AZ ITERATÍV KÖZELÍTŐMÓDSZEREKRŐL, III.*

Írta: ZAJTA AURÉL

E harmadik részben az inverz *Taylor*-sorfejtéssel és a belőle származtatható *Euler*-féle közelítőképletekkel foglalkozunk. A problémakörnek az 1. pontban adott általános ismertetése után a 2. fejezetben az inverz *Taylor*-sor és ennek hatványozásával kapott sor együtthatóinak explicit alakját bizonyítjuk be, míg a 3. fejezetben az *Euler*-közelítés hibaképletét adjuk. A 4. fejezet arra a kérdésre ad választ, hogyan kell átalakítani az *Euler*-féle közelítőképletet többszörös gyökök esetén, s végül az utolsó pont az I. részben tárgyalt többi képletsorozatnak (a *Kiss—Gornstein* és a *Bernoulli*-féle képleteknek) az *Euler*-képletekkel való szerkezeti rokonságát mutatja be.

1. Az Euler-közelítés és az inverz Taylor-sor kapcsolata

A gyökközelítésre használt *Euler-féle közelítőképletek* könnyen származtathatók az $f(x)$ analitikus függvény inverzének valamely $f(x)=f(a)$ hely környezetében érvényes Taylor-sorából:

$$x=a-\sum_{\nu=0}^{\infty} E_{\nu}\cdot\left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right]^{\nu+1}, \tag{1}$$

ahol az E_ν együtthatók értékei:

$$E_0=1,$$

$$E_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(a)}{f'(a)},$$

$$E_2=\frac{1}{6}\cdot\left[3\cdot\left(\frac{f''(a)}{f'(a)}\right)^2-\frac{f'''(a)}{f'(a)}\right] \quad \text{stb.},$$

tehát $\nu>0$ esetben az $f(a)$ deriváltjaiból alkotott speciális törtpolinomok, általában pedig a következő formulából kiszámítható kifejezések:

$$E_\nu=\frac{(-1)^\nu\cdot f'(a)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\cdot\left(\frac{d^{\nu+1}x}{df(x)^{\nu+1}}\right)_{x=a}. \tag{2}$$

Ha ξ jelöli az $f(x)$ függvény egyik zérushelyét, akkor (1)-ből:

$$\xi=a-\sum_{\nu=0}^{\infty} E_\nu\cdot\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^{\nu+1}, \tag{3}$$

* A dolgozat I. része az MTA III. Osztálya Közleményeinek VI/3—4 számában (1956, 467—489 old.), II. része a VIII/4 számában (1958, 457—472 old.) jelent meg.

és a szereplő a mennyiség választásától függ, hogy — amennyiben a (3) jobboldalán álló sor konvergál, — az $f(x)$ lehetséges zérushelyei közül melyiket szolgáltatja. A gyakorlatban a (3) sort a k-adik tagnál berekesztjük, és az így kapott

$$\varepsilon_k(a) = a - \sum_{\nu=0}^{k-2} E_\nu \cdot \left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^{\nu+1} \tag{4}$$

kifejezést iteratív módon alkalmazzuk a ξ közelítésére az

$$x_{n+1} = \varepsilon_k(x_n)$$

képlet szerint.

A (4) sorszeleteket EULER [1] ajánlotta először közelítő számítások céljára, éppen ezért *a szereplő polinomokat Euler-polinomoknak nevezzük el.* Azt, hogy a (4) sorszeletek azonosak a II. rész VIII. tételénél definiált és *Euler-közelítésnek* nevezett képletekkel, a 3. fejezetben fogjuk bebizonyítani, éspedig azáltal, hogy megmutatjuk: *a (4) képletek konvergenciafoka k-val egyenlő.*

A (4) képletek használatához nélkülözhetetlen az E_ν polinomok explicit alakjának ismerete. Az explicit alakok kiszámítására számos mód ismeretes, pl. felhasználható a (2) formula is, vagy még inkább a belőle levezethető rekurziós összefüggés:

$$E_\nu = \frac{\nu}{\nu+1} \cdot \frac{f''}{f'} \cdot E_{\nu-1} - \frac{1}{\nu+1} \cdot E'_{\nu-1}. \tag{6}$$

Itt a differenciálás a szerint veendő. A (6) formula könnyen verifikálható a (2)-ből, pl. tekintsük a (2)-ből közvetlenül nyerhető

$$\frac{(\nu+1)!\,E_\nu}{(-f')^{\nu+1}} = \frac{1}{f'(a)} \cdot \left[\frac{\nu!\,E_{\nu-1}}{(-f')^\nu}\right]' \tag{7}$$

relációt, melyből a jobboldalon kijelölt differenciálás és a megfelelő átrendezések elvégzésével könnyen adódik a (6).

Az *Euler*-sor explicit alakjának meghatározására BODEWIG [3] szintén rekurziós képletet adott meg, KISS [4] pedig a konvergenciafok fogalmát felhasználó eljárást közölt. WUNDT [5] lényegében a (2)-es képleten alapuló módszerrel számította ki az (1) sor együtthatóit a 8-adik tagig bezárólag. Mindezeknek a módszereknek hátránya, hogy vagy rekurziósak, tehát egy tetszőleges E_ν együttható kiszámításához gyakorlatilag ismerni kell az öszszes ezt megelőzőt, vagy pedig közvetlenek ugyan, (ilyen pl. a LAGRANGE-tól származó inverziós formula is [2]), de akkor rengeteg számolással járnak. A következő pontban ismertetendő tétel szükségtelenné teszi ezeket a számolásokat, mert tetszőleges indexre egyszerre megadja az E_ν együtthatók explicit alakját.

2. Az E_ν együtthatók explicit alakja

Az (1) sorral definiált E_ν együtthatók explicit alakja a következő:

$$E_0 = 1,$$

$$(8)\qquad E_\nu = \sum (-1)^{i_1} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{\nu-i_1-1} (\nu+k+1)}{\prod_{k=2}^{\nu+1} i_k! \prod_{k=2}^{\nu+1} (k!)^{i_k}} \cdot \prod_{k=2}^{\nu+1} \left(\frac{f^{(k)}}{f'}\right)^{i_k}, \qquad (\nu > 0)$$

ahol az i_k hatványkitevők nem-negatív egész számok,

$$(9)\qquad i_1 = \nu - \sum_{k=2}^{\nu+1} i_k,$$

és az összegezést minden lehetséges esetre ki kell terjeszteni a

$$(10)\qquad \sum_{k=2}^{\nu+1} (k-1) i_k = \nu$$

megszorítás figyelembevételével. Amennyiben $\nu - i_1 - 1 = 0$, a számláló produktuma üres szorzatnak tekintendő.

A (8) formula speciális esete a sokkal általánosabb

$$E_{0m} = 1,$$

$$(11)\qquad E_{\nu m} = m \cdot \sum (-1)^{i_1} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{\nu-i_1-1} (\nu+k+m)}{\prod_{k=2}^{\nu+1} i_k! \prod_{k=2}^{\nu+1} (k!)^{i_k}} \cdot \prod_{k=2}^{\nu+1} \left(\frac{f^{(k)}}{f'}\right)^{i_k}, \qquad (\nu > 0)$$

formulának, amelyből $m = 1$ helyettesítéssel kapjuk ($E_{\nu_1} = E_\nu$). Az $E_{\nu m}$ jelöléssel a

$$(12)\qquad \left[\frac{(a-x)f'(a)}{f(a)-f(x)}\right]^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} E_{\nu m} \cdot \left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right]^\nu$$

sor együtthatóit jelöljük: e soregyütthatók explicit alakját megadó (11) kifejezés bizonyításával egyúttal a (8)-at is bebizonyítottuk. A (11) szintén kiegészítendő még a (9) és (10) mellékfeltételekkel.

A (12) sor érvényességével kapcsolatban megjegyezzük, hogy amennyiben a komplexváltozósnak tekintett $f(x)$ függvény az $x = a$ pontban reguláris és $f'(a) \neq 0$, akkor a

$$z = \frac{f(x)-f(a)}{f'(a)} = 0$$

pont környezetében minden valós egész m esetén érvényes a (12) sorelőállítás. A *Taylor*-sor együtthatóinak kiszámítási formuláját alkalmazva, az $E_{\nu m}$ együtthatókra, (12)-ből azonnal adódik:

$$E_{\nu m} = \frac{(-f'(a))^{\nu}}{\nu!} \cdot \left(\frac{d^{\nu} \left[\frac{(x-a)f'(a)}{f(x)-f(a)} \right]^{m}}{d f(x)^{\nu}} \right)_{x=a}. \tag{13}$$

A (13) természetesen — bonyolultságánál fogva — nem alkalmas az $E_{\nu m}$ polinomok kiszámítására, de a (11) bizonyításánál fontos szerepet tölt be. Rögzített ν esetén ugyanis (11) és (13) jobboldala m-nek ν-edfokú egész függvénye, és ezért ha bebizonyítjuk, hogy a (11) és (13) jobboldalainak egyenlővé tételével nyert

$$\begin{aligned} &\frac{(-f'(a))^{\nu}}{\nu!} \cdot \left(\frac{d^{\nu} \left[\frac{(x-a)f'(a)}{f(x)-f(a)} \right]^{m}}{d f(x)^{\nu}} \right)_{x=a} = \\ &= m \cdot \sum (-1)^{i_1} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{\nu-i_1-1} (\nu+k+m)}{\prod\limits_{k=2}^{\nu+1} i_k! \prod\limits_{k=2}^{\nu+1} (k!)^{i_k}} \cdot \prod_{k=2}^{\nu+1} \left(\frac{f^{(k)}}{f'} \right)^{i_k} \qquad (\nu > 0) \end{aligned} \tag{14}$$

összefüggést m-nek végtelen sok értéke kielégíti, akkor (14) csak azonosság lehet. De akkor (14) tetszőleges valós egész m-re is fennáll, vagyis *bebizonyítottuk azt a tételt, hogy a* (12) *sor együtthatóinak explicit kifejezése* (11) *alakú.*

Az $E_{\nu m}$ polinomok explicit alakja abban a speciális esetben, amikor m negatív egész és kisebb $(-\nu)$-nél, aránylag könnyen meghatározható. A továbbiakban ezzel foglalkozunk.

Legyen tehát m negatív egész, és jelölje m abszolút értékét n:

$$m = -n. \tag{15a}$$

A kényelmetlenné váló $E_{\nu(-n)}$ jelölések helyett vezessük be az $E^*_{\nu n}$ jelölést:

$$E_{\nu m} = E_{\nu(-n)} = E^*_{\nu n}. \tag{15b}$$

Ezzel az új jelöléssel a (12)-ből kis átrendezéssel nyerjük:

$$\frac{1}{(a-x)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} E^*_{\nu n} \cdot \left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)} \right]^{\nu-n}, \tag{16}$$

speciálisan $n=1$ esetben:

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} E^*_{\nu 1} \cdot \left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)} \right]^{\nu-1} = \frac{f'(a)}{f(a)-f(x)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} E^*_{\nu 1} \cdot \left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)} \right]^{\nu-1}. \tag{17}$$

A (17) jobboldalának csak az első tagja, a (16) jobboldalának viszont az első n tagja az $[f(a)-f(x)]$ kifejezést a nevezőben tartalmazza; az ezután következő tagokban viszont már sehol sem fordul elő $[f(a)-f(x)]$ a nevezőben. Minthogy a (17) sorból a (16) sor a szerint végrehajtott $(n-1)$-szeres differenciálással (és $(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$-sal való osztással) előállítható, a fenti megállapítással egybe vetve nyilvánvaló, hogy a (16) sor első n tagja és csakis ezek, a (17) sornak kizárólag az első tagjából származnak a differenciálás során, tehát

$$\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(\frac{f'(a)}{f(a)-f(x)}\right)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\sum_{\nu=0}^{n-1}E^*_{\nu n}\cdot\left(\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right)^{\nu-n},$$

vagy, mivel az $f(x)$ itt semmiféle szerepet nem játszik:

$$\left(\frac{f'(a)}{f(a)}\right)^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\sum_{\nu=0}^{n-1}E^*_{\nu n}\cdot\left(\frac{f'(a)}{f(a)}\right)^{n-\nu}. \tag{18}$$

A (18) baloldalának explicit alakja már ismeretes. Emlékeztetünk ugyanis arra, hogy a baloldal szerepel a *Newton-polinomok* egyik előállításában (vö. I. rész (23)):

$$N_n(f)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^n\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{(n-1)}, \tag{19}$$

másrészt a *Newton-polinomok* explicit alakját az I. részben ugyancsak megadtuk. A (19) alapján a (18)-ba behelyettesítve, eredményünk:

$$\frac{1}{f^n}\cdot N_n(f)=\sum_{\nu=0}^{n-1}E^*_{\nu n}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{n-\nu}, \tag{20}$$

és most feladatunk az, hogy a (20) baloldalára az $N_n(f)$-polinomok explicit alakját beírva, leolvassuk az $E^*_{\nu n}$-polinomokét. Idézzük az $N_n(f)$-polinomok explicit alakját (vö. I. rész 5. pont):

$$N_n(f)=n\cdot\sum(-1)^{i_0}\cdot\frac{(n-i_0-1)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}i_k!\prod\limits_{k=1}^{n}(k!)^{i_k}}\prod_{k=0}^{n}(f^{(k)})^{i_k}, \tag{21}$$

ahol

$$\sum_{k=0}^{n}i_k=\sum_{k=1}^{n}ki_k=n. \tag{22}$$

A (21)-ből kis átalakítással és i_0 helyett ν-t írva nyerjük:

$$\frac{N_n(f)}{f^n}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[n\cdot\sum(-1)^{\nu}\cdot\frac{(n-\nu-1)!}{i_1!\prod\limits_{k=2}^{\nu+1}j_k!\prod\limits_{k=2}^{\nu+1}(k!)^{j_k}}\cdot\prod_{k=2}^{\nu+1}\left(\frac{f^{(k)}}{f'}\right)^{j_k}\right]\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{n-\nu}. \tag{23}$$

A (21) és (23) összehasonlításával j_k kitevőkre azonnal adódik:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} & j_k = i_k, \quad (k>1) \\ \text{és} \quad & -\sum_{k=2}^{\nu+1} j_k + n - \nu = i_1, \end{aligned}\right.$$

és ha most j_1-et úgy definiáljuk, hogy

$$(25)\qquad \sum_{k=1}^{\nu+1} j_k = \nu$$

legyen, akkor a (22), (24) és (25)-ből egyszerűen következik az is, hogy

$$(26)\qquad \sum_{k=1}^{\nu+1} k j_k = 2\nu$$

és

$$(27)\qquad i_1 = n + j_1 - 2\nu.$$

Ha most beírjuk (23)-ba i_1-nek (27)-beli kifejezését, a (20)-szal egybevetve azonnal leolvasható $E^*_{\nu n}$ explicit alakja:

$$(28)\qquad E^*_{\nu n} = n \cdot \sum (-1)^{\nu} \frac{(n-\nu-1)!}{(n+j_1-2\nu)! \prod_{k=2}^{\nu+1} j_k! \prod_{k=2}^{\nu+1} (k!)^{j_k}} \cdot \prod_{k=2}^{\nu+1} \left(\frac{f^{(k)}}{f'}\right)^{j_k},$$

ahol a j_k kitevők nem-negatív egész számok, és az összegezést az összes lehetséges esetre végre kell hajtani a (25) és (26) megszorítások figyelembevételével.

A (28) könnyen identifikálható a (11) alatti kifejezéssel. Ha j_k helyett ismét rátérünk az i_k-val való jelölésre, hamar felismerhető, hogy a (25) és (26) mellékfeltételek ugyanazt fejezik ki együtt, mint a (9) és (10). A (28)-beli két faktoriális hányadosa;

$$\frac{(n-\nu-1)!}{(n+j_1-2\nu)!}$$

pedig nem egyéb, mint a (11) számlálójában levő szorzat $(-1)^{\nu-i_1-1}$-szerese (j_1 helyett i_1-et, n helyett $(-m)$-et írunk, vö. (15a)):

$$\frac{(n-\nu-1)!}{(n+i_1-2\nu)!} = \prod_{k=1}^{\nu-i_1-1} (n-\nu-k) = (-1)^{\nu-i_1-1} \prod_{k=1}^{\nu-i_1-1} (m+\nu+k).$$

Minthogy (11), ill. (28) mindig érvényes, ha m negatív egész és kisebb $(-\nu)$-nél, azaz m-nek végtelen sok értékére, ezért a már mondottaknál fogva a (11)-gyel megadott explicit alakot általános érvényűnek tekinthetjük.

Kiegészítésképpen megjegyezzük, hogy a $C_{nm}(f)$-polinomokra (vö. I. rész 4. és 5. pont) is fennáll egy a (20)-nak megfelelő összefüggés (most azonban m-nek más a jelentése, mint korábban, tehát (15a) nem érvényes!):

$$(29)\qquad \frac{1}{f^n}\cdot\frac{C_{nm}(f)}{m}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n+m-\nu-1}{n-\nu-1}\cdot\frac{E^*_{\nu n}}{n}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{n-\nu}.$$

A (29) $C_{nm}(f)$-polinomok explicit alakjából (vö. I. rész (45)) vezethető le, az $E^*_{\nu n}$-polinomok (28)-as alakjának felhasználásával. A (29)-nek speciális esete az $m=1$ helyettesítésre (vö. I. rész (33)) nyerhető összefüggés:

$$(30)\qquad \frac{1}{f^n}\cdot K_n(f)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{n-\nu}{n}\cdot E^*_{\nu n}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{n-\nu},$$

melyre az utolsó fejezetben még szükségünk lesz.

3. Az Euler-közelítés hibaformulája

Mint már említettük, a (4) közelítőképlet és a II. rész 5. pontjában definiált *Euler-közelítőképlet* azonosságát azáltal bizonyíthatjuk, hogy a (4) közelítőképlet konvergenciafokáról megmutatjuk, hogy k-val egyenlő. Azt kell tehát bizonyítanunk, hogy az

$$(31)\qquad \varepsilon_k(x)-\xi=x-\xi-\sum_{\nu=0}^{k-2}E_\nu\cdot\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^{\nu+1}=\sigma_k\cdot(x-\xi)^k$$

felbontásban, az ún. hibaképletben, σ_k oly kifejezés, melynek $x\to\xi$ közelítésre létezik a határértéke. Ez azonban következik a σ_k kifejezések rekurziós képletéből:

$$(32)\qquad \sigma_{k+1}=\frac{1}{f'}\left(g'\cdot\sigma_k-\frac{1}{k}\cdot g\cdot\sigma_k'\right),$$

és a kezdeti $\sigma_1=1$ $\left(\text{vagy } \sigma_2=\frac{g'}{f'}\right)$ értékekből, amelyekből azonnal megállapítható, hogy σ_k — bizonyos numerikus faktoroktól eltekintve — nevezőjében csak f' valamely hatványát tartalmazza, vagyis létezik a $\lim\limits_{x\to\xi}\sigma_k=\sigma_{k0}$ határérték.

Ami a (32) rekurziós formula bizonyítását illeti, ezt az alábbiakban vázoljuk. A (6) rekurziós képletből kiindulva először a (4) sor általános tagjának, a

$$(33)\qquad \mu_\nu=E_{\nu-1}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^\nu$$

kifejezéseknek rekurziós képletét,

$$(34)\qquad (\nu+1)\cdot\mu_{\nu+1}=\nu\cdot\mu_\nu-\frac{f}{f'}\cdot\mu'_\nu,$$

vezetjük le, majd mindkét oldalon történő összegezéssel és egyszerűsítésekkel az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$(35)\qquad k\cdot\mu_k=\mu_1-\frac{f}{f'}\cdot\sum_{\nu=1}^{k-1}\mu'_\nu=\frac{f}{f'}\cdot\left(1-\sum_{\nu=1}^{k-1}\mu'_\nu\right).$$

Tekintve azonban, hogy

$$\varepsilon_k(x)=x-\sum_{\nu=1}^{k-1}\mu_\nu,$$

ebből

$$\varepsilon'_k=1-\sum_{\nu=1}^{k-1}\mu'_\nu,$$

és

$$\mu_k=\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1},$$

következik, amelyeknek a (35)-be való behelyettesítésével megkapjuk az ε_k-kifejezések rekurziós képletét:

$$(36)\qquad \varepsilon_{k+1}=\varepsilon_k-\frac{1}{k}\cdot\frac{f}{f'}\cdot\varepsilon'_k.$$

A (32)-t ebből úgy kapjuk, hogy a (31) szerinti helyettesítéseket:

$$\varepsilon_k=\xi+\sigma_k\cdot(x-\xi)^k,$$

$$\varepsilon_{k+1}=\xi+\sigma_{k+1}\cdot(x-\xi)^{k+1},$$

és

$$\varepsilon'_k=\sigma'_k\cdot(x-\xi)^k+k\sigma_k(x-\xi)^{k-1},$$

a (36)-ban elvégezzük és egyszerűsítünk.

Minthogy a $\lim\limits_{x\to\xi}\sigma_k$ határérték létezik, σ_k sorba fejthető $(x-\xi)$ pozitív kitevős hatványai szerint:

$$\sigma_k=\sigma_{k0}+\sigma_{k1}\cdot(x-\xi)+\sigma_{k2}\cdot(x-\xi)^2+\cdots$$

A hibabecslés szempontjából a sorfejtés első tagja (σ_{k0}) a döntő, ennek explicit alakját az alábbiakban vezetjük le. A (31)-től kis átalakítással

$$\sigma_{k+1}\cdot(x-\xi)^{k+1}-\sigma_k\cdot(x-\xi)^k=-E_{k-1}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^k$$

következik, vagy, tekintve, hogy $f(x)=g(x)\cdot(x-\xi)$,

$$\sigma_{k+1}\cdot(x-\xi)-\sigma_k=-E_{k-1}\cdot\left(\frac{g}{f'}\right)^k,$$

ahonnét

$$\sigma_{k0} = \lim_{x\to\xi} \sigma_k = \lim_{x\to\xi} E_{k-1}\cdot\left(\frac{g}{f'}\right)^k = \lim_{x\to\xi} E_{k-1}.$$

Mivel E_{k-1} f-nek csak deriváltjait tartalmazza, limesét azáltal nyerjük, hogy explicit kifejezésben mindenütt végrehajtjuk az

$$f^{(h)} \to h\cdot g^{(h-1)} \qquad (h=1,2,\ldots,k)$$

helyettesítéseket. Végső eredményünk a (8) felhasználásával:

$$\sigma_{k0} = \frac{1}{k!}\cdot\sum(-1)^{i_0}\frac{(2k-2-i_0)!}{\prod\limits_{h=1}^{k-1} i_h!\prod\limits_{h=1}^{k-1}(h!)^{i_h}}\cdot\prod_{h=1}^{k-1}\left(\frac{g^{(h)}}{g}\right)^{i_h}, \tag{37}$$

ahol az i_h hatványkitevők nem-negatív egész számok,

$$i_0 = k-1-\sum_{h=1}^{k-1} i_h,$$

és az összegezést az összes lehetséges esetre ki kell terjeszteni a

$$\sum_{h=1}^{k-1} h i_h = k-1$$

megszorítás figyelembevételével.

4. Az Euler-közelítés szükséges átalakítása többszörös gyökök közelítésekor

Mint a II. rész 1. fejezetében említettük, bármely egyszeres gyök közelítőképletből úgy nyerhetünk ugyanolyan konvergenciafokú, de p-szeres gyök közelítésére alkalmas képletet, hogy benne végrehajtjuk az

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{ll} f(x)\to f(x)^m & \left(m=\dfrac{1}{p}\right) \\ \text{és} & \\ f^{(h)}(x)\to \dfrac{d^h}{dx^h}\left(f(x)^m\right) & \end{array}\right.$$

helyettesítéseket. Vizsgáljuk meg, mivé alakul az *Euler*-közelítés a (38) helyettesítések keresztülvitelével.

Az *Euler*-sor általános tagját a

$$u_n = E_{n-1}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^n$$

kifejezések képezik; ezek rekurziós összefüggése pedig, mint az a (34)-ből látható:

$$(34') \qquad (n+1)\cdot\mu_{n+1}-n\cdot\mu_n+\frac{f}{f'}\mu'_n=0.$$

A (38) helyettesítésekkel nyert új kifejezést jelölje M_n:

$$(39) \qquad \mu_n(f'''\,;\,(f''')^{(h)})=M_n(f;f^{(h)}),$$

ekkor a (34')-ből következik, hogy az M_n kifejezések pedig az

$$(40) \qquad (n+1)\cdot M_{n+1}-n\cdot M_n+p\cdot\frac{f}{f'}\cdot M'_n=0$$

rekurziós formulát elégítik ki.

A (40) egyenlet megoldására az M_n polinomokat az alábbi alakban keressük:

$$(41) \qquad M_n=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{n\nu}\cdot\mu_\nu,$$

ahol az $\alpha_{n\nu}$ mennyiségek numerikus együtthatók és a p függvényei. A (40)-be behelyettesítve:

$$(n+1)\cdot\sum_{\nu=1}^{n+1}\alpha_{(n+1)\nu}\cdot\mu_\nu-n\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{n\nu}\cdot\mu_\nu+p\cdot\frac{f}{f'}\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{n\nu}\cdot\mu'_\nu=0.$$

μ'_ν-t kiküszöböljük a (34) alapján. Rendezés után:

$$(42) \qquad \sum_{\nu=1}^{n+1}[(n+1)\alpha_{(n+1)\nu}+(p\nu-n)\alpha_{n\nu}-p\nu\cdot\alpha_{n(\nu-1)}]\cdot\mu_\nu=0,$$

megjegyezve azt, hogy az összegezéskor mechanikusan kiadódó α_{n0} és $\alpha_{n(n+1)}$ együtthatókat zérus-értékűnek kell tekintenünk.

Mivel a μ_ν mennyiségek lineárisan függetlenek, a (42)-ből azonnal leolvasható az $\alpha_{n\nu}$ együtthatók rekurziós képlete:

$$(43) \qquad (n+1)\alpha_{(n+1)\nu}+(p\nu-n)\alpha_{n\nu}-p\nu\cdot\alpha_{n(\nu-1)}=0.$$

Ebből a kezdeti $\alpha_{n0}=0$, $\alpha_{n(n+1)}=0$ és $\alpha_{11}=p$ értékekből valamennyi további együttható meghatározható, éspedig először az α_{n1}, majd ezek ismerete alapján az α_{n2}, majd ezekből az α_{n3} stb együtthatók. Néhány alacsonyabb indexű együttható kiszámított értéke:

$$\alpha_{11}=p,\quad \alpha_{21}=-\binom{p}{2},\quad \alpha_{31}=\binom{p}{3},\quad \alpha_{41}=-\binom{p}{4},$$

$$\alpha_{22}=p^2,\quad \alpha_{32}=-p^2(p-1),\quad \alpha_{42}=\frac{1}{12}p^2(p-1)(7p-11)$$

$$\alpha_{33}=p^3,\quad \alpha_{43}=-\frac{3}{2}p^3(p-1),$$

$$\alpha_{44}=p^4.$$

Az $\alpha_{n\nu}$ együtthatóknak a vázolt eljárással történő szukcesszív meghatározását feleslegessé teszi az általános explicit alakjukat megadó alábbi formula:

$$\alpha_{n\nu} = (-1)^{n-\nu} \cdot \nu! \sum \prod_{h=1}^{n-\nu+1} \frac{1}{i_h!} \cdot \binom{p}{h}^{i_h}, \tag{44}$$

ahol az i_h kitevők nem-negatív egész számok, és az összegezésnél az összes lehetséges esetet figyelembe kell venni, amelyek kielégítik a

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum i_h = \nu \\ \text{és} \quad &\sum h i_h = n \end{aligned} \right. \tag{45}$$

feltételeket.

A (44) bizonyítására tekintsük az

$$1-(1-x)^p = \alpha_{11} x + \alpha_{21} x^2 + \alpha_{31} x^3 + \cdots$$

és

$$[1-(1-x)^p]^\nu = \alpha_{\nu\nu} x^\nu + \alpha_{(\nu+1)\nu} \cdot x^{\nu+1} + \alpha_{(\nu+2)\nu} \cdot x^{\nu+2} + \cdots$$

sorfejtéseket. A (44) és (45)-ből ugyanis következik, hogy

$$[1-(1-x)^p]^\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_{n\nu} \cdot x^n. \tag{46}$$

Ha ennek alapján igazolni tudjuk a (43) rekurziós összefüggést, akkor (44) bizonyítottnak tekinthető. Differenciáljunk mindkét oldalon x szerint:

$$\nu p \cdot [1-(1-x)^p]^{\nu-1} \cdot (1-x)^{p-1} = \sum_{n=\nu}^{\infty} n \alpha_{n\nu} \cdot x^{n-1},$$

szorozzunk $(1-x)$-szel:

$$\nu p \cdot [1-(1-x)^p]^{\nu-1} \cdot (1-x)^p = \sum_{n=\nu-1}^{\infty} [(n+1)\alpha_{(n+1)\nu} - n\alpha_{n\nu}] \cdot x^n. \tag{47}$$

Írjuk fel a (46)-ot ν helyett $(\nu-1)$-re és szorozzuk (νp)-vel:

$$\nu p [1-(1-x)^p]^{\nu-1} = \sum_{n=\nu-1}^{\infty} \nu p \cdot \alpha_{n(\nu-1)} \cdot x^n, \tag{48}$$

és szorozzuk meg (46)-ot is (νp)-vel:

$$\nu p [1-(1-x^p]^\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \nu p \cdot \alpha_{n\nu} \cdot x^n.$$

Ha a (48) baloldalából kivonjuk a (47) baloldalát, épp az utolsó egyenlet baloldalát kapjuk. Ugyanez áll tehát a jobboldalakra is. Rendezés és az x^n kiemelése után:

$$\sum_{n=\nu-1}^{\infty}[(n+1)\alpha_{(n+1)\nu}+(\nu p-n)\alpha_{n\nu}-\nu p\cdot\alpha_{n(\nu-1)}]\cdot x^n=0,$$

ahonnét azonnal leolvasható a (45) rekurziós összefüggés.

Annak, hogy az $\alpha_{n\nu}$ együtthatók a (46) sorfejtés tagjaiként szerepelnek, más haszna is van. $x=1$ helyettesítésre ugyanis az alábbi három tétel következik belőle:

(49)
1) $\sum_{n=\nu}^{\infty}\alpha_{n\nu}=1$, ha $p>0$,

2) $\sum_{n=\nu}^{N}\alpha_{n\nu}=1$, ha $N\geqq\nu p$ és p pozitív egész, és e kettő együttes alkalmazásával:

3) $\alpha_{n\nu}=0$, ha $n\geqq\nu p$ és p pozitív egész.

A (49)-et felhasználva könnyen bizonyítható az *Euler-sorra* vonatkozó lényeges tétel: *Legyen az Euler-közelítésnek p-szeres gyökök esetében szükségessé való módosítása, azaz az*

$$\varepsilon_{k,p}=x-\sum_{n=1}^{k-1}M_n=x-\sum_{n=1}^{k-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{n\nu}\cdot\mu_\nu\right) \tag{50}$$

kettős sor $k\to\infty$ limesre valamennyi tagját tekintve abszolút konvergens sor. Ekkor a $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_{k,p}$ sor az eredeti Euler-sorrá átrendezhető.

A bizonyításhoz átalakítjuk az (50)-et:

$$\varepsilon_{k,p}=x-\sum_{\nu=1}^{k-1}\left(\sum_{n=\nu}^{k-1}\alpha_{n\nu}\right)\cdot\mu_\nu,$$

és felhasználjuk a (49)-et:

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_{k,p}=x-\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\sum_{n=\nu}^{k-1}\alpha_{n\nu}\right)\cdot\mu_\nu=x-\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_\nu=\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k,$$

qu. e. d.

5. Az inverz Taylor-sor felhasználása közelítőképletek szerkesztésére

Az inverz *Taylor*-sort, ill. a hatványozásával nyert (12) sort a II. részben tárgyalt kongruencia-relációk segítségével jól fel lehet használni közelítőképletek szerkesztésére.

A (12) sor $x=\xi$ helyettesítésével (ξ az $f(x)$ egyik zérushelyét jelenti) az

$$\left[\frac{(a-\xi)f'(a)}{f(a)}\right]^m=\sum_{\nu=0}^{\infty}E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^\nu \tag{51}$$

sorba megy át. Ha most bevezetjük az

$$\Omega_{km}=\sum_{\nu=0}^{k-2}E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^\nu \qquad (k=2,3\ldots) \tag{52}$$

jelölést, akkor (51) így is írható:

$$\left[\frac{(a-\xi)f'(a)}{f(a)}\right]^m=\Omega_{km}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^\nu. \tag{51'}$$

Az (51')-ből és a belőle $m=1$ és $m\to m+1$ helyettesítésekre nyert összefüggésekből az alábbi relációt nyerjük:

$$\left[\Omega_{k1}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}E_{\nu}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^\nu\right]\cdot\left[\Omega_{km}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^\nu\right]=\Omega_{k(m+1)}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}E_{\nu(m+1)}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^\nu,$$

amelyből leolvasható az

$$\Omega_{k1}\cdot\Omega_{km}\equiv\Omega_{k(m+1)}\bmod f^{k-1} \tag{53}$$

kongruencia érvényessége. Az (53) más alakban, mivel a $\lim\limits_{f\to 0}\frac{1}{\Omega_{km}}$ határérték létezik, így írható:

$$\Omega_{k1}\equiv\frac{\Omega_{k(m+1)}}{\Omega_{km}}\bmod f^{k-1};$$

vagy, $\left(\frac{f}{f'}\right)$-vel való szorzással:

$$\Omega_{k1}\cdot\frac{f}{f'}\equiv\frac{\Omega_{k(m+1)}}{\Omega_{km}}\cdot\frac{f}{f'}\bmod f^k. \tag{54}$$

Minthogy (4)-ből

$$\Omega_{k1}\cdot\frac{f}{f'}=a-\varepsilon_k(a)$$

következik, az (54) így is írható:

$$\varepsilon_k(a) \equiv a - \frac{\Omega_{k(m+1)}}{\Omega_{km}} \cdot \frac{f}{f'} \bmod f^k,$$

ahonnét a II. rész IV. tétel alapján leolvasható, hogy a

$$\Phi_{km}(x) = x - \frac{\Omega_{k(m+1)}}{\Omega_{km}} \cdot \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{55}$$

közelítőképlet konvergenciafoka *legalább* k-val egyenlő.

Azt, hogy az (55) konvergenciafoka *pontosan* k-val egyenlő ($k > 1$), a következőképp láthatjuk be. Az (55)-ből $k \to k+1$ helyettesítésére nyert

$$\Phi_{(k+1)m}(x) = x - \frac{\Omega_{(k+1)(m+1)}}{\Omega_{(k+1)m}} \cdot \frac{f(x)}{f'(x)}$$

közelítőképlet konvergenciafoka nyilván legalább $(k+1)$, ez a közelítőképlet azonban $\bmod f^{k+1}$ inkongruens az (55) alattival, amiből következik, hogy amaz nem lehet $(k+1)$ konvergenciafokú. Ugyanis

$$\Omega_{(k+1)(m+1)} \cdot \Omega_{km} - \Omega_{(k+1)m} \cdot \Omega_{k(m+1)} =$$

$$= \left[\sum_{\nu=0}^{k-1} E_{\nu(m+1)} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\right] \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{k-2} E_{\nu m} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\right] - \left[\sum_{\nu=0}^{k-1} E_{\nu m} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\right] \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{k-2} E_{\nu(m+1)} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\right] \equiv$$

$$\equiv (E_{(k-1)(m+1)} - E_{(k-1)m}) \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^{k-1} \not\equiv 0 \bmod f^k, \quad \text{ha} \quad k > 1,$$

azaz

$$\frac{\Omega_{(k+1)(m+1)}}{\Omega_{(k+1)m}} \not\equiv \frac{\Omega_{k(m+1)}}{\Omega_{km}} \bmod f^k,$$

ahonnét már látható, hogy

$$\Phi_{(k+1)m} \not\equiv \Phi_{km} \bmod f^{k+1}.$$

Az (55) képlet konvergenciafoka természetesen nem változik, ha a jobb oldalon, vagy csak a számlálóban, vagy csak a nevezőben Ω első indexét k-nál nagyobb értékkel helyettesítjük. Így kapjuk pl. az

$$x - \frac{\Omega_{k(m+1)}}{\Omega_{(k+1)m}} \cdot \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{56}$$

közelítőképlet, mely $m = -k$ választással a *Bernoulli-féle közelítő formulát* szolgáltatja, (vö. I. rész (15)). Ennek bizonyítására tekintsük a (20) relációt, amelyből a (15 *b*) és az (52) felhasználásával állításunk azonnal következik:

$$\frac{N_{k-1}}{N_k}\cdot f=\frac{\sum_{\nu=0}^{k-2} E^*_{\nu(k-1)}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{k-1-\nu}}{\sum_{\nu=0}^{k-1} E^*_{\nu k}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{k-\nu}}=\frac{\sum_{\nu=0}^{k-2} E^*_{\nu(k-1)}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}}{\sum_{\nu=0}^{k-1} E^*_{\nu k}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}}\cdot\frac{f}{f'}=$$

$$=\frac{\sum_{\nu=0}^{k-2} E_{\nu(-k+1)}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}}{\sum_{\nu=0}^{k-1} E_{\nu(-k)}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}}\cdot\frac{f}{f'}=\frac{\Omega_{k(-k+1)}}{\Omega_{(k+1)(-k)}}\cdot\frac{f}{f'}.$$

A (12) sorból kiindulva olyan közelítőképletet is konstruálhatunk, mely speciális esetben a *Kiss—Gornstein-féle képletsorozatot* adja. Szorozzuk meg mindkét oldalt

$$\left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right]^m\text{-nel:}$$

$$(a-x)^m=\sum_{\nu=0}^{\infty} E_{\nu m}\cdot\left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right]^{m+\nu},$$

és differenciáljunk mindkét oldalon $f(x)$ szerint:

$$-\frac{m\,(a-x)^{m-1}}{f'(x)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(m+\nu)\cdot E_{\nu m}\cdot\left[\frac{f(a)-f(x)}{f'(a)}\right]^{m+\nu-1}\cdot\left(-\frac{1}{f'(a)}\right).$$

Innét $x\to\xi$ helyettesítéssel és kis átalakítással az alábbi eredményt kapjuk:

$$\text{(57)}\qquad \frac{f'(a)}{f'(\xi)}\cdot\left[\frac{(a-\xi)f'(a)}{f(a)}\right]^{m-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{m+\nu}{m}\cdot E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^{\nu}.$$

Ezek után vezessük be az

$$\text{(58)}\qquad \Omega^*_{km}=\sum_{\nu=0}^{k-2}\frac{m+\nu}{m}\cdot E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\qquad (k=2,3,\ldots)$$

jelölést, amelynek segítségével az (57) új alakja:

$$\text{(57')}\qquad \frac{f'(a)}{f'(\xi)}\cdot\left[\frac{(a-\xi)f'(a)}{f(a)}\right]^{m-1}=\Omega^*_{km}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}\frac{m+\nu}{m}\cdot E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}.$$

Az (57')-t írjuk fel $(m-1)$ helyett m kitevővel, továbbá az (51')-t $m=1$

esetre. Ezekből és az (57')-ből nyerjük, hogy

$$\left[\Omega^*_{km}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}\frac{m+\nu}{m}\cdot E_{\nu m}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\right]\cdot\left[\Omega_{k1}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}E_{\nu}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}\right]=$$

$$=\Omega^*_{k(m+1)}+\sum_{\nu=k-1}^{\infty}\frac{m+1+\nu}{m+1}\cdot E_{\nu(m+1)}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu},$$

amelyből leolvasható az alábbi kongruencia:

$$\Omega^*_{km}\cdot\Omega_{k1}\equiv\Omega^*_{k(m+1)} \bmod f^{k-1}. \tag{59}$$

Az (59)-ből, csakúgy, mint az (53)-ból az (54), származik az

$$\Omega_{k1}\cdot\frac{f}{f'}\equiv\frac{\Omega^*_{k(m+1)}}{\Omega^*_{km}}\cdot\frac{f}{f'} \bmod f^k,$$

illetőleg az

$$\varepsilon_k(a)\equiv a-\frac{\Omega^*_{k(m+1)}}{\Omega^*_{km}}\cdot\frac{f}{f'} \bmod f^k$$

kongruencia, amelyből a II. rész IV. tétele alapján szintén következik, hogy a

$$\Phi^*_{km}(x)=x-\frac{\Omega^*_{k(m+1)}}{\Omega^*_{km}}\cdot\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{61}$$

közelítőképlet konvergenciafoka is legalább k-val egyenlő. Azt, hogy a (61) konvergenciafoka pontosan k-val egyenlő, az (55)-nél követett eljárással szintén bebizonyíthatjuk.

Végezetül tekintsük a (61)-ből $k\to(k+1)$ helyettesítéssel származó

$$\Phi^*_{(k+1)m}(x)=x-\frac{\Omega^*_{(k+1)(m+1)}}{\Omega^*_{(k+1)m}}\cdot\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{62}$$

közelítőképletet, melynek konvergenciafoka tehát: $(k+1)$. Ez a képlet $m=-k$ esetben a *Kiss—Gornstein*-féle képletsorozatot eredményezi. A *Kiss—Gornstein*-féle képletsorozat főrésze ugyanis a (30) felhasználásával:

$$\frac{K_{k-1}}{K_k}\cdot f=\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{k-2}\frac{k-1-\nu}{k-1}\cdot E^*_{\nu(k-1)}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{k-1-\nu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\frac{k-\nu}{k}\cdot E^*_{\nu k}\cdot\left(\frac{f'}{f}\right)^{k-\nu}}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\frac{k-1-\nu}{k-1}\cdot E^*_{\nu(k-1)}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}}{\sum\limits_{\nu=1}^{k-1}\frac{k-\nu}{k}\cdot E^*_{\nu k}\cdot\left(\frac{f}{f'}\right)^{\nu}}\cdot\frac{f}{f'},$$

ami viszont nem egyéb, (vö. (15 *b*) és (58)), mint a (62) képlet főrésze, ha benne m helyett $(-k)$-t írunk.

IRODALOM

[1] EULER, L.: *Institutiones Calculi Differentialis* II., Cap. IX. — Opera omnia. Ser. I. Vol. X. 422—455.

[2] LAGRANGE, J. L.; Nouvelle méthode pour résoudre les équations litérales par le moyen des séries. *Mém Acad. Berl.* 24 (1768) Oeuvres 3, 25.

[3] BODEWIG, E.: Konvergenztypen und das Verhalten von Approximationen in der Nähe einer mehrfachen Wurzel einer Gleichung. *ZAMM* 29 (1949). 45.

[4] KISS, I.: Die theoretischen Grundlagen der Radizierung mit der Rechenmaschine, *Acta Technica Hung.* Tom. VIII. (1954) Fasc. 3—4.

[5] WUNDT, H.: Eine neue Methode der Periodogrammanalyse und ihre Anwendung auf die Reihe der Sonnenfleckenrelativzahlen, Basel, 1950 (Dissertation).

(Beérkezett: 1958. VIII. 13)

Agrártudományi Egyetem
Mezőgazdasági Gépészmérnöki Kar
Fizika—Matematika Tanszék