A bizonyításnál felhasználjuk H. L. SZMOLICKIJ módszerét.

Legyen $u \in T_{z\delta}$, $u' \in T_{z\delta}$. Akkor az $\alpha_0 = 1$ jelölés mellett fennáll

$$(32) \quad |\psi(u)| \leq c_{47} k'_0,$$

$$(33) \quad |\psi(u) - \psi(u')| \leq c_{48} \sum_{i=0}^n k'_i r_{uu'}^{\alpha_i}.$$

Tekintsük először a

$$H(w) = \int_{T_{z\delta}} Q(w, u) du$$

függvényt, ahol $w \in T_{z\delta}$, és végezzük el a

$$t_1 = v_1 + \varrho \cos \omega, \quad t_2 = v_2 + \varrho \sin \omega$$

helyettesítést. Akkor

$$H(w) = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{l(v_1, v_2, \omega)} \tilde{R}(v_1, v_2, \varrho, \omega) d\varrho,$$

ahol

$$l(v_1, v_2, \omega) = \sqrt{(v_1 \cos \omega + v_2 \sin \omega)^2 + \delta^2 - v_1^2 - v_2^2} - (v_1 \cos \omega + v_2 \sin \omega).$$

Legyen $0 \leq \omega \leq 2\pi$, $0 \leq \varrho \leq l$; akkor, mint könnyen bizonyítható,

$$(34) \quad \begin{aligned} |\tilde{R}| &\leq c_{49}, \\ \left| \frac{\partial \tilde{R}}{\partial v_j} \right| &\leq c_{50} \varrho^{\lambda-1}, \end{aligned}$$

ahol $j = 1, 2$. Ezen egyenlőtlenségek segítségével bebizonyítható a

$$\frac{\partial H}{\partial v_j} = \int_0^{2\pi} \tilde{R}(v_1, v_2, l, \omega) \frac{\partial l}{\partial v_j} d\omega + \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^l \frac{\partial \tilde{R}}{\partial v_j} d\varrho \equiv H_{j1}(w) + H_{j2}(w)$$

egyenlőség.⁵ Legyen $w \in T_{z\delta}$; akkor $\left| \frac{\partial l}{\partial v_i} \right| \leq c_{51}(\theta)$, $\left| \frac{\partial^2 l}{\partial v_i \partial v_j} \right| \leq \frac{c_{52}(\theta)}{\delta}$, $l \geq (1-\theta)\delta$.

Innen következik, hogy $T_{z\delta}$ -ben

$$(35) \quad |H_{j1}(w)| \leq c_{53}(\theta),$$

$$(36) \quad \left| \frac{\partial H_{j1}}{\partial v_i} \right| \leq \frac{c_{54}(\theta)}{\delta},$$

ahol $i, j = 1, 2$. (34) folytán $T_{z\delta}$ -ban

$$(37) \quad |H_{j2}(w)| \leq c_{55} \delta^\lambda.$$

Becsüljük meg a H_{j2} függvény növekményét $T_{z\delta}$ -ban. Legyen $w, w' \in T_{z\delta}$.

⁵ Lásd az analóg megfontolást [1] 382. oldalán.

Vezessük be az

$$r_{uv} = \varrho, \quad r_{uw'} = \varrho', \quad r_{vw'} = \gamma_0, \quad \frac{\partial \tilde{R}}{\partial v_i} = R_i(v_1, v_2, t_1, t_2) \equiv R_i(w; u)$$

jelöléseket. Jelöljük T' -vel azon $u \in T_{z\delta}$ pontok összességét, amelyekre $\varrho > 2\gamma_0$. Legyen $u \in T'$, akkor, mint ismeretes ([1], 390. oldal),

$$(38) \quad \left| \frac{R_i(w, u)}{\varrho} - \frac{R_i(w', u)}{\varrho'} \right| \leq c_{56} \varrho^{-3} (\gamma_0^{1+\lambda} + \varrho \gamma_0^\lambda + \varrho^\lambda \gamma_0).$$

(34) és (38) segítségével kapjuk:

$$(39) \quad |H_{j2}(w) - H_{j2}(w')| \leq c_{57} \gamma_0^\lambda \left(1 + \left| \ln \frac{\delta}{\gamma_0} \right| \right).$$

(35), (37), (36), (39)-ből következik, hogy $T_{z\delta_1}$ -ben érvényesek a

$$(40) \quad \left| \frac{\partial H}{\partial v_j} \right| \leq c_{58}(\theta),$$

$$(41) \quad \left| \frac{\partial H(w)}{\partial v_j} - \frac{\partial H(w')}{\partial v_j} \right| \leq \frac{c_{54}(\theta)}{\delta} \gamma_0 + c_{57} \gamma_0^\lambda \left(1 + \left| \ln \frac{\delta}{\gamma_0} \right| \right)$$

egyenlőtlenségek.

Tekintsük a $\Phi(w)$ függvényt. Vezessük be az

$$\tilde{R}(v_1, v_2, \varrho, w) = R(v_1, v_2, t_1, t_2) \equiv R(w, u)$$

jelölést. Akkor $\varrho Q(w, u) = R(w, u)$. Nem nehéz bebizonyítani a $T_{z\delta}$ -ban érvényes

$$(42) \quad \left| \frac{R}{\varrho} \right| \leq \frac{c_{59}}{\varrho},$$

$$(43) \quad \left| \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{R}{\varrho} \right| \leq \frac{c_{60}}{\varrho^2}$$

egyenlőtlenségeket. Legyen $w, w' \in T_{z\delta}$, $u \in T'$. Akkor, mint ismeretes ([1], 390. oldal),

$$(44) \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial v_i} \frac{R}{\varrho} \right)_w - \left(\frac{\partial}{\partial v_i} \frac{R}{\varrho} \right)_{w'} \right| \leq c_{61} (\gamma_0 \varrho^{-3} + \gamma_0^\lambda \varrho^{-2}).$$

A (33), (42), (43), (44) egyenlőtlenségekből következik⁶ a

$$(45) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} = \psi(w) \frac{\partial H}{\partial v_j} + I_j(w)$$

⁶ Lásd az analóg megfontolást [1] 385–387. oldalán.

összefüggés, ahol

$$I_j(w) = \int_{T_{z\delta}} (\psi(u) - \psi(w)) \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{R}{\varrho} \right) du.$$

(33)-ból és (43)-ból adódik, hogy $T_{z\delta}$ -ban

$$(46) \quad |I_j(w)| \leq c_{62} \sum_{i=0}^n \frac{k'_i \delta^{\alpha_i}}{\alpha_i}.$$

Legyen $w, w' \in T_{z\delta}$. (33), (44), (43) segítségével kapjuk (lásd [1], 387. oldal):

$$(47) \quad |I_j(w) - I_j(w')| \leq \sum_{i=0}^n k_i c_{63}(\alpha_i) \left(\gamma_0^{\alpha_i} + \gamma_0^{\alpha_i} \left| \ln \frac{\delta}{\gamma_0} \right| + \gamma_0^{\lambda} \delta^{\alpha_i} \right).$$

A (32), (33), (40), (41), (45), (46) és (47) egyenlőtlenségekből adódik (29) és (30).

9. LEMMA. Legyen $\varphi(t, y)$, ahol $t \in S$, $y \in \Omega$, a t pont folytonos függvénye és teljesüljenek rá az alábbi feltételek:

a) Minden $t \in S$, $y \in \Omega$ pontpárra fennáll (4). Azonkívül minden $y \in \Omega$ -ra érvényes (5).

b) Vannak olyan θ és k_5 állandók, hogy bármely az $r_{ti} \leq \theta r_{ty}$ feltételnek eleget tevő $t \in S$, $t_1 \in S$, $y \in \Omega$ ponthármasra fennáll a

$$|\varphi(t, y) - \varphi(t_1, y)| \leq k_5 (r_{ty}^{-2} r_{ti} + r_{ty}^{-2} r_{ti}^{\lambda})$$

egyenlőtlenség. Vezessük be a

$$\Phi(z, y) = \int_S \tau_1(z, t) \varphi(t, y) dS, \quad (z \in S)$$

jelölést. Akkor minden $z \in S$, $y \in \Omega$ és $i = 1, 2, 3$ mellett teljesül a

$$(48) \quad |\bar{D}_i \Phi(z, y)| \leq c_{64}(k_1, k_2, k_5, \theta) r_{zy}^{-2}$$

egyenlőtlenség. Azonkívül létezik olyan pozitív $\theta_0(\theta) < 1$ szám, hogy bármely az $r_{zz_1} \leq \theta_0 r_{zy}$ feltétel kielégítő $z \in S$, $z_1 \in S$, $y \in \Omega$ ponthármasra fennáll a

$$(49) \quad |\bar{D}_i \Phi(z, y) - \bar{D}_i \Phi(z_1, y)| \leq c_{65}(k_1, k_2, k_5, \theta, \lambda') (r_{zy}^{-2} r_{zz_1} + r_{zy}^{-\lambda-2} r_{zz_1}^{\lambda'})$$

egyenlőtlenség, ahol λ' tetszős szerinti, λ -nál kisebb szám.

BIZONYÍTÁS. Válasszuk a $\theta_1 > 0$ számot olyan kicsinek, hogy fennálljanak a $2\theta_1 m < q$, $4\theta_1 < \theta(1 - 2\theta_1)$ egyenlőtlenségek. Vezessük be a $\sigma' = \sigma_{z\delta_1}$, $\sigma'' = \sigma_{z\delta_2}$ jelöléseket, ahol z az S felület egyik pontja, $\delta_1 = \theta_1 r_{zy}$, $\delta_2 = \frac{1}{4} \delta_1$. Legyen u tetszős szerinti pont S -en. Akkor

$$\Phi(u, y) = \int_{S-\sigma'} \tau_1(u, t) \varphi(t, y) dS + \int_{\sigma'} \tau_1(u, t) \varphi(t, y) dS \equiv \Phi_1(u, y) + \Phi_2(u, y).$$

Legyen $t \in S - \sigma'$, $z_1 \in \sigma''$. Akkor $r_{zt} \geq \theta_1 r_{zy}$, $r_{zz_1} \leq \frac{1}{2} r_{zt}$. Innen és (5)-ből a 7. lemma értelmében adódnak a

$$(50) \quad |\bar{D}_i \Phi_1(z, y)| \leq c_{66} k_2 \theta_1^{-2} r_{zy}^{-2}.$$

$$(51) \quad |\bar{D}_i \Phi_1(z, y) - \bar{D}_i \Phi_1(z_1, y)| \leq c_{67} k_2 (\theta_1^{-3} r_{zy}^{-3} r_{zz_1} + \theta_1^{-2} r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^\lambda)$$

egyenlőtlenségek. Most legyen $t \in \sigma'$, $t_1 \in \sigma'$. Akkor $r_{ty} \geq (1 - 2\theta_1) r_{zy}$, $r_{tt_1} \leq \theta r_{ty}$, ahonnan

$$|\varphi(t, y)| \leq k_1 (1 - 2\theta_1)^{-2} r_{zy}^{-2},$$

$$|\varphi(t, y) - \varphi(t_1, y)| \leq k_5 (1 - 2\theta_1)^{-3} (r_{zy}^{-3} r_{tt_1} + r_{zy}^{-2} r_{tt_1}^\lambda).$$

A 8. lemma értelmében ezekből az egyenlőtlenségekből következik:

$$(52) \quad |\bar{D}_i \Phi_2(z, y)| \leq c_{68} (k_1, k_5) r_{zy}^{-2},$$

$$(53) \quad |\bar{D}_i \Phi_2(z, y) - \bar{D}_i \Phi_2(z_1, y)| \leq c_{69} (k_1, k_5, \theta, \lambda') (r_{zy}^{-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2-\lambda'} r_{zz_1}^{\lambda'}),$$

ahol $z_1 \in \sigma''$. (50)-ből és (52)-ből adódik (48). Vezessük be a $\theta_0(\theta) = \frac{1}{4} \theta_1$ jelölést. Akkor azok a $z_1 \in S$ pontok, amelyekre teljesül az $r_{zz_1} \leq \theta_0 r_{zy}$ feltétel, σ'' -höz tartoznak. (51) és (53) értelmében érvényes rájuk a (49) egyenlőtlenség.

10. LEMMA. Legyen $\varphi(t, y)$, ahol $t \in S$, $y \in \Omega$, a t pont S mentén folytonosan differenciálható függvénye. Teljesüljenek az alábbi feltételek:

a) A $t \in S$, $y \in S$ pontpárookra fennállnak a

$$|\varphi(t, y)| \leq k_6 r_{ty}^{1-\alpha},$$

$$|\bar{D}_i \varphi(t, y)| \leq k_7 r_{ty}^{-\alpha}$$

egyenlőtlenségek, ahol $i = 1, 2, 3$, $1 < \alpha \leq 3$. $\alpha = 3$ esetén pótlólag feltesszük, hogy érvényes (5).

b) Léteznek olyan pozitív θ, λ', k_8 állandók ($\theta < 1$, $\lambda' \leq \lambda$), hogy bármely, az $r_{tt_1} \leq \theta r_{ty}$ feltételnek eleget tevő $t \in S$, $t_1 \in S$, $y \in \Omega$ ponthármasra fennáll a

$$|\bar{D}_i \varphi(t, y) - \bar{D}_i \varphi(t_1, y)| \leq k_8 (r_{ty}^{-1-\alpha} r_{tt_1} + r_{ty}^{-\lambda-\alpha} r_{tt_1}^{\lambda'})$$

egyenlőtlenség.

Akkor az

$$F(x, y) = \int_S \frac{1}{r_{xt}} \varphi(t, y) dS_t \quad (x \in \Omega, y \in \Omega)$$

függvény $D^2 F(x, y)$ deriváltjaira érvényes a

$$|D^2 F(x, y)| \leq c_{70} (k_2, k_6, k_7, k_8, \alpha, \theta, \lambda') r_{xy}^{\lambda'-\lambda-\alpha}$$

egyenlőtlenség.

BIZONYÍTÁS. Okoskodjunk ugyanúgy, mint a 6. lemma bizonyításánál. Először tegyük fel, hogy $2pr_{x\bar{x}} > r_{xy}$. Akkor

$$|D^2F(x, y)| \leq c_{71}(k_2, k_6, \alpha) r_{xy}^{-\alpha}.$$

Most tegyük fel, hogy $2pr_{x\bar{x}} \leq r_{xy}$. Legyenek az Ω tartomány tetszés szerinti u pontjának koordinátái valamely rögzített koordinátarendszerben (u_1, u_2, u_3) . Akkor

$$F(u, y) = \int_{S-\sigma} r_{ut}^{-1} \varphi(t, y) dS_t + \int_{\sigma} r_{ut}^{-1} \varphi(t, y) dS_t \equiv F_1(u, y) + F_2(u, y),$$

ahol $\sigma = \sigma_{\bar{x}\delta}$, $\delta = \frac{\theta}{2p} r_{xy}$. Ha $t \in S - \sigma$, akkor $r_{xt} \geq \delta$. Innen

$$|D^2F_1(x, y)| \leq c_{72}(k_2, k_6, \alpha, \theta) r_{xy}^{-\alpha}.$$

$D^2F_2(x, y)$ becsléséhez használjuk fel azt a képletet, amely megadja a differenciálható sűrűségű egyszerű réteg potenciáljának a deriváltját (lásd [1], 89. oldal):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2(u, y)}{\partial u_1} &= \int_{\sigma} [\bar{D}_1 \varphi(t, y) \frac{x}{r_{xt}} \varphi(t, y) \cos(n_t, u_1)] r_{ut}^{-1} dS_t + \\ &+ \int_{\sigma} \varphi(t, y) \cos(n_t, u_1) \frac{\partial}{\partial n_t} \left(\frac{1}{r_{tu}} \right) dS_t + \\ &+ \int_L r_{ut}^{-1} \varphi(t, y) [\cos(n_t, u_2) dt_3 - \cos(n_t, u_3) dt_2] \equiv \\ &\equiv I_1(u, y) + I_2(u, y) + I_3(u, y), \end{aligned}$$

ahol L a σ felületdarab határoló görbéje, x az S felület középgörbülete a t pontban, (t_1, t_2, t_3) a t pont koordinátái. Az 5. lemma segítségével kapjuk:

$$|DI_1(x, y)| \leq c_{73}(k_6, k_7, k_8, \alpha, \theta, \lambda') r_{xy}^{\lambda' - \lambda - \alpha}.$$

A $DI_2(x, y)$ deriváltak becsléséhez a differenciálható sűrűségű kettős réteg potenciáljának deriváltjaira vonatkozó képletet ([1], 93. oldal) kell felhasználni. Ez a képlet a kettős réteg potenciáljának deriváltjait bizonyos egyszerűréteg-potenciál deriváltjaival fejezi ki, ezek pedig az 5. lemma segítségével becsülhetők. Kapjuk:

$$|DI_2(x, y)| \leq c_{74}(k_6, k_7, k_8, \alpha, \theta, \lambda') r_{xy}^{\lambda' - \lambda - \alpha}.$$

Az $I_3(x, y)$ integrál deriváltjait közvetlenül lehet becsülni:

$$|DI_3(x, y)| \leq c_{75}(k_6, \alpha, \theta) r_{xy}^{-\alpha}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az x pontban

$$\left| D \left(\frac{\partial F_2(u, y)}{\partial u_1} \right) \right| \leq c_{76}(k_6, k_7, k_8, \alpha, \theta, \lambda') r_{xy}^{\lambda' - \lambda - \alpha}.$$

Hasonlóan becsülhetők a $D \left(\frac{\partial F_2}{\partial u_2} \right)$ és $D \left(\frac{\partial F_2}{\partial u_3} \right)$ deriváltak. A 10. lemmát bebizonyítottuk.

2. TÉTEL. Ha az S felület az L_2 osztályhoz tartozik, akkor $\Omega \times \Omega$ -ban fennállnak a

$$(54) \quad |D^2 g_1(x, y)| \leq c_{77} r_{xy}^{-3},$$

$$(55) \quad |D^2(g - g_1)| \leq c_{78}(\varepsilon) r_{xy}^{-2-\varepsilon}$$

egyenlőtlenségek, ahol ε tetszős szerinti pozitív szám.

BIZONYÍTÁS. Az (54) egyenlőtlenség közvetlenül adódik (20)-ból, továbbá a 7. és 10. lemmából. Az (55) egyenlőtlenség bizonyításánál ugyanazokat a jelöléseket fogjuk használni, mint az 1. tétel bizonyításánál.

Írjuk át a (17) egyenlőséget a következő alakba:

$$(56) \quad \mu(z, y) = \tau_1(z, y) + \varphi_0(z, y),$$

ahol $z \in S, y \in \Omega, \mu(z, y) = \frac{\partial G(z, y)}{\partial n_z}$. A (25) egyenlőtlenség feltevéseink mellett a

$$(57) \quad |\varphi_0(z, y)| \leq c_{79} r_{zy}^{-1}$$

alakot ölti. (26) értelmében bármely, az $r_{zz_1} \leq \frac{1}{2} r_{zy}$ feltétel útján összekapcsolt $z \in S, z_1 \in S, y \in \Omega$ ponthármasra érvényes a

$$|\varphi_0(z, y) - \varphi_0(z_1, y)| \leq c_{80} r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda}$$

egyenlőtlenség. (56) és a 3. lemma felhasználásával kapjuk, hogy ha $r_{zz_1} \leq \frac{1}{2} r_{zy}$, akkor

$$(58) \quad |\mu(z, y) - \mu(z_1, y)| \leq c_{81}(r_{zy}^{-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-2} r_{zz_1}^{\lambda}).$$

(22), (23) és (58)-ból következik, hogy a $\varphi_0(z, y)$ függvényre alkalmazható a 9. lemma, amelynek értelmében

$$(59) \quad |\bar{D}_i \varphi_0(z, y)| \leq c_{82} r_{zy}^{-2},$$

$$(60) \quad |\bar{D}_i \varphi_0(z, y) - \bar{D}_i \varphi_0(z_1, y)| \leq c_{83}(\lambda')(r_{zy}^{-3} r_{zz_1} + r_{zy}^{-\lambda-2} r_{zz_1}^{\lambda'}),$$

ahol $\lambda' < \lambda, r_{zz_1} \leq \theta_0 r_{zy}$.

Most tekintsük a

$$\Phi_0(x, y) = \int_S r_{xt}^{-1} \varphi_0(t, y) dS_t$$

függvényt. Erre (57), (59) és (60) szerint alkalmazható a 10. lemma. Eredményül azt kapjuk, hogy $\Omega \times \Omega$ -ban teljesül a

$$|D^2 \Phi_0(x, y)| \leq c_{84}(\lambda') r_{xy}^{\lambda' - \lambda - 2}$$

egyenlőtlenség, ahol $\lambda' < \lambda$. Ebből és (24)-ből adódik (55). A tételt bebizonyítottuk.

IRODALOM

- [1] Н. М. Гюнтер: Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики, Москва, Гостехиздат, № 953.
- [2] Д. М. Эйдус: Оценка производных функции Грина, Доклады Академии Наук СССР, 106, № 2 (1956), 207—209.
- [3] P. Levy: Sur l'allure des fonctions de Green et de Neumann dans le voisinage du contour, *Acta Math.*, 42 (1920), 207—267.

Fordította: Bognár János

*A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete*