

NÉHÁNY ÁLTALÁNOSABB MÓDSZER AZ EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEGYENLETEK ELMÉLETÉBEN ÉS A FÜGGVÉNYEGYENLETEK EGYES ÚJABB ALKALMAZÁSAI, I.*

Írta: ACZÉL JÁNOS

A függvényegyenletek elméletében — ellentétben pl. a differenciál-egyenletek elméletével — kevés általános megoldási módszert, egzisztencia- és unicitási tételt ismerünk. (Nem foglalkozunk itt a differenciál-, integrál- stb. egyenletekre való visszavezetéssel történő megoldási eljárásokkal.)

A jelen dolgozat első részében az egyváltozós és e változó két tetszőleges értékét tartalmazó függvényegyenletek hat típusára adok meg néhány ilyen eljárást és tételt. Ezek közül az I. 1. és 2. §-ban ismertetettek ismert függvényegyenletek megoldásának, a 3. és 4. §-ban ismertetettek a szerző által régebben tárgyalt speciális függvényegyenletek megoldási eljárásának általánosításaként keletkeztek. Figyelemre méltó, hogy az egyváltozós függvényegyenletek megoldhatóságára vonatkozó feltételek itt kétváltozós függvényegyenletek alakjában jelentkeznek, ami további érdekes perspektívát mutat. E feltételeket régebbi dolgozatokban bebizonyított tételek felhasználásával bizonyítjuk. Az 5. és 6. §-ban további újabb eljárások alkalmazásával értünk célt, melyek bizonyos (általában nem lineáris) egyenletrendszerek megoldásán alapszanak, és itt a megfelelő tételek éppen ezen egyenletrendszerek megoldhatóságában jelölik meg az illető függvényegyenlet az adott módszerrel való megoldhatósági feltételeit. Többek között megkapjuk az 5. § elején az

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cos y$$

függvényegyenlet egyszerű megoldását:

$$f(x) = a \cos x + b \sin x,$$

melyet ST. KACZMARZ előzőleg nehezebb valós függvénytani eszközökkel oldott meg.

* A jelen dolgozat a bevezetéstől és néhány apróbb változtatástól eltekintve magyar nyelvű megfelelője a szerzőtől az Uszpechi Mat. Nauk. 11. kötete 3. füzetében a 3—68. oldalon megjelent orosz nyelvű cikknek.

A következő függvényegyenleteket fogjuk részletesebben tárgyalni:

$$(1) \quad f(x+y) = G[f(x), f(y)] \quad (\text{I. 1. §}),$$

$$(2) \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = G[f(x), f(y)] \quad (\text{I. 2. §}),$$

$$(3) \quad f(ax+by+c) = G[f(x), f(y)] \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ (3') \quad f[F(x, y)] = G[f(x), f(y)] \end{array} \right. \quad (\text{I. 3. §}),$$

$$(4) \quad f(x+y) = F[f(x), y] \quad (\text{I. 4. §}),$$

$$(5) \quad H[f(x+y), f(x-y), f(x), x, y] = 0 \quad (\text{I. 5. §}),$$

$$(6) \quad H[f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y] = 0 \quad (\text{I. 6. §}),$$

de a még általánosabb

$$f(ax+by+c) = G[f(x), f(y), x, y]$$

és

$$f[F(x, y)] = G[f(x), x, y]$$

függvényegyenletek megoldására is vázolunk eljárásokat.

Amint látjuk, egyenleteink ismert függvényegyenleteknek néha közvetlen, néha azonban eléggé messzemenő általánosításai.

Az I. 1., 2., 3. §-ban ismertetett eljárások a megoldás folytonosságának, monotonitásának feltételezése mellett oldják meg a szóban forgó függvényegyenletet. A 4., 5. és 6. § eljárásai (a 6. § harmadik eljárása kivételével) és tételei viszont mindennemű folytonossági, monotonitási, sőt mérhetőségi feltételek nélkül vezetnek a tárgyalt függvényegyenlet megoldására.

Függvényegyenletek különböző alkalmazásával az irodalomban számos dolgozat foglalkozik, a szerző is megadott régebbi dolgozataiban néhány további ilyen alkalmazást. A jelen dolgozat második része újabb ilyen alkalmazásokat tárgyal, amennyiben a matematika különböző részeiből (geometriai csoportelmélet, vektoralgebra, nem-euklidesi geometria, valószínűségszámítás stb.) további hat olyan problémát ad meg, melyek megoldása függvényegyenletek megoldása révén történik. Ezen egyenletek részben egyváltozós, részben többváltozós függvényegyenletek (vektor-, mátrixegyenletek). Az előbbiek a dolgozat első részében tárgyalt típusokhoz tartoznak, az utóbbiak ilyeneknek, vagy az első részben szereplő többváltozós feltételi egyenleteknek közvetlen általánosításai.

A II. 1. §-ban a (3) típusú egyenletekre visszavezethető

$$f\left(\frac{1-x^2-y^2}{2xy}\right) = f\left(\frac{1+x^2-y^2}{2x}\right) + f\left(\frac{1-x^2+y^2}{2y}\right)$$

függvényegyenlet megoldása révén kimutatjuk, hogy az elliptikus, illetve hiper-

bolikus „mozgásokkal” („ortogonális” transzformációkkal) szemben invariáns és egy egyenesen additív távolságdefiníció lényegében csak az elliptikus, illetve hiperbolikus geometriában szokásos módon adható meg.

A II. 2. §-ban az (5) típusú

$$(7) \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cos y$$

függvényegyenlet szerepel, melynek megoldása révén arra az eredményre jutunk, hogy a vektorösszeadásra disztributív művelet homogén térben lényegében (egy-egy multiplikatív konstanstól eltekintve) csak a szokásos skaláris, illetve vektoriális szorzás lehet. Az eredményből egyébként könnyen levezethetők hasonló tételek a kvaterniószorzásra vonatkozóan.

A II. 3. §-ban először a

$$(8) \quad F[F(x, s), t] = F[x, g(s, t)]$$

n -dimenziós vektor-függvényegyenletet (F, x n -dimenziós vektorok, g, s, t egy-egy valós paraméter) oldjuk meg. (Ez általánosítása egy az I. 4. §-ban szereplő függvényegyenletnek.) — Az eredmény geometriai csoportelméleti értelmezése a következő: n -dimenziós egy paraméteres transzformáció-seregben mindig bevezethető additív paraméter és akkor (egy egyszerű megoldhatósági feltétel teljesülése esetén) a sereg egy koordinátatranszformációval mindig átvihető egy koordinátapárhuzamos eltolás-seregbe. Ezt eddig csak differenciálhatósági feltételek mellett mutatták ki. A már additív paraméterrel felírt

$$F[F(x, u), v] = F(x, u+v)$$

egyenlet a stacionárius mozgásintegrálokra (és homogén láncreakciók generátorfüggvényeire) is jellemző, míg nem-stacionárius mozgásoknál (és inhomogén láncreakciók generátorfüggvényeinél) az

$$F[F(x, t, u), v] = F(x, t, v)$$

egyenlet lép a helyébe, melyet szintén megoldunk a II. 3. §-ban.

A II. 4. §-ban a (8) általánosításaként az

$$F[F(x, S), T] = F[x, G(S, T)]$$

(F, x n -dimenziós vektorok, G, S és T $m (\leq n)$ dimenziós paraméterek) egyenletet oldjuk meg a paraméterekre vonatkozó adott $G(S, T)$ kompozíciós szabály mellett. Az eredmény analóg az egy additív paraméter esetén találttal.

A II. 5. §-ban azt vizsgáljuk, mi annak a valószínűsége, hogy egy esemény egy (s, t) időszakban k -szor következik be, csak azt tételezve fel, hogy az idegen időszakokban bekövetkező eseményszámok függetlenek egymástól, és hogy nincs kizárva, hogy az esemény egyszer sem fordul elő.

Ennek $p_k(t, u)$ ($a \leq t \leq u \leq b$) valószínűségére a

$$p_k(t, u) = e^{\sum_{n=1}^{\infty} [f_n(t) - f_n(u)]} \sum_{\substack{r_1+2r_2+\dots+kr_k=\dots=k \\ r_j \geq 0}} \prod_{j=1}^k \frac{[f_j(u) - f_j(t)]^{r_j}}{r_j!} \geq 0$$

képletet (összetett inhomogén Poisson-eloszlás) kapjuk a

$$p_n(s, u) = \sum_{k=0}^n p_{n-k}(s, t) p_k(t, u) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t, u) = 1$$

$$[s < t < u, \quad p_n(t, u) \geq 0, \quad p_0(a, b) \neq 0]$$

végtelen függvényegyenletrendszer megoldása révén. (Ennek egyenletei a homogén esetben az (1) típusúakra redukálható

$$p_0(t+u) = p_0(t) p_0(u)$$

$$p_1(t+u) = p_1(t) p_0(u) + p_0(t) p_1(u)$$

$$p_2(t+u) = p_2(t) p_0(u) + p_1(t) p_1(u) + p_0(t) p_2(u)$$

.....stb.

függvényegyenletrendszerbe mennek át.) Hasonló eredményeket előzőleg ritkassági, integrálhatósági feltételek mellett bizonyítottak be.

Végül a II. 6. §-ban a fentivel rokon problémát vizsgálunk: az $E_1, E_2, \dots, E_n$ lehetséges állapotok közti átmenetek $p_{ij}(s, t)$ ($s < t$; $i, j=1, 2, \dots, n$) valószínűségei nyilván a

$$(9) \quad p_{ij}(s, n) = \sum_{k=1}^n p_{ik}(s, t) p_{kj}(t, u) \quad (s < t < u; i, j=1, 2, \dots, n)$$

$$(10) \quad \sum_{j=1}^n p_{ij}(t, u) = 1 \quad (t < u; i=1, 2, \dots, n)$$

$[p_{ij}(s, t) \geq 0, |p_{ij}| \neq 0]$ függvényegyenletrendszernek tesznek eleget, melyek közül a (9) egyenletek a

$$P(s, u) = P(s, t) P(t, u)$$

matrixegyenletbe foglalhatók össze, mely ugyancsak az (1) típusú

$$p(t+u) = p(t) p(u)$$

függvényegyenlet inhomogén matrix-általánosítása. Kimutatjuk, hogy e matrixegyenlet legáltalánosabb reguláris megoldása

$$P(t, u) = \Pi(t)^{-1} \Pi(u)$$

alakú, ahol $\Pi(v)$ a $\pi_{ij}(v)$ tetszőleges függvényekből alkotott reguláris matrix ($|\pi_{ij}| \neq 0$), melynek $\Pi(v)^{-1}$ az inverze. (Röviden a szinguláris esetet is tárgyaljuk.) A feltételeinket kielégítő átmeneti valószínűségfüggvények:

$$p_{ij}(t, u) = \sum_{k=1}^n \Pi_{ki}(t) \pi_{kj}(u) \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

($\Pi_{ki}(t)$ a $\pi_{ki}(t)$ algebrai minora osztva a $|\pi_{ij}(t)|$ determinánssal), ahol (10)-ből még a

$$\sum_{j=1}^n \pi_{kj}(t) = \text{konstans} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

megszorítás következik. Ez tartalmazza az összetett inhomogén Poisson-eloszlásra vonatkozó fenti eredményt is. — Befejezésül említés történik az (1) függvényegyenletet általánosító

$$f(x, z) = G[f(x, y), f(y, z)]$$

függvényegyenlet és még két általános függvényegyenlet megoldásáról általános terekben.

Tételeinket néhol az itt megfogalmazottnál valamivel általánosabb alakban bizonyítjuk be.

A dolgozat lényegesebb része a II. rész. Az I. rész részben ennek bevezetéséül szolgál és magában csak azért lehet érdekes, mert még ilyen egyszerű módszerek tárgyalása sem található meg az eddigi irodalomban.

I. ÁLTALÁNOS MÓDSZEREK¹

I. 1. § $f(x+y) = G[f(x), f(y)]$

Az

$$(1) \quad f(x+y) = G[f(x), f(y)]$$

függvényegyenlet a *Cauchy-féle* ([2])

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (f(x) = ax)$$

és

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (f(x) = a^x)$$

egyenletek általánosításaként tárgyalható.

Például a

$$(11) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$$

¹ Vö. [35]

függvényegyenletből

$$f(x+y+z) = f(x) + f(y) + f(z) + f(x)f(y) + f(x)f(z) + f(y)f(z) + f(x)f(y)f(z)$$

és így tovább.

$$(12) \quad \begin{aligned} f(2x) &= 2f(x) + f(x)^2 = [1 + f(x)]^2 - 1, \\ f(3x) &= 3f(x) + 3f(x)^2 + f(x)^3 = [1 + f(x)]^3 - 1, \end{aligned}$$

általában

$$f(nx) = [1 + f(x)]^n - 1,$$

mert ha ez egy $n = k$ -ra teljesül:

$$f(kx) = [1 + f(x)]^k - 1,$$

akkor

$$\begin{aligned} f[(k+1)x] &= f(kx+x) = f(x) + f(kx) + f(x)f(kx) = \\ &= f(x) + [1 + f(x)]^k - 1 + f(x)[1 + f(x)]^k - f(x) = \\ &= [1 + f(x)]^{k+1} - 1. \end{aligned} \quad \text{qu. e. d.}$$

Így $x=1$, illetve $x=\frac{m}{n}$ helyettesítéssel az $f(1)=c$ jelölést használva

$$f(n) = (1+c)^n - 1, \quad f(m) = (1+c)^m - 1,$$

ill.

$$(1+c)^m - 1 = f\left(n \frac{m}{n}\right) = \left[1 + f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n - 1,$$

tehát

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = (1+c)^{\frac{m}{n}} - 1.$$

(Többértékűség esetén mindig a pozitív gyököt kell venni, mert (12)-ből $1 + f(x) = \left[1 + f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \geq 0$.) Pozitív irracionális x -ekre, $f(x)$ folytonosságát feltételezve határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = (1+c)^x - 1 = k^x - 1 \quad (k=1+c).$$

Másrészt, ha $f(x)$ értelmezési tartománya a 0-t, illetve a negatív számokat is tartalmazza, akkor az eredeti (11) egyenletbe $x=0$ -t helyettesítve

$$f(y) = f(0) + f(y) + f(0)f(y),$$

tehát vagy $f(y) \equiv -1$, vagy

$$f(0) = 0$$

és ugyancsak (11)-be $y = -x$ -et téve,

$$\begin{aligned} 0 &= f(x-x) = f(x) + f(-x) + f(x)f(-x) = \\ &= k^x - 1 + f(-x) + (k^x - 1)f(-x), \end{aligned}$$

tehát

$$f(-x) = k^{-x} - 1.$$

Így minden valós x -re (11)-ből

$$f(x) = k^x - 1 \quad \text{vagy} \quad f(x) \equiv -1$$

következik. Másrészt ezek a függvények valóban ki is elégítik a (11) függvényegyenletet:

$$-1 = -1 - 1 + (-1)(-1),$$

ill.

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) + f(x)f(y) &= k^x - 1 + k^y - 1 + (k^x - 1)(k^y - 1) = \\ &= k^x + k^y - 2 + k^{x+y} - k^x - k^y + 1 = k^{x+y} - 1 = f(x+y). \end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (11) függvényegyenletnek legáltalánosabb folytonos megoldásai $f(x) \equiv -1$ és

$$f(x) = k^x - 1,$$

és így az utóbbi a legáltalánosabb (folytonos és) szigorúan monoton megoldás.

Ez a *megoldási eljárás* általában is alkalmazható az (1) típusú függvényegyenletek megoldására:

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(x+y) = G[f(x), f(y)], \\ & f(2x) = G[f(x), f(x)] = G_2[f(x)], \\ & \dots\dots\dots \\ & f(nx) = G\{f(x), f[(n-1)x]\} = G\{f(x), G_{n-1}[f(x)]\} = G_n[f(x)]. \end{aligned}$$

Ebből $f(1) = c$ jelöléssel $x = 1$, ill. $x = \frac{m}{n}$ helyettesítés után

$$f(n) = G_n(c), \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = G_n^{-1}[G_m(c)],$$

ahol $G_n^{-1}(x)$ a G_n függvény inverz függvénye. Folytonos f esetén határátmenettel minden pozitív irracionális x -re is megkaphatjuk $f(x)$ értékét:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n)$$

ahol $\{r_n\}$ racionális számoknak egy x -hez tartó sorozata.

Ha a 0 ill. a negatív számok is $f(x)$ értelmezési tartományához tartoznak, akkor $f(0)$ az

$$f(0) = G[f(0), f(0)]$$

egyenletből (ez nem lehet azonosság), $f(-x)$ az

$$f(0) = G[f(x), f(-x)]$$

egyenletből határozható meg.

Itt is, a következőkben is, behelyettesítéssel győződhetünk meg róla, hogy a kapott megoldás eleget is tesz-e az eredeti egyenletnek, vagy még specializálni kell, vagy esetleg egyáltalán nincs (nem triviális) megoldás.

Arra, hogy egy (1) típusú függvényegyenletnek mikor létezik (folytonos, szigorúan monoton) megoldása, tehát, hogy a fenti módszer mikor vezet el a függvényegyenlet megoldására, azonnal kapunk egy szükséges feltételt, ha (1)-be $(x+y)$ és z , illetve x és $(y+z)$ -t helyettesítünk:

$$\begin{aligned} f[(x+y)+z] &= G[f(x+y), f(z)] = G\{G[f(x), f(y)], f(z)\}, \\ f[x+(y+z)] &= G[f(x), f(y+z)] = G\{f(x), G[f(y), f(z)]\}. \end{aligned}$$

Tehát $f(x)=s, f(y)=t, f(z)=u$ jelöléssel az (1) egyenletnél folytonos és szigorúan monoton megoldás létezésének egyik szükséges feltételét

$$(13) \quad G[G(s, t), u] = G[s, G(t, u)]$$

alakban kaptuk. Másrészt a fenti helyettesítéssel azonnal adódik (1)-ből, hogy

$$G(s, t) = f[f^{-1}(s) + f^{-1}(t)],$$

tehát az (1) függvényegyenlet megoldhatósága nyilván azt jelenti, hogy létezik olyan folytonos és szigorúan monoton $f(x)$ függvény, amellyel $G(s, t)$ így állítható elő. És ez adja egyúttal mindjárt a folytonos és szigorúan monoton megoldás létezésének másik szükséges feltételét: mivel $f(x)$ -et folytonosnak és szigorúan monotonnak kívántuk, ezért G -nek is folytonosnak és mindkét változójában szigorúan növekvőnek kell lennie.

A következő, a [16] dolgozatban bebizonyított tétel segítségével megmutatjuk, hogy e szükséges feltételek elégségesek is:

1°. TÉTEL: Ha $G(t, u) [t, u, G(t, u) \in \langle a, b \rangle]$ folytonos és mindkét változójában szigorúan növekvő kétváltozós függvény, amely eleget tesz a (13) függvényegyenletnek, akkor, és csak akkor létezik olyan folytonos és szigorúan monoton $g(t)$ függvény, amellyel $G(t, u)$ így állítható elő:

$$G(t, u) = g^{-1}[g(t) + g(u)].$$

Ha itt még a $g(t)=x, g(u)=y, t=g^{-1}(x)=f(x), u=f(y)$ jelöléssel élünk, akkor teljesen bebizonyítottuk a következő tétel első (exisztencia) állítását:

1. TÉTEL: Az (1) függvényegyenletnek akkor és csak akkor létezik folytonos és szigorúan monoton megoldása, ha $G(t, u)$ folytonos és mindkét változójában növekvő, továbbá eleget tesz a

$$(13) \quad G[G(s, t), u] = G[s, G(t, u)]$$

(asszociativitási) függvényegyenletnek.

Ha $f(x)$ ilyen megoldása (1)-nek, akkor minden

$$h(x) = f(ax)$$

is megoldás és más mérhető megoldás nincs. (Vö. [8]-cal is.)

A második (unicitási) állítást így bizonyítjuk:

Ha

$$f(x+y) = G[f(x), f(y)], \quad G(t, u) = f[f^{-1}(t) + f^{-1}(u)]$$

és

$$h(x+y) = G[h(x), h(y)] = f[f^{-1}h(x) + f^{-1}h(y)],$$

akkor

$$f^{-1}h(x+y) = f^{-1}h(x) + f^{-1}h(y),$$

vagyis $f^{-1}h(x) = \varphi(x)$ jelöléssel

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

tehát ([2]):

$$\varphi(x) = ax, \quad h(x) = f(ax)$$

qu. e. d.

További példák eljárásunkra:

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)} \quad \text{MEGOLDÁS: } f(x) = \operatorname{tg} ax \text{ ([8], [32] vö. [33])},$$

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+\frac{f(x)f(y)}{c^2}} \quad \text{MEGOLDÁS: } f(x) = c \operatorname{th} ax \text{ ([36])},$$

és

$$(14) \quad f(x+y) = f(x)^{\ln f(y)}, \quad (f(x) > 0) \quad \text{MEGOLDÁS: } f(x) = e^{ax}.$$

$$\text{A } G(t, u) = \frac{t+u}{1-tu}, \quad G(t, u) = \frac{t+u}{1+\frac{tu}{c^2}}, \quad G(t, u) = t^{\ln u} \text{ függvények eleget}$$

tesznek az 1. tétel feltételeinek (folytonosság, szigorú monotonitás és (13) asszociativitás), amiből következik függvényegyenleteink megoldhatósága.

A (14) egyenlet megoldását részletezve:

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(x)^{\ln f(x)} = e^{[\ln f(x)]^2} \\ &\dots\dots\dots \\ f(nx) &= e^{[\ln f(x)]^n} \end{aligned}$$

és $f(1) = c$, $\ln c = a$ jelöléssel

$$f(n) = e^{an}$$

$$e^{am} = f\left(n \frac{m}{n}\right) = e^{\left[\ln f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n}, \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = \exp a^{\frac{m}{n}}.$$

Határátmenettel:

$$f(x) = e^{ax}$$

minden pozitív valós x -re.

(14)-be $y = 0$ -t helyettesítve

$$f(x) = f(x)^{\ln f(0)},$$

amiből vagy $f(x) \equiv 1$, vagy

$$\ln f(0) = 1, \quad f(0) = e.$$

Hasonlóképpen $y = -x$ -et helyettesítve (14)-be:

$$e = f(0) = f(x)^{\ln f(-x)} = e^{ax \ln f(-x)}, \quad f(-x) = e^{-ax}.$$

Tehát (14) általános folytonos megoldása $f(x) \equiv 1$ -en kívül

$$f(x) = e^{ax},$$

mert ez valóban ki is elégíti (14)-t:

$$f(x)^{\ln f(y)} = (e^{ax})^{ay} = e^{a^{x+y}} = f(x+y).$$

Hasonló módszerekkel oldhatók meg az általánosabb

$$f(x+y) = G[f(x), f(y), x, y],$$

sőt az

$$f(x+y) = G[f(x-y), f(x), f(y), x, y]$$

típusú függvényegyenletek is. — Ezekre az I. 6. §-ban még visszatérünk

$$\text{I. 2. § } f\left(\frac{x+y}{2}\right) = G[f(x), f(y)]$$

A

$$(2) \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = G[f(x), f(y)]$$

függvényegyenlet a Jensen-féle ([5])

$$(15) \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

egyenlet általánosításaként tárgyalható.

E (15) egyenletet a következőképpen vezethetjük vissza (1) típusú egyenletre:

(15)-ben x helyébe $(x+y)$ -t, y helyébe 0 -t helyettesítve

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)+f(0)}{2} = \frac{f(x+y)+a}{2},$$

[itt $a=f(0)$ nem határozható meg $x=y=0$ helyettesítéssel, mert az $f(0)=f(0)$ -t adna], és ezt (15)-tel összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - a.$$

Ez már (1) típusú egyenlet és a $\varphi(x) = f(x) - a$ helyettesítéssel a *Cauchy*-féle ([2])

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

függvényegyenletbe megy át:

$$\varphi(x) = cx, \quad f(x) = cx + a,$$

és ez valóban kielégíti (15)-öt:

$$c \frac{x+y}{2} + a = \frac{(cx+a) + (cy+a)}{2}.$$

De megoldhatjuk a (15) függvényegyenletet közvetlenül is, pl. $0 \leq x \leq 1$ -re:

Az $f(0)=a$, $f(1)=b$ jelöléssel (15)-ben $x=0$, $y=1$ -et, majd $x=0$,

$y=\frac{1}{2}$, ill. $x=\frac{1}{2}$, $y=1$ -et téve

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a+b}{2},$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} = \frac{3a+b}{4} = a + \frac{1}{4}(b-a),$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{a+b}{2} + b}{2} = \frac{a+3b}{4} = a + \frac{3}{4}(b-a).$$

Általában is igaz, hogy (a rövidebb $b-a=c$ jelöléssel)

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = a + \frac{m}{2^n}(b-a) = a + c \frac{m}{2^n}.$$

Ha ugyanis ezt n -re (2^n nevezőjű törtekre) már bizonyítottuk, vesszük, akkor 2^{n+1} nevezőjű törtknél páros számlálóra természetesen

$$f\left(\frac{2m}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{m}{2^n}\right) = c \frac{m}{2^n} + a = c \frac{2m}{2^{n+1}} + a.$$

Páratlan számlálójú törtknél viszont (15)-be $x = \frac{m}{2^n}$, $y = \frac{m+1}{2^n}$ -et helyettesítve kapjuk, hogy

$$f\left(\frac{2m+1}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{\frac{m}{2^n} + \frac{m+1}{2^n}}{2}\right) = \frac{c \frac{m}{2^n} + a + c \frac{m+1}{2^n} + a}{2} = c \frac{2m+1}{2^{n+1}} + a.$$

Vagy másképp: Ha $k \leq 2^n$

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{0 + \frac{k}{2^n}}{2}\right) = \frac{f(0) + f\left(\frac{k}{2^n}\right)}{2} = \frac{a + c \frac{k}{2^n} + a}{2} = c \frac{k}{2^{n+1}} + a$$

Ha pedig $k \geq 2^n$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) &= f\left(\frac{\frac{k-2^n}{2^n} + 1}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{k-2^n}{2^n}\right) + f(1)}{2} = \\ &= \frac{(b-a)\left(\frac{k-2^n}{2^n}\right) + a + b}{2} = c \frac{k}{2^{n+1}} + a. \end{aligned}$$

Nem diadikus x -ekre határátmenettel

$$f(x) = cx + a.$$

A $[0, 1]$ intervallumon kívülre is könnyen kiterjeszthető a megoldás, mely megegyezik az előbb találttal.

Ezek a *megoldási eljárások* általában is alkalmazhatók a (2) típusú függvényegyenletekre:

1. A (2) egyenletbe x helyébe $(x+y)$ -t, y helyébe 0 -t téve és az így kapott

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = G[f(x+y), a]$$

egyenletet (2)-vel összehasonlítva azt az (1) típusú

$$G[f(x+y), a] = G[f(x), f(y)]$$

egyenletre tudjuk visszavezetni. [Itt $f(0) = a$ nem határozható meg $a = G(a, a)$ -ból, mert $x \equiv G(x, x)$.]

2a) A

$$f(0) = a, \quad f(1) = b,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = G(a, b),$$

.....

$$f\left(\frac{2m+1}{2^{n+1}}\right) = G\left[f\left(\frac{m}{2^n}\right), f\left(\frac{m+1}{2^n}\right)\right]$$

egyenletekkel rekurzíve meghatározzuk $f(x)$ -et minden diadikus tört $x = \frac{m}{2^n}$ helyen.

2b) Egy másik hasonló rekurzív eljárás:

$$f(0) = a, \quad f(1) = b,$$

.....

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = G\left[a, f\left(\frac{k}{2^n}\right)\right], \quad \text{ha } k \leq 2^n,$$

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = G\left[f\left(\frac{k-2^n}{2^n}\right), b\right], \quad \text{ha } k \geq 2^n.$$

Nem-diadikus x -ekre

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(d_n),$$

ahol $\{d_n\}$ diadikus törteknek egy x -hez tartó sorozata és így tovább. $x < 0$ és $x > 1$ -re az $a = G[f(x), f(-x)]$, $b = G[f(x), f(2-x)]$ képletekből határozható meg $f(x)$ értéke.

A (2) egyenlet folytonos és szigorúan monoton megoldásának létezésére $G(t, u)$ folytonosságán és növekedésén kívül további szükséges feltétel itt úgy adódik, hogy (2)-be $\frac{x+y}{2}$ és z -t, illetve $\frac{x+z}{2}$ és $\frac{z+y}{2}$ -t helyettesítsünk:

$$f\left(\frac{\frac{x+y}{2} + z}{2}\right) = G\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right), f(z)\right] = G\{G[f(x), f(y)], f(z)\},$$

$$f\left(\frac{\frac{x+z}{2} + \frac{z+y}{2}}{2}\right) = G\left[f\left(\frac{x+z}{2}\right), f\left(\frac{z+y}{2}\right)\right] = G\{G[f(x), f(z)], G[f(z), f(y)]\},$$

tehát a megoldás létezéséhez szükséges a

$$(16) \quad G[G(s, t), u] = G[G(s, u), G(u, t)]$$

feltétel teljesülése is (ferde autodisztributivitás).

Itt (2)-ből azt látjuk, hogy folytonos és szigorúan monoton megoldás létezése azt jelenti, hogy van olyan folytonos és szigorúan monoton $f(x)$ függvény, amellyel a G függvény a

$$G(s, t) = f\left(\frac{f^{-1}(s) + f^{-1}(t)}{2}\right)$$

alakban állítható elő.

Hogy a fenti szükséges feltételek elégségesek is, azt Cz. RYLL-NARDEWSKI következő tétele bizonyítja ([19]):

2₁^o. TÉTEL: Ha $G(t, u) [t, u \in \langle a, b \rangle]$ folytonos és szigorúan növekvő kétváltozós függvény, amely eleget tesz a (16) függvényegyenleteknek, akkor és csak akkor látszik olyan folytonos és szigorúan monoton $g(t)$ függvény, amellyel G a

$$G(t, u) = g^{-1}\left(\frac{g(t) + g(u)}{2}\right)$$

alakban állítható elő.

(Vö. [20]-szal is; $G(t, u)$ folytonosságának feltétele még enyhíthető egy egyenesen való folytonossággá.)

Az $x = g(t)$, $y = g(u)$, $t = g^{-1}(x) = f(x)$, $u = f(y)$ jelöléssel kapjuk a következő tétel első állítását:

2₁. TÉTEL: A (2) függvényegyenletnek akkor és csak akkor van folytonos és szigorúan monoton megoldása, ha $G(t, u)$ folytonos, növekvő és eleget tesz a

$$(16) \quad G[G(s, t), u] = G[G(s, u), G(u, t)]$$

függvényegyenletnek (ferde autodisztributivitás).

Ha $f(x)$ ilyen megoldása (2)-nek, akkor minden

$$h(x) = f(cx + a)$$

is megoldás és más mérhető megoldás nincs is.

A második, unicitási állítást megint így bizonyítjuk:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = G[f(x), f(y)], \quad G(t, u) = f\left(\frac{f^{-1}(t) + f^{-1}(u)}{2}\right)$$

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right) = G[h(x), h(y)] = f\left(\frac{f^{-1}h(x) + f^{-1}h(y)}{2}\right),$$

vagyis $\varphi(x) = f^{-1}h(x)$ jelöléssel éppen a (15) Jensen-féle

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}$$

egyenletet kapjuk, tehát

$$\varphi(x) = cx + d,$$

$$h(x) = f(cx + d),$$

és fordítva $f(x)$ -szel együtt nyilván $h(x) = f(cx + d)$ is kielégíti a (2) függvényegyenletet, qu. e. d.

Egy másik feltételrendszert kapunk (2) megoldásának létezésére a következőképpen:

(2)-ből

$$G[f(x), f(y)] = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{y+x}{2}\right) = G[f(y), f(x)],$$

másrészt $y = x$ helyettesítéssel

$$f(x) = G[f(x), f(x)],$$

végül x helyébe $\frac{x+y}{2}$ és y helyébe $\frac{u+v}{2}$ -t, majd x helyébe $\frac{x+u}{2}$ -t és y helyébe $\frac{y+v}{2}$ -t helyettesítve

$$f\left(\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{u+v}{2}}{2}\right) = G\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right), f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] = G\{G[f(x), f(y)], G[f(u), f(v)]\},$$

$$f\left(\frac{\frac{x+u}{2} + \frac{y+v}{2}}{2}\right) = G\left[f\left(\frac{x+u}{2}\right), f\left(\frac{y+v}{2}\right)\right] = G\{G[f(x), f(u)], G[f(y), f(v)]\}.$$

A kapott szükséges feltételek

$$G(x, y) = G(y, x) \quad (\text{szimmetria}),$$

$$G(x, x) = x \quad (\text{reflexivitás})$$

és

$$(17) \quad G[G(x, y), G(u, v)] = G[G(x, u), G(y, v)] \quad (\text{biszimmetria})$$

a folytonossággal és növekedéssel együtt elégségesek is, ami következik a [13] dolgozatban bebizonyított, itt következő tételből:

2₂. TÉTEL: Ha $G(t, u)$ folytonos, szigorúan növekvő szimmetrikus, reflexív és biszimmetrikus, akkor és csak akkor létezik oly folytonos és szigorúan monoton $g(x)$ függvény, amellyel $G(t, u)$ így állítható elő:

$$G(t, u) = g^{-1} \left(\frac{g(t) + g(u)}{2} \right).$$

(A két feltételrendszer ekvivalenciáját közvetlenül B. KNASTER [20] bizonyította be.)

A $g(t) = x$, $g(u) = y$, $t = g^{-1}(x) = f(x)$, $u = f(y)$ jelöléssel kapjuk az itt következő alternatív tételt:

2₂. TÉTEL: A 2₁ tétel állításai érvényben maradnak, ha (16)-ot a következő három függvényegyenlet-feltétellel helyettesítjük:

$$\begin{aligned} (17) \quad & G[G(x, y), G(u, v)] = G[G(x, u), G(y, v)] && \text{(biszimmetria)} \\ & G(x, x) = x && \text{(reflexivitás)} \\ & G(x, y) = G(y, x) && \text{(szimmetria).} \end{aligned}$$

Példaként még tárgyaljuk az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$$

függvényegyenletet, melyet N. I. LOBACSEVSZKIJ [3] a párhuzamossági szög képletének meghatározására használt. A $G(t, u) = \sqrt{tu}$ függvény eleget tesz a 2₁, ill. 2₂ tétel feltételeinek, tehát függvényegyenletünknek van megoldása. A megoldás:

$$f(x) = ac^x = ae^{\frac{x}{k}},$$

amit így kapunk meg pl. a fenti első módszerrel:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)},$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x+y)a},$$

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{a},$$

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{a},$$

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y),$$

ennek megoldása (CAUCHY [2]):

$$\varphi(x) = c^x,$$

tehát

$$f(x) = ac^x$$

qu. e. d.

Módszereink az általánosabb

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = G[f(x), f(y), x, y]$$

alakú függvényegyenletekre is alkalmazhatók.

Ezek egyébként az $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$ helyettesítéssel az

$$f(u) = G[f(u+v), f(u-v), u+v, u-v]$$

alakra hozhatók, ami az 1. 5. §-ban tárgyalandó

$$(5) \quad H[f(x+y), f(x-y), f(x), x, y] = 0$$

típushoz tartozik. Fordítva, az (5) alakú egyenletek

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}$$

helyettesítéssel a

$$H\left[f(u), f(v), f\left(\frac{u+v}{2}\right), \frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right] = 0$$

alakra hozhatók és az e §-ban ismertetett módszerekkel tárgyalhatók. Pl. a fenti példánkban tárgyalt függvényegyenlet is LOBACSEVSKIJ-nél eredetileg ([3]) az

$$f(c)^2 = f(c+\beta)f(c-\beta)$$

alakban lépett fel és az ő megoldása lényegében az I. 1. §-ban említett módszer szerint halad.

$$\text{I. 3. §} \quad f(ax+by+c) = G[f(x), f(y)], f[F(x, y)] = G[(x), f(y)]$$

A

$$(3) \quad f(ax+by+c) = G[f(x), f(y)]$$

függvényegyenlet típust, mely általánosítása az (1) és (2) egyenleteknek és rájuk visszavezethető, csak rövidebben tárgyaljuk, mert részben már foglalkoztunk vele a [14] és [15] dolgozatokban. Itt a teljesség és a közlendő új megoldási eljárások kedvéért említjük meg.

Az ilyen egyenleteknek a már megoldott (1) vagy (2) típusú egyenletekre való visszavezetését a [14]-ben is megoldott

$$(18) \quad f(ax + by + c) = af(x) + bf(y) + c \quad (ab \neq 0, a + b \neq 0)$$

egyenlet *példáján* mutatjuk be:

Helyettesítsünk (18)-ba

$$x = y = \frac{as + bt}{a + b} = ps + qt \quad (p + q = 1)$$

-et:

$$f(as + bt + c) = (a + b)f(ps + qt) + c.$$

Ha ebben s és t helyébe újra x -et és y -t írunk és összehasonlítjuk (18)-cal, akkor látjuk, hogy

$$(19) \quad f(px + qy) = pf(x) + qf(y) \quad (p + q = 1).$$

Innen kétféleképpen is haladhatnak tovább:

1. (19)-ben sorra elvégezve az $x = \frac{u}{p}$, $y = 0$; $x = 0$, $y = \frac{v}{q}$; $x = \frac{u}{p}$, $y = \frac{v}{q}$ helyettesítéseket az $f(0) = \gamma$ jelöléssel, azt kapjuk, hogy

$$f(u) = pf\left(\frac{u}{p}\right) + q\gamma,$$

$$f(v) = p\gamma + qf\left(\frac{v}{q}\right),$$

$$f(u + v) = pf\left(\frac{u}{p}\right) + qf\left(\frac{v}{q}\right).$$

A harmadik egyenletből az első kettőt kivonva azt kapjuk, hogy

$$f(u + v) = f(u) + f(v) - \gamma.$$

Ennek az (1) típusú egyenletnek a megoldása, mint azt az I. 2. § elején láttuk,

$$f(x) = ax + \gamma.$$

Ugyanerre az eredményre vezet a másik eljárás is:

2. (19)-ben most az $x = \frac{u+v}{2}$, $y = u$; $x = v$, $y = \frac{u+v}{2}$:

$x = p \frac{u+v}{2} + qu$, $y = pr + q \frac{u+v}{2}$ helyettesítéseket végezve el, a követ-

kező egyenleteket nyerjük:

$$\begin{aligned} f\left(p \frac{u+v}{2} + qu\right) &= pf\left(\frac{u+v}{2}\right) + qf(u), \\ f\left(pv + q \frac{u+v}{2}\right) &= pf(v) + qf\left(\frac{u+v}{2}\right), \\ f\left(\frac{u+v}{2}\right) &= f\left[p\left(p \frac{u+v}{2} + qu\right) + q\left(pv + q \frac{u+v}{2}\right)\right] = pf\left(p \frac{u+v}{2} + q\right) + \\ &\quad + qf\left(pv + q \frac{u+v}{2}\right). \end{aligned}$$

A harmadik egyenletbe behelyettesítjük az első kettőt:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{u+v}{2}\right) &= (p^2 + q^2)f\left(\frac{u+v}{2}\right) + pq[f(u) + f(v)] \quad (p+q=1), \\ f\left(\frac{u+v}{2}\right) &= \frac{f(u) + f(v)}{2}. \end{aligned}$$

De ez éppen a (15) Jensen-féle függvényegyenlet, melynek általános megoldása

$$f(x) = \alpha x + \gamma.$$

Ezúttal azonban ez nem feltétlenül elégíti ki az eredeti (18) függvényegyenletet:

$$\begin{aligned} f(ax + by + c) &= a\alpha x + b\alpha y + c\alpha + \gamma, \\ af(x) + f(y) + c &= a\alpha x + b\alpha y + c + (a+b)\gamma, \end{aligned}$$

tehát (18) csak akkor teljesül, ha

$$(\alpha - 1)c = (a + b - 1)\gamma.$$

Tehát érvényes a következő

3°. TÉTEL. Az

$$f(ax + by + c) = af(x) + bf(y) + c \quad (ab \neq 0, a + b \neq 0)$$

függvényegyenlet általános mérhető megoldása

$$f(x) = \alpha x + \gamma.$$

Itt azonban α és γ csak akkor tetszőleges konstansok, ha $a + b = 1$ és $c = 0$; ha viszont $a + b \neq 1$, akkor $\gamma = [(\alpha - 1)c]/(a + b - 1)$, végül ha $a + b = 1$, de $c \neq 0$, akkor $\alpha = 1$.

Az itt ismertetett *megoldási eljárások* általában is alkalmazhatók a

$$(3) \quad f(ax + by + c) = G[f(x), f(y)] \quad (ab \neq 0, a + b = 0)$$

függvényegyenletre:

(3)-ba

$$x = y = \frac{as + bt}{a + b} = ps + qt \quad (p + q = 1)$$

-et helyettesítve, az eredményben s és t helyébe ismét x -et és y -t írva, és a kapott

$$f(ax + by + c) = G[f(px + qy), f(px + qy)] = G_2[f(px + qy)]$$

egyenletet (3)-mal összehasonlítva a

$$(20) \quad f(px + qy) = G_2^{-1}\{G[f(x), f(y)]\} = F[f(x), f(y)]$$

egyenlethez jutunk.

Innen, ebben az általános esetben is, kétféleképpen haladhatunk tovább:

1. (20)-ba sorra $x = \frac{u}{p}$, $y = 0$; $x = 0$, $y = \frac{v}{q}$; $x = \frac{u}{p}$, $y = \frac{v}{q}$ -t helyettesítve, az $f(0) = \gamma$ jelöléssel az

$$f(u) = F\left[f\left(\frac{u}{p}\right), \gamma\right], \quad f(v) = F\left[\gamma, f\left(\frac{v}{q}\right)\right],$$

$$f(u + v) = F\left[f\left(\frac{u}{p}\right), f\left(\frac{v}{q}\right)\right]$$

egyenleteket kapjuk, amiből $f\left(\frac{u}{p}\right)$ -t és $f\left(\frac{v}{q}\right)$ -t kiküszöbölve egy (1) típusú

$$f(u + v) = H[f(u), f(v)]$$

függvényegyenlethez jutunk.

2. Másrészt (20)-ban az $x = \frac{u+v}{2}$, $y = u$; $x = v$, $y = \frac{u+v}{2}$; $x = p\frac{u+v}{2} + qu$, $y = pv + q\frac{u+v}{2}$ helyettesítéseket végezve el egymás után és a kapott

$$f\left(p\frac{u+v}{2} + qu\right) = F\left[f\left(\frac{u+v}{2}\right), f(u)\right],$$

$$f\left(pv + q\frac{u+v}{2}\right) = F\left[f(v), f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right],$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{u+v}{2}\right) &= f\left[p\left(p\frac{u+v}{2} + qu\right) + q\left(pv + q\frac{u+v}{2}\right)\right] = \\ &= F\left[f\left(p\frac{u+v}{2} + qu\right), f\left(pv + q\frac{u+v}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

egyenletekből $f\left(p\frac{u+v}{2}+qu\right), f\left(pv+q\frac{u+v}{2}\right)$ -t kiküszöbölve egy (2) típusú

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right)=H[f(u), f(v)]$$

függvényegyenletet kapunk.

Természetesen itt is, mint példánkban, még meg kell győződni róla, hogy a kapott megoldás kielégíti-e az eredeti függvényegyenletet.

(3) megoldásának létezésére itt x helyébe $(ax+by+c)$ -t és y helyébe $(au+bv+c)$ -t, majd x helyébe $(ax+bu+c)$ -t és y helyébe $(ay+bv+c)$ -t helyettesítve kapunk szükséges feltételt:

$$\begin{aligned} f[a^2x+ab(y+u)+b^2v+(a+b+1)c] &= f[a(ax+by+c)+b(au+bv+c)+c] = \\ &= G[f(ax+by+c), f(au+bv+c)] = G\{G[f(x), f(y)], G[f(u), f(v)]\} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} f[a^2x+ab(u+y)+b^2v+(a+b+1)c] &= f[a(ax+bu+c)+b(ay+bv+c)+c] = \\ &= G[f(ax+bu+c), f(ay+bv+c)] = G\{G[f(x), f(u)], G[f(y), f(v)]\}, \end{aligned}$$

tehát a

$$(17) \quad G[G(x, y), G(u, v)] = G[G(x, u), G(y, v)]$$

biszimmetria szükséges ahhoz, hogy a (3) egyenletnek létezzék megoldása.

A folytonos és szigorúan monoton megoldás létezésének szükséges feltételét tartalmazza a következő, kissé eltérő alakban már a [15] dolgozatban (vö. [13]) bebizonyított tétel első része:

3. TÉTEL. A (3) függvényegyenletnek csak akkor lehet folytonos és szigorúan monoton megoldása, ha G folytonos, szigorúan monoton és eleget tesz a (17) függvényegyenletnek (biszimmetria).

$f(x)$ -szel együtt eleget tesz (3)-nak

$$\text{minden } f(ax+\gamma), \quad (\text{ha } a+b=1 \text{ és } c=0)$$

$$\text{minden } f(x+\gamma), \quad (\text{ha } a+b=1 \text{ és } c \neq 0) \text{ és}$$

$$\text{minden } f\left(ax+\frac{ac-c}{a+b-1}\right) \quad (\text{ha } a+b \neq 1)$$

alakú függvény is és csak ezek.

A második állítást itt is a már többször követett úton bizonyítjuk:

$$f(ax+by+c) = G[f(x), f(y)], \quad G(t, u) = f[af^{-1}(t) + bf^{-1}(u) + c]$$

$$h(ax+by+c) = G[h(x), h(y)] = f[af^{-1}h(x) + bf^{-1}h(y) + c],$$

tehát a $\varphi(t) = f^{-1}h(t)$ függvényre a (18) alakú

$$\varphi(ax + by + c) = a\varphi(x) + b\varphi(y) + c$$

függvényegyenlet teljesül és így a 3^o tételből következik a 3. tétel második része.

A fentiekhez hasonló módszerrel oldhatók meg az általánosabb

$$f(ax + by + c) = G[f(x), f(y), x, y]$$

alakú függvényegyenletek is.

Visszavezethető az előbbire a

$$(3') \quad f[F(x, y)] = G[f(x), f(y)]$$

függvényegyenlet megoldása is, ha F és G közül az egyik biszimmetrikus (eleget tesz a (17) függvényegyenletnek).

Ugyanis, ha pl. G biszimmetrikus, akkor

$$(21) \quad G(u, v) = g[ag^{-1}(u) + bg^{-1}(v) + c]$$

és (3')-ből $f^{-1}g(x) = h(x)$, $h^{-1}(x) = s$, $h^{-1}(y) = t$ jelöléssel a (3) típusú

$$h(as + bt + c) = F[h(s), h(t)]$$

függvényegyenletet kapjuk.

[$g(x)$ -et a (21)-gyel ekvivalens ugyancsak (3) típusú

$$g(ax + by + c) = G[g(x), g(y)]$$

egyenletből határozhatjuk meg.]

Itt is érvényes ([15]) a megfelelő

3'. TÉTEL. Ha a (3') függvényegyenletben a folytonos és szigorúan monoton F és G függvények közül az egyik biszimmetrikus, akkor az egyenletnek csakis akkor lehet folytonos és szigorúan monoton megoldása, ha a másik is biszimmetrikus.

Az unicitási viszonyok is a (3)-beliekhez hasonlóan alakulnak.

Speciálisan, ha (3')-ben F vagy G asszociatív, úgy akkor és csak akkor van megoldás, ha a másik is asszociatív.

Példák:

$$(22) \quad f(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) = f(x) + f(y), \quad \text{MEGOLDÁSA: } f(x) = c \arccos x,$$

$$(23) \quad f(xy + \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}) = f(x) + f(y), \quad \text{MEGOLDÁSA: } f(x) = c \operatorname{ar} \operatorname{ch} x.$$

Itt $G(s, t) = s + t$, $g(t) = kt$, $h(t) = \cos k \frac{t}{c}$ ill. $h(t) = \operatorname{ch} k \frac{t}{c}$. E két függvényegyenlet megoldását a II. 1. §-ban fogjuk használni.

I. 4. § $f(x+y) = G[f(x), y]$.

Az itt (I. 4., 5., 6. §) következő módszerek és tételek által adott, az eddigieknél könnyebb megoldási lehetőségnek az is magyarázata, hogy a (4), (5), (6) függvényegyenlet típusokban az x , ill. y változó önállóan, tehát az f függvényen kívül is szerepel.

A

$$(4) \quad f(x+y) = G[f(x), y]$$

alakú függvényegyenletekre triviális példaként a

$$(24) \quad f(x+y) = f(x) + y$$

egyenlet megoldását mutatjuk be először.

Az $x=0$ helyettesítéssel és $f(0)=a$ jelöléssel

$$f(t) = t + a$$

és ez valóban megoldása (24)-nek:

$$(x+y) + a = x + a + y$$

és pedig a $(0, a)$ ponton átmenő megoldás. Egy tetszőleges (c, d) ponton átmenő megoldás

$$f(t) = (t-c) + d,$$

ami (24)-ből $x=c$, $[f(c)=d]$ helyettesítéssel közvetlenül is adódik:

$$f(c+y) = d + y,$$

$$c+y=t, \quad y=t-c,$$

$$f(t) = (t-c) + d.$$

Ez az egyszerű *megoldási eljárás* általában is alkalmazható a (4) alakú függvényegyenletekre:

(4)-be $x=0$ -t helyettesítünk és itt is az $f(0)=a$ jelölést használjuk:

$$(25) \quad f(t) = G(a, t),$$

tehát (4) megoldása csak ilyen alakú lehet. A (c, d) ponton átmenő megoldás itt is az $x=c$ helyettesítéssel adódik (4)-ből:

$$f(c+y) = G(d, y), \quad (d=f(c)),$$

$$t=c+y, \quad y=t-c,$$

$$f(t) = G(d, t-c).$$

Ez természetesen a megoldásfüggvény (25) alakját is tartalmazza $c=0$ -ra.

Hogy a (4)-ből adódott (25) függvény valóban megoldása-e (4)-nek, arról itt is helyettesítéssel győződhetünk meg:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= G(a, x+y), \\ G[f(x), y] &= G[G(a, x), y]. \end{aligned}$$

Tehát a (25) függvény, melyről láttuk, hogy (4) megoldása csak ilyen alakú lehet, — akkor és csak akkor lesz valóban megoldása a (4) függvényegyenletnek, vagyis (4)-nek akkor és csakis akkor létezik megoldása, ha a

$$(26) \quad G(a, x+y) = G[G(a, x), y]$$

feltétel teljesül. Így adódik a

4. TÉTEL. *Ha a $G(x, y)$ függvény legalább egy a értékre eleget tesz a (26) feltételnek, akkor és csakis akkor (4) megoldható és általános megoldása*

$$(25) \quad f(t) = G(a, t),$$

mely átmegy a $(0, a)$ ponton. A (c, a) ponton átmenő megoldás

$$f(t) = G(a, t-c)$$

alakba írható. (Vö. [23]-mal is.)

Ezen túlmenően a folytonos és szigorúan monoton megoldásokra vonatkozóan áll a

4₂. TÉTEL. *Ha a (14) feltétel egy a -ra teljesül, ha továbbá $G(x, y)$ vagy mindkét változóban folytonos, anélkül, hogy valahol is y -től függetlenné (y -ban konstanssá) válnék, vagy mindkét változóban szigorúan monoton, akkor a (4) függvényegyenlet (25) általános megoldása folytonos és szigorúan monoton.*

$f(x)$ -szel együtt a

$$h(t) = f(t+b)$$

függvények és csak ezek megoldásai (4)-nek.

E tétel első két állítását (kissé erősebb alakban) a [23] dolgozatban bebizonyítottuk. Az utolsó (unicitási) állítás bizonyítása itt is így végezhető: (4)-ből

$$\begin{aligned} f(x+y) &= G[f(x), y], \quad G(x, y) = f[f^{-1}(x) + y], \\ h(x+y) &= G[h(x), y] = f[f^{-1}h(x) + y], \end{aligned}$$

tehát $\varphi(t) = f^{-1}h(t)$ -re

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + y$$

és ez éppen a (24) egyenlet, melynek megoldása $q(t) = t + b$ tehát

$$h(t) = f(t + b),$$

qu. e. d.

További példaként az

$$f(x + y) = f(x)e^y$$

függvényegyenletet említhetjük, melynek van megoldása, mert $G(x, y) = xe^y$ eleget tesz feltételeinknek. Az általános megoldás, mint az $x = 0$ helyettesítéssel látjuk: $f(t) = ae^t$.

Ez átmegy a $(0, a)$ ponton. A (c, d) ponton átmenő megoldást

$$f(t) = de^{t-c}$$

alakban írhatjuk fel.

Az

$$f(x + y) = f(x)^y \quad (f(x) \geq 0)$$

függvényegyenletnek viszont nincs a triviális $f(x) \equiv 0$ és $f(x) \equiv 1$ megoldástól eltérő megoldása, mert a $G(x, y) = x^y$ függvény nem tesz eleget a (25) egyenletnek semmilyen $x = 0$ és $x = 1$ -től különböző értékre. Ha mégis ráerőszakolnánk megoldási eljárásunkat, akkor $f(t) = a^t$ adódna, de ez nem tesz eleget az egyenletnek: $a^{x+y} \neq (a^x)^y$, kivéve, ha $a = 0$, vagy $a = 1$.

Az általánosabb

$$f[F(x, y)] = G[f(x), x, y]$$

egyenlet hasonló eljárással oldható meg.

Helyettesítsünk ugyanis ebbe is $x = 0$ -t (természetesen más $x = x_0$ helyettesítéssel is célt érünk):

$$f[F(0, y)] = G[f(0), 0, y],$$

és ha a $t = F(0, y) = h(y)$, $y = h^{-1}(t) = g(t)$, $f(0) = a$ jelöléseket vezetjük be, látjuk, hogy ha az egyenletnek egyáltalán van megoldása, akkor az csak

$$f(t) = G[a, 0, g(t)]$$

lehet.

Példa: $f(xy) = f(x)^y$ megoldása, mint az $x = 1$ helyettesítéssel látjuk ($x = 0$ itt nyilván nem alkalmas), $f(t) = c^t$ és valóban $c^{xy} = (c^x)^y$.

1. 5. § $H[f(x + y), f(x - y), f(x), x, y] = 0$

A következő 5. és 6. §-ban adott eljárások az eddigiekkel ellentétben nem intézik el teljesen a tárgyalandó (5), (6) függvényegyenlet típusokat, csak bizonyos speciális feltételek között. A hasonló módon megadható eljárásokat természetesen könnyű szaporítani.

A

$$(5) \quad H[f(x+y), f(x-y), f(x), x, y] = 0$$

függvényegyenlet típusra az I. 1. és I. 2. § végén mondottakon kívül egyelőre még két további — különböző feltételek mellett alkalmazható — *megoldási eljárást* tárgyalunk.

1. Az elsőt a ST. KACZMARZ által [6] nehezebb valós függvénytani eszközökkel megoldott

$$(7) \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cos y$$

függvényegyenlet *példáján* mutatjuk be (vö. [31]). E függvényegyenletnek, melyet ST. KACZMARZ a második szimmetrikus differenciából a kétszeri deriválhatóság kimutatása mellett az

$$f''(x) = -f(x)$$

differenciálegyenletre vezetett vissza, általános megoldása

$$f(x) = a \cos x + b \sin x.$$

Az egyszerűbb közvetlen megoldás menete a következő:

Végezzük el (7)-ben sorra az

$$x=0, y=t; \quad x=\frac{\pi}{2}+t, y=\frac{\pi}{2}; \quad x=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{2}+t$$

helyettesítéseket és vezessük be az $f(0)=a, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=b$ jelöléseket. Így jutunk az

$$f(t) + f(-t) = 2a \cos t,$$

$$f(\pi+t) + f(t) = 0,$$

$$f(\pi+t) + f(-t) = 2b \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = -2b \sin t$$

egyenletekre. Ha az első két egyenlet összegéből a harmadikat levonjuk:

$$2f(t) = 2a \cos t + 2b \sin t,$$

máris látjuk, hogy a (7) függvényegyenlet megoldása csak

$$f(t) = a \cos t + b \sin t$$

alakú lehet. Hogy ez a függvényrendszer mindig valóban megoldása is (7)-nek, arról itt is behelyettesítéssel kell meggyőződnünk:

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= a \cos(x+y) + a \cos(x-y) + b \sin(x+y) + \\ &+ b \sin(x-y) = 2a \cos x \cos y + 2b \sin x \cos y = 2(a \cos x + b \sin x) \cos y = \\ &= 2f(x) \cos y. \end{aligned}$$

Tehát valóban $f(x) = a \cos x + b \sin x$ a (7) függvényegyenlet legáltalánosabb megoldása. Ezt az eredményt a II. 2. §-ban fel fogjuk használni. A $\left(\frac{x}{2} + t\right)$ helyettesítések helyett ugyanúgy, vagy még egy kicsit kényelmesebben alkalmazhattunk volna megfelelő $\left(\frac{x}{2} - t\right)$ helyettesítéseket, de az általános (5) egyenlet hasonló tárgyalására a mi fenti helyettesítéseink általánosíthatók jobban.

Mivel példánkban lényegesen felhasználtuk, hogy az $f(x) \cos y$ kifejezés $y = \frac{x}{2}$ -nél azonosan eltűnik, ezért ezen eljárás más (5) típusú függvényegyenletekre való általánosításához az kell, hogy létezzék olyan $y = y_0$ érték, hogy a (4)-ben szereplő $H(z_1, z_2, z_3, x, y)$ függvény $y = y_0$ -ra függetlenné vájon z_3 -tól:

$$(27) \quad H(z_1, z_2, z_3, x, y_0) = h(z_1, z_2, x).$$

Ha ez teljesül, akkor a megfelelő itt következő eljárás gyakran eredményre vezet:

(5)-be sorra az $x = 0, y = t$; $x = y_0 + t, y = y_0$; $x = y_0, y = y_0 + t$ helyettesítéssel és $f(0) = a$, $f(y_0) = b$ jelöléssel a

$$H[f(t), f(-t), a, 0, t] = 0$$

$$h[f(2y_0 + t), f(t), y_0 + t] = 0$$

$$H[f(2y_0 + t), f(-t), b, y_0, y_0 + t] = 0$$

egyenletet kapjuk. Ha e három egyenletből $f(2y_0 + t)$ és $f(-t)$ -t ki tudjuk küszöbölni, akkor megkapjuk $f(t)$ kifejezését, amelyet behelyettesítve az eredeti függvényegyenletbe, meggyőződhetünk róla, megoldása-e valóban az egyenletnek, vagy még specializálendő, vagy esetleg nincs is az egyenletnek (nem triviális) megoldása.

A fentiekből leszűrhető a következő

5₁ TÉTEL. *Ha létezik oly $y = y_0$, mellyel*

$$(27) \quad H(z_1, z_2, z_3, x, y_0) = h(z_1, z_2, x)$$

és a

$$H(z, u, a, 0, t) = 0,$$

$$h(r, z, y_0 + t) = 0,$$

$$H(v, u, b, y_0, y_0 + t) = 0$$

egyenletek (függetlenek és) z-re megoldhatók, akkor csak a belőlük nyert

$$z = f(t)$$

függvény lehet (5) megoldása és ez az általános megoldás legfeljebb két tetszőleges a, b konstanszt tartalmaz.

További példaként vizsgáljuk még meg a

$$(28) \quad f(x+y) - f(x-y) - 4\sqrt{f(x-y)} + 4\sqrt{f(x)}(1-y) - 4y = 0$$

függvényegyenletet. Itt $y_0 = 1$, mert $y = 1$ -re $f(x)$ már nem szerepel az egyenletben. Végrehajtva az $x = 0, y = t$; $x = t+1, y = 1$; $x = 1, y = t+1$ helyettesítéseket, kapjuk az

$$f(t) - f(-t) - 4\sqrt{f(-t)} + 4\sqrt{a}(1-t) - 4t = 0$$

$$f(t+2) - f(t) - 4\sqrt{f(t)} - 4 = 0$$

$$f(t+2) - f(-t) - 4\sqrt{f(-t)} - 4\sqrt{b}t - 4t - 4 = 0$$

egyenleteket.

Az első két egyenlet összegéből a harmadikat levonva, a

$$-4\sqrt{f(t)} - 4(\sqrt{a} - \sqrt{b})t + 4\sqrt{a} = 0$$

egyenletre, tehát a $\sqrt{b} - \sqrt{a} = c$, $\sqrt{a} = k$ jelöléssel, az

$$f(t) = (ct + k)^2$$

megoldásra jutunk. Ha azonban ezt az eredeti (28) függvényegyenletbe helyettesítjük, azt látjuk, hogy

$$(cx + cy + k)^2 - (cx - cy + k)^2 - 4(cx - cy + k) + 4(cx + k)(1 - y) - 4y = 0,$$

$$4(cx + k)cy - 4(cx + k) + 4cy + 4(cx + k) - 4(cx + k)y - 4y = 0,$$

$$(cx + k)y(c - 1) + y(c - 1) = 0,$$

azaz

$$(c - 1)(cx + k + 1) = 0$$

csak akkor teljesül minden x -re, ha $c = 1$ (ugyanis $c = 0$ triviális konstans megoldást adna) tehát (28) megoldásai az

$$f(t) = (t + k)^2 \text{ és } f(t) = k$$

függvények. Ezek ki is elégítik (28)-at.

2. Ha a (27) feltétel nem teljesül, akkor gyakran a következő eljárás vezet eredményre, melyet az

$$f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y$$

függvényegyenlet példáján mutatunk be.

Az $x=0, y=t$; $x=t, y=2t$; $x=t, y=-2t$ helyettesítéseket végezve el, az

$$\begin{aligned}f(t) + 2f(-t) &= 3a - t, \\f(3t) + 2f(-t) &= 3f(t) - 2t, \\f(-t) + 2f(3t) &= 3f(t) + 2t\end{aligned}$$

egyenleteket kapjuk. Az első egyenletet hárommal szorozva, hozzáadjuk a harmadik egyenlet kétszeresét és az összegből levonjuk a második egyenlet négyszeresét, akkor a

$$3f(t) = -6f(t) + 9t + 9a$$

egyenlethez jutunk, tehát a megoldás csak

$$f(t) = t + a$$

lehet, és ez ki is elégíti az eredeti függvényegyenletet:

$$(x + y + a) + 2(x - y + a) = 3(x + a) - y.$$

Ezt az eljárást általában alkalmazva az (5) függvényegyenletre, ott is az $x=0, y=t$; $x=t, y=2t$; $x=t, y=-2t$ helyettesítéseket végezzük el és a kapott

$$\begin{aligned}H[f(t), f(-t), a, 0, t] &= 0, \\H[f(3t), f(-t), f(t), t, 2t] &= 0, \\H[f(-t), f(3t), f(t), t, -2t] &= 0\end{aligned}$$

egyenletekből küszöböljük ki $f(-t)$ -t és $f(3t)$ -t (ha ez lehetséges). Az így kapott függvény lesz az (5) egyenlet egyetlen lehetséges megoldása. Hogy valóban kielégíti-e a függvényegyenletet, azt a behelyettesítés dönti el.

Itt is leszűrhető a megfelelő

5₂. TÉTEL: *Ha* a

$$\begin{aligned}H(z, u, a, 0, t) &= 0, \\H(v, u, z, t, 2t) &= 0, \\H(u, v, z, t, -2t) &= 0\end{aligned}$$

egyenletek (függetlenek és) z-re megoldhatók, akkor csak a belőlük nyert

$$z = f(t)$$

függvény lehet az (5) függvényegyenlet megoldása. Ez az általános megoldás legfeljebb egy tetszőleges a konstans tartalmaz.

További példaként a

$$2f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)(2e^y + e^{-y})$$

függvényegyenletet oldjuk meg. — Elvégezve a fenti helyettesítéseket és a kapott

$$\begin{aligned}2f(t) + f(-t) &= a(2e^t + e^{-t}), \\2f(3t) + f(-t) &= f(t)(2e^{2t} + e^{-2t}), \\2f(-t) + f(3t) &= f(t)(2e^{-2t} + e^{2t})\end{aligned}$$

egyenletekből $f(-t)$ -t és $f(3t)$ -t kiküszöbölve (az első egyenlet mindkét oldalát hárommal szorozva, hozzáadjuk a másodikat és levonjuk a harmadik egyenlet kétszeresét) a

$$\begin{aligned}6f(t) &= 3a(2e^t + e^{-t}) - 3f(t)e^{-2t}, \\f(t) &= a \frac{2e^t + e^{-t}}{2 + e^{-2t}} = ae^t\end{aligned}$$

általános megoldást kapjuk, és ez ki is elégíti az eredeti egyenletet:

$$2ae^{x+y} + ae^{x-y} = ae^x(2e^y + e^{-y}).$$

Mivel az I. 5. és I. 6. §-ok tételei csak szükséges feltételeit adják annak, hogy az általuk meghatározott függvény a kiindulási egyenlet megoldása legyen, fokozott jelentősége van annak, hogy a kapott függvénynek az eredeti egyenletbe való helyettesítésével győződjünk meg róla, valóban kielégíti-e az eredeti egyenletet, vagy még specializálni kell, vagy esetleg nem is létezik nem triviális megoldás.

Természetesen alkalmazhatók az (5) függvényegyenletre a (6) egyenlet megoldásához az I. 1. § végén és a következő I. 6. §-ban megadott módszerek is

I. 6. § $H[f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y] = 0$

Végül az egész általános

$$(6) \quad H[f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y] = 0$$

függvényegyenletre adunk az I. 1. § végén említetten kívül még három különböző feltételek közt alkalmazható *megoldási eljárást*.

1. Az első az

$$f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y$$

egyenlet *példáján* mutatom be.

Az $y = 0$ helyettesítéssel azonnal a

$$4f(x) + 2a = 4x$$

$[f(0) = a]$, azaz

$$f(x) = x - \frac{a}{2}$$

megoldáshoz jutunk.

Ezt behelyettesítve egyenletünkbe, látjuk, hogy

$$x + y - \frac{a}{2} + 2x - 2y - a + x - \frac{a}{2} + 2y - a = 4x + y$$

csak $a=0$ esetén teljesül. Tehát egyenletünk egyetlen lehetséges megoldása az $f(x)=x$ függvény.

Ez az eljárás általában is alkalmazható a (6) függvényegyenletre: $y=0$ -át helyettesítve az $f(0)=a$ jelöléssel, a

$$H[f(x), f(x), f(x), a, x, 0] = 0$$

egyenletet kapjuk és ha ez nem identitás, akkor belőle $f(x)$ meghatározható. A kapott eredmény visszahelyettesítésével jutunk $f(x)$ végleges alakjára.

Ebből következik a

6₁. TÉTEL. Ha van oly a , melyre

$$H(z, z, z, a, x, 0) = 0$$

(nem azonosság és) z -re megoldható, akkor csak a belőle nyerhető

$$z = f(x)$$

függvény lehet megoldása a (6) függvényegyenletnek. E megoldás legfeljebb egy a konstans tartalmaz.

További példaként az

$$f(x+y) + f(x-y) - f(x) - x^3 - 6xy\sqrt[3]{f(y)} = 0$$

függvényegyenletet oldjuk meg. Az $y=0$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = x^3$$

a függvényegyenlet megoldása és ez ki is elégíti az egyenletet, mert

$$(x+y)^3 + (x-y)^3 - x^3 - x^3 - 4xyy = 0.$$

2. A második eljárást az

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$$

függvényegyenlet példáján mutatjuk be. Sorra elvégezve az $x=0, y=t$; $x=t, y=2t$; $x=2t, y=t$; $x=t, y=t$ helyettesítéseket a

$$-f(t) - 2f(-t) + a = t - 2,$$

$$f(3t) - 2f(-t) + f(t) - 2f(2t) = 2t - 2,$$

$$f(3t) - 4f(t) + f(2t) = t - 2,$$

$$f(2t) - 2a - f(t) = t - 2.$$

Az első és harmadik egyenlet összegéből a második egyenletet és a negyedik egyenlet háromszorosát levonva azt kapjuk, hogy

$$-3f(t) + 7a = -3t + 4,$$

$$f(t) = t + \frac{7a-4}{3} = t + b.$$

Azonban eredményünket a kiindulási egyenletbe helyettesítve látjuk, hogy

$$x + y + b - 2x + 2y - 2b + x + b - 2y - 2b = y - 2$$

csak akkor teljesül, ha $b = 1$. Így

$$f(x) = x + 1$$

az egyetlen lehetséges megoldás és ez ki is elégíti az egyenletet.

Általában is a (6) függvényegyenletet az $x=0, y=t$; $x=t, y=2t$; $x=2t, y=t$; $x=t, y=t$ helyettesítésekkel kapott

$$H[f(t), f(-t), a, f(t), 0, t] = 0,$$

$$H[f(3t), f(-t), f(t), f(2t), t, 2t] = 0,$$

$$H[f(3t), f(t), f(2t), f(t), 2t, t] = 0,$$

$$H[f(2t), a, f(t), f(t), t, t] = 0$$

egyenletekből $f(-t), f(2t)$ és $f(3t)$ kiküszöbölésével oldhatjuk meg (az így kapott $f(t)$ függvényt mindig visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe).

Ebből adódik a

6₂. TÉTEL. Ha a

$$H(z, u, a, z, 0, t) = 0,$$

$$H(w, u, z, r, t, 2t) = 0,$$

$$H(w, z, r, z, 2t, t) = 0,$$

$$H(r, a, z, z, t, t) = 0$$

egyenletek (függetlenek és) z -re megoldhatók, akkor csak a belőlük nyert

$$z = f(t)$$

függvény (mely legfeljebb egy a konstans tartalmaz) lehet megoldása a (6) egyenletnek.

További példa:

$$f(x)f(x+y) = f(y)^2 f(x-y)^2 e^{y+4} \quad (f(x) \neq 0)$$

Elvégezve a fenti helyettesítéseket, az $f(0) = a$ jelöléssel az

$$\begin{aligned}af(t) &= f(t)^2 f(-t)^2 e^{t+4}, \\f(t)f(3t) &= f(2t)^2 f(-t)^2 e^{2t+4}, \\f(2t)f(3t) &= f(t)^4 e^{t+4}, \\f(t)f(2t) &= f(t)^2 a^2 e^{t+4}\end{aligned}$$

egyenleteket kapjuk.

Az első és harmadik egyenlet szorzatát a második egyenlettel és a negyedik egyenlet harmadik hatványával osztva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{af(t)f(2t)f(3t)}{f(t)^4 f(2t)^3 f(3t)} &= \frac{f(t)^6 f(-t)^2 e^{2t+8}}{f(t)^6 f(-t)^2 f(2t)^2 a^6 e^{5t+16}}, \\f(t)^3 &= a^7 e^{3t+8}, \\f(t) &= \sqrt[3]{a^7 e^8} e^t.\end{aligned}$$

De $a = f(0) = \sqrt[3]{a^7 e^8}$, tehát $a^4 = e^{-8}$, $a = \pm \frac{1}{e^2}$, így

$$f(t) = \pm e^{t-2}$$

a megoldás és ez ki is elégíti függvényegyenletünket:

$$e^{x-2} e^{x+y-2} = e^{2y-4} e^{2x-2y-4} e^{y+4}.$$

3. Ha sem a 6_1 , sem a 6_2 tételek feltételei nem teljesülnek, akkor az I. 1. §-ban említett, vagy az itt következő módszer lehet célravezető. E módszer a d'ALEMBERT ([1]) és CAUCHY ([2]) által a

$$(29) \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

függvényegyenlet megoldására alkalmazott eljárás általánosítása.

Röviden emlékeztetünk a (29) egyenlet ([2]) megoldási eljárására:

(29)-be $y = x$ -et helyettesítve azt kapjuk, hogy $2f(x)^2 = f(2x) + f(0)$.

(29)-ből $y = 0$ helyettesítéssel látjuk, hogy vagy $f(0) = 1$, vagy $f(x) \equiv 0$.

Az utóbbi triviális megoldást ezentúl számításon kívül hagyjuk.

Tehát $f(0) = 1$,

$$2f(x)^2 = f(2x) + 1,$$

$$f(t) = 2f\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1 \geq -1,$$

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+f(t)}{2}},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+f(1)}{2}}.$$

Az $f(1)=b$ érték vagy 1-nél nagyobb, vagy -1 és $+1$ közé esik (a határokat is beleértve). Az első esetben van olyan c szám, hogy

$$b = \operatorname{ch} c$$

a másodikban olyan, hogy

$$b = \cos c.$$

A két eset tárgyalása teljesen hasonló, mi az elsőt vázoljuk:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{ch} c}{2}} = \operatorname{ch} \frac{c}{2},$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1 + f\left(\frac{1}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{ch} \frac{c}{2}}{2}} = \operatorname{ch} \frac{c}{4}.$$

Általában

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \operatorname{ch} \frac{c}{2^n},$$

mert, ha ezt n -re már bizonyítottunk tételizzük fel, akkor

$$f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1 + f\left(\frac{1}{2^n}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{ch}\left(c \frac{1}{2^n}\right)}{2}} = \operatorname{ch}\left(c \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Most (29)-ből $x = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$, $y = \frac{1}{2^n}$ helyettesítéssel az

$$f\left(\frac{3}{2^n}\right) + f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 2f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)f\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

egyenletet kapjuk, tehát

$$f\left(\frac{3}{2^n}\right) + \operatorname{ch} \frac{c}{2^n} = 2 \operatorname{ch} \frac{c}{2^{n-1}} \operatorname{ch} \frac{c}{2^n} = \operatorname{ch}\left(c \frac{3}{2^n}\right) + \operatorname{ch} \frac{c}{2^n},$$

vagyis

$$f\left(\frac{3}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\left(c \frac{3}{2^n}\right).$$

Általában, minden diadikus x -re

$$f(x) = f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\left(c \frac{m}{2^n}\right) = \operatorname{ch} cx,$$

(nem kell $m < 2^n$ -et feltételezni!), mert ezt $m=1, 2$ -re (utoljára $m=3$ -ra is) már kimutattuk, és ha $m=1$, $m=k$ és $m=k+1$ -re teljesül, akkor

$m = 2k + 1$ -re így következik $\left[f\left(\frac{2k}{2^n}\right) = f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) \right]$ -re természetesen nem kell külön bizonyítani]: (29)-be $x = \frac{k+1}{2^n}$, $y = \frac{k}{2^n}$ -et helyettesítünk:

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) + f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 2f\left(\frac{k+1}{2^n}\right)f\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

és ebből feltevéseink szerint

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) + \operatorname{ch}\left(c \frac{1}{2^n}\right) = 2 \operatorname{ch}\left(c \frac{k+1}{2^n}\right) \operatorname{ch}\left(c \frac{k}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\left(c \frac{2k+1}{2^n}\right) + \operatorname{ch} \frac{c}{2^n},$$

tehát

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\left(c \frac{2k+1}{2^n}\right),$$

qu. e. d.

Nem diadikus x -ekre határátmenettel

$$f(x) = \lim_{d_n \rightarrow x} f(d_n) = \lim_{d_n \rightarrow x} \operatorname{ch}(c d_n) = \operatorname{ch}(c x).$$

Negatív x -ekre is érvényes ez a képlet, ui. ha (29)-be $x = 0$, $y = -t$ -t teszünk, azt kapjuk, hogy

$$f(t) + f(-t) = 2f(t)f(0) = 2f(t),$$

tehát ($t < 0$)

$$f(t) = f(-t) = \operatorname{ch} c(-t) = \operatorname{ch} ct.$$

Tehát (29) általános folytonos megoldása az általunk tárgyalt esetben

$$f(x) = \operatorname{ch} cx,$$

a másik, teljesen hasonlóan elintézhető esetben az

$$f(x) = \cos cx$$

megoldást kapjuk. Az

$$f(x) \equiv 1$$

konstans megoldás mindkettő határesetre $c = 0$ -ra. Ezekon kívül meg az elején kizárt

$$f(x) \equiv 0$$

tesz eleget az egyenletnek.

Ez az eljárás átvihető az általános (6) egyenlet megoldására:

(6)-ba $y = x$ -et helyettesítve, $f(0) = a$ jelöléssel a

$$(30) \quad H[f(2x), a, f(x), f(x), x, x] = 0$$

egyenletet kapjuk (esetleg az $x=0$ -val kapott

$$H(a, a, a, a, 0, 0) = 0$$

-ból, ha ez nem azonosság, a meghatározható). (30)-ból, ha ez lehetséges, kifejezzük $f(x)$ -et, ill. $x = \frac{t}{2}$ jelöléssel $f\left(\frac{t}{2}\right)$ -et:

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = G[f(t), t].$$

Ezzel a képlettel $f(1) = b$ -ből $f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ szukcesszíve meghatározható:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = G(b, 1), f\left(\frac{1}{4}\right) = G\left[f\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\right], \dots, f\left(\frac{1}{2^n}\right) = G\left[f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right), \frac{1}{2^{n-1}}\right].$$

Másrészt, ha (6)-ba $x = \frac{k+1}{2^n}$, $y = \frac{k}{2^n}$ -et helyettesítünk, a kapott

$$H\left[f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right), f\left(\frac{1}{2^n}\right), f\left(\frac{k+1}{2^n}\right), f\left(\frac{k}{2^n}\right), \frac{k+1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] = 0,$$

pl.

$$H\left[f\left(\frac{3}{2^n}\right), f\left(\frac{1}{2^n}\right), f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right), f\left(\frac{1}{2^n}\right), \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}\right] = 0,$$

egyenlettel $f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)$ a már ismert $f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ -ből és az ismertnek feltételezett $f\left(\frac{k}{2^n}\right)$, $f\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$ -ből kiszámítható (ha ez az egyenlet $f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)$ -re megoldható). Ezzel $f(x)$ minden pozitív (egész és) diadikus tört x -re meg van határozva, pozitív nem diadikus x -ekre ismét határátmenettel

$$f(x) = \lim_{d_n \rightarrow x} f(d_n)$$

adjuk meg $f(x)$ -et. Végül (6)-ba $x=0$ -t helyettesítve, a kapott

$$H[f(y), f(-y), a, f(y), 0, y] = 0$$

egyenlettel összefüggést kaptunk $f(y)$ és $f(-y)$ között, amiből $f(x)$ negatív x -ekre is meghatározható.

További példák:

A LOBACSEVSKIJ ([3])-féle

$$(31) \quad f(x+y)f(x-y) = f(x)^2$$

függvényegyenlet így is megoldható: $y = x = \frac{t}{2}$ helyettesítéssel

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{af(t)},$$

tehát

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{ab} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = ac^{\frac{1}{2}},$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{af\left(\frac{1}{2}\right)} = ac^{\frac{1}{4}},$$

.....

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = ac^{\frac{1}{2^n}}$$

és (31)-ben $x = \frac{1}{2^{n-1}}$, $y = \frac{1}{2^n}$ helyettesítéssel

$$f\left(\frac{3}{2^n}\right)f\left(\frac{1}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2,$$

vagyis

$$f\left(\frac{3}{2^n}\right)ac^{\frac{1}{2^n}} = \left(ac^{\frac{1}{2^{n-1}}}\right)^2 = a^2c^{\frac{1}{2^{n-2}}}, \quad f\left(\frac{3}{2^n}\right) = ac^{\frac{3}{2^n}}.$$

Általában is

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = ac^{\frac{m}{2^n}},$$

mert ezt $\frac{1}{2^n}$ -re (tehát $\frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ -re is) igazoltuk, és ha $\frac{k}{2^n}$ és $\frac{k+1}{2^n}$ -re már beláttuk, akkor $\frac{2k+1}{2^n}$ -re is érvényes, amit a (31)-ben elvégzett $x = \frac{k+1}{2^n}$,

$y = \frac{k}{2^n}$ helyettesítéssel láthatunk be:

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)f\left(\frac{1}{2^n}\right) = f\left(\frac{k+1}{2^n}\right)^2,$$

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)ac^{\frac{1}{2^n}} = a^2c^{\frac{2k+2}{2^n}},$$

azaz

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = ac^{\frac{2k+1}{2^n}}$$

és ezt kellett bizonyítani. — Nem diadikus x -ekre határátmenettel szintén

$$f(x) = ac^x$$

-et kapunk. — Végül (31)-be $x=0$ -t téve

$$f(y)f(-y) = f(0)^2 = a^2, \quad f(y) = \frac{a^2}{f(y)} = \frac{a^2}{ac^y} = ac^{-y}.$$

Így itt is megkaptuk, hogy

$$f(x) = ac^x$$

a (31) egyenlet általános folytonos megoldása és ez ki is elégíti (31)-et.

Végül az I. 3. § végén szereplő (22) és (23) függvényegyenleteket az inverz függvényekre írva fel, az

$$(32) \quad f(x+y) = f(x)f(y) - \sqrt{1-f(x)^2} \sqrt{1-f(y)^2}$$

és az

$$f(x+y) = f(x)f(y) + \sqrt{f(x)^2-1} \sqrt{f(y)^2-1}$$

egyenleteket kapjuk, és ezek megoldása most $\cos cx$ illetve $\operatorname{ch} cx$ lesz. Példaképpen a két hasonló egyenlet közül a (32) megoldását mutatjuk be.

$|f(x)| \leq 1$ lévén bevezethetjük az $f(1) = \cos c$ jelölést. — (32)-ből $y=x$ mellett

$$f(2x) = 2f(x)^2 - 1, \quad f\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+f(t)}{2}},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos c}{2}} = \cos \frac{c}{2}, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1+f\left(\frac{1}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos \frac{c}{2}}{2}} = \cos \frac{c}{4},$$

.....

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \cos\left(c \frac{1}{2^n}\right).$$

Általában is $f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \cos\left(c \frac{m}{2^n}\right)$, mert ezt $m=1, 2$ -re már igazoltuk, és ha

$m=1$, $m=k$ és $m=k+1$ -re már igaz, akkor (32)-ből $x=\frac{k+1}{2^n}$, $y=\frac{k}{2^n}$ helyettesítéssel

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = \cos\left(c \frac{k+1}{2^n}\right) \cos\left(c \frac{k}{2^n}\right) - \sin\left(c \frac{k+1}{2^n}\right) \sin\left(c \frac{k}{2^n}\right) = \cos\left(c \frac{2k+1}{2^n}\right).$$

Határátmenettel minden nem-negatív valós x -re is

$$f(x) = \cos cx,$$

tehát

$$f(0) = \cos c0 = 1$$

is.

Végül a negatív x -ekre való kiterjesztés $f(x-y)$ hiánya miatt itt némileg módosított alakban megy: (32)-ben $y = -x$ helyettesítéssel

$$1 = f(0) = \cos cx f(-x) - \sin cx \sqrt{1 - f(-x)^2},$$

$$\sin^2 cx [1 - f(-x)^2] = 1 - 2 \cos cx f(-x) + \cos^2 cx f(-x)^2,$$

$$f(-x)^2 - 2 \cos cx f(-x) + \cos^2 cx = 0,$$

$$f(-x) - \cos cx = 0,$$

$$f(-x) = \cos cx = \cos c(-x).$$

Tehát (32) általános folytonos megoldása

$$f(x) = \cos cx$$

és ez ki is elégíti (32)-t:

$$\cos c(x+y) = \cos cx \cos cy - \sin cx \sin cy =$$

$$= \cos cx \cos cy - \sqrt{1 - \cos^2 cx} \sqrt{1 - \cos^2 cy}.$$

Ezzel egyúttal újabb bizonyítását kaptuk, hogy (22) általános folytonos szigorúan monoton megoldása

$$f(x) = k \arccos x$$

és hasonlóan (23)-é $f(x) = k \operatorname{ar} \operatorname{ch} x$.

Bár a (6) egyenlet általánosítása pl. (1)-nek, viszont a fenti 1., 2. megoldási eljárásaink (és hasonlóan az I. 4. §, I. 5. § eljárásai) feltételezik pl., hogy x explicité is (az f függvényen kívül is) szerepeljen az egyenletben. Ha ez nem teljesül, úgy az I. 1. § végén (vagy az I. 2. § végén) említett, vagy az I. 6. §-beli 3. eljárással kísérletezhetünk, bár itt ismét legalábbis folytonosságot kellett feltételezni, tehát ezek az eljárások nem olyan általánosak, és másrészt hatókörük sincs oly pontosan körülhatárolva, mint az (I. 4. § és) I. 5. §-beli eljárásoké és az I. 6. § 1., 2. eljárásáé.

II. NÉHÁNY ALKALMAZÁS

II. 1. § A nem-euklidesi távolságfogalom

A függvényegyenletek néhány újabb alkalmazásának tárgyalását (régebbiek találhatók pl. a [9], [22], [14], [25] és részben a [28], [29] dolgozatokban) a (22), (23) függvényegyenletek alkalmazásával kezdjük a nem-euklidesi geometriában (vö. [38]).

A sík (x_1, x_2, x_3) homogén koordinátájú pontjához hozzárendeljük a tér (x_1, x_2, x_3) (közönséges) koordinátájú pontját. A homogén koordináták által tartalmazott tetszőleges szorzót az elliptikus esetben az

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

ill, a hiperbolikus esetben az

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$$

normálással határozzuk meg, tehát az az elliptikus síkhoz egy gömbfelület, a hiperbolikus síkhoz egy kétköpenyű hiperboloid pontjait rendeljük. Ennek pontjait röviden az $X = (x_1, x_2, x_3)$ vektorokkal jellemezzük. A vektorokat a továbbiakban nagy, a skalárokat kisbetűkkel fogjuk jelölni.

Keressük a $d(X, Y) > 0$ ($X \neq Y$) távolságnak olyan értelmezéseit, amelyek (folytonosak és)

a) „mozgással“ (az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ill. $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ kifejezést megtartó transzformációval) szemben *invariánsak*, és

b) egy egyenesen (síkmetszeten) felvett távolságokat tekintve *additívek*.

VARGA OTTÓ kimutatta, hogy az a) feltételnek csak a

$$d(X, Y) = f(X \cdot Y)$$

alakú kifejezések felelnek meg, ahol $f(x)$ tetszőleges folytonos függvény és $X \cdot Y$ a „skaláris” szorzás jele, amelyet az elliptikus esetben

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

-nak, a hiperbolikus esetben

$$X \cdot Y = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$

-nak értelmezzünk. (Észrevehető, hogy mindkét értelmezésű szorzat *disztributív*.) Ennek bizonyítására, amely a [38] közös dolgozatunkban megjelent, itt nem térek ki.

Megjegyzem azonban, hogy a normálási feltételek miatt bármely vektor önmagával való skaláris szorzata 1-gyel egyenlő.

(33)

$$X \cdot X = 1$$

minden X vektorra. — Azt állítom, hogy ebből

$$(34) \quad |X \cdot Y| \leq 1 \quad (\text{az elliptikus esetben}),$$

ill.

$$(35) \quad |X \cdot Y| \geq 1 \quad (\text{a hiperbolikus esetben})$$

következik minden X, Y vektorpárra.

Az elliptikus esetben a *Cauchy—Bunjakovszkij—Schwarz* egyenlőtlenségből következik (34):

$$(X \cdot Y)^2 = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = (X \cdot X)(Y \cdot Y) = 1.$$

A hiperbolikus esetben ehhez ezen egyenlőtlenség hiperbolikus analogját kell bebizonyítanunk:

7°. TÉTEL. Ha $x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 > 0$, akkor

$$(x_1 y_1 - x_2 y_2 - \dots - x_n y_n)^2 \geq (x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)(y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2).$$

Egyenlőség csak akkor állhat, ha $\{x_i\}$ és $\{y_i\}$ arányosak:

$$ax_i = by_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

BIZONYÍTÁS: Képezzük a

$$\begin{aligned} v(u) &= (x_1 u + y_1)^2 - (x_2 u + y_2)^2 - \dots - (x_n u + y_n)^2 = \\ &= (x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)u^2 + 2(x_1 y_1 - x_2 y_2 - \dots - x_n y_n)u + (y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2) \end{aligned}$$

kifejezést. $v(u)$ az u^2 -nek $x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 > 0$ együtthatója miatt felfelé nyíló parabolával ábrázolható, tehát van, ahol $v(u) > 0$, pl. $v(\pm \infty)$ pozitív. Másrészt az $u = -\frac{y_1}{x_1}$ helyén

$$v\left(-\frac{y_1}{x_1}\right) = -\left(y_2 - x_2 \frac{y_1}{x_1}\right)^2 - \dots - \left(y_n - x_n \frac{y_1}{x_1}\right)^2 \leq 0.$$

$$(x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 > 0 \text{ miatt } x_1 \neq 0).$$

Egyenlőség csak akkor állhat, ha $ax_i = by_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Így $v(u)$ -nak valós gyökei vannak, amelyek legfeljebb akkor eshetnek egybe, ha $ax_i = by_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Tehát a diszkrimináns nem-negatív és legfeljebb akkor 0, ha $ax_i = by_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$(x_1 y_1 - x_2 y_2 - \dots - x_n y_n)^2 \geq (x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)(y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2)$$

és itt egyenlőség legfeljebb akkor állhat, ha $ax_i = by_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), de ez esetben, mint behelyettesítéssel azonnal látható, valóban egyenlőség áll, qu. e. d.

Ezt alkalmazva (33)-ból valóban megkapjuk, hogy

$$(X \cdot Y)^2 = (x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3)^2 \cong (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2) = (X \cdot X)(Y \cdot Y) = 1$$

és éppen ez volt a bizonyítandó (35) egyenlőtlenség.

Mármint a b) feltételt a következőképpen érvényesítjük:

Legyen

$$(36) \quad Z = sX + tY$$

a kollinearitás biztosítására, akkor b) nyilván így szól:

$$d(X, Y) = d(X, Z) + d(Z, Y),$$

vagyis

$$(37) \quad f(X \cdot Y) = f(X \cdot Z) + f(Z \cdot Y).$$

A (36) egyenletet önmagával, ill. X -el, ill. Y -nal szorozva a disztributivitás és (33) miatt az

$$1 = s^2 + t^2 + 2stX \cdot Y,$$

$$X \cdot Y = -\frac{1 - s^2 - t^2}{2st},$$

$$\text{ill. } X \cdot Z = s + tX \cdot Y = \frac{1 + s^2 - t^2}{2s}, \quad \text{ill. } Z \cdot Y = sX \cdot Y + t = -\frac{1 - s^2 + t^2}{2t}$$

összefüggésekhez jutunk. Ezeket (37)-be helyettesítve végül a

$$(38) \quad f\left(\frac{1 - s^2 - t^2}{2st}\right) = f\left(\frac{1 + s^2 - t^2}{2s}\right) + f\left(\frac{1 - s^2 + t^2}{2t}\right)$$

függvényegyenletet kapjuk.

Ennek megoldására bevezetjük az

$$x = \frac{1 + s^2 - t^2}{2s} = X \cdot Z, \quad y = \frac{1 - s^2 + t^2}{2t} = Z \cdot Y$$

jelöléseket. (34), ill. (35)-ből

$$\text{az elliptikus esetben } |x| \leq 1, |y| \leq 1,$$

$$\text{a hiperbolikus esetben } |x| \geq 1, |y| \geq 1$$

következik. Másrészt

$$\begin{aligned}
 4stxy &= (1 + s^2 - t^2)(1 - s^2 + t^2) = 1 - (s^2 - t^2)^2 = 2s^2t^2 - s^4 - t^4 + 1, \\
 4s^2(1 - x^2) &= 4s^2 - (1 + s^2 - t^2)^2 = \begin{cases} 2s^2t^2 - s^4 - t^4 + 2s^2 + 2t^2 - 1, \\ 4t^2(1 - y^2) = 4t^2 - (1 - s^2 + t^2)^2 = \end{cases} \\
 4s^2(x^2 - 1) &= \begin{cases} \\ - (2s^2t^2 - s^4 - t^4 + 2s^2 + 2t^2 - 1) \end{cases} \\
 4t^2(y^2 - 1) &= \begin{cases} \\ \end{cases} \\
 xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} &= \begin{cases} \\ \frac{2s^2t^2 - s^4 - t^4 + 1 - (2s^2t^2 - s^4 - t^4 + 2s^2 + 2t^2 - 1)}{4st} = \\ xy + \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} = \end{cases} \\
 &= \frac{1 - s^2 - t^2}{2st}
 \end{aligned}$$

és így a (38) függvényegyenlet átmegy az elliptikus esetben a

$$(22) \quad f(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) = f(x) + f(y) \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1)$$

a hiperbolikus esetben a

$$(23) \quad f(xy + \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}) = f(x) + f(y) \quad (|x| \geq 1, |y| \geq 1)$$

függvényegyenletbe. Ezen egyenletek általános folytonos szigorúan monoton megoldásai, mint azt az I. 3. §-ban és az I. 6. §-ban láttuk

$$f(x) = c \arccos x, \quad \text{illetve} \quad f(x) = c \operatorname{arch} x,$$

ezek tehát a (38) függvényegyenlet összes folytonos szigorúan monoton megoldásai.

Mivel $f(y) = d > 0$ miatt (22)–(23)-ból a mi folytonosnak feltett $f(x)$ -ünk szigorúan monoton is; ezért

$$d(X, Y) = f(X \cdot Y) = \begin{cases} c \arccos (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) \\ c \operatorname{arch} (x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3) \end{cases}$$

az elliptikus, illetve hiperbolikus esetben. Ezek a c szorzó konstanstól eltekintve éppen a szokásos elliptikus (1. pl. [7]), ill. hiperbolikus távolságdefiníciójának felelnek meg. Érvényes tehát a következő.

7. TÉTEL. A (folytonossági, pozitivitási és) a) és b) feltételeknek csak a

$$d(X, Y) = c \arccos(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$$

illetve

$$d(X, Y) = c \operatorname{arch}(x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3)$$

elliptikus, ill. hiperbolikus távolságdefiníció felel meg.

II. 2. § Vektorok skaláris és vektoriális szorzása

Ugyancsak a vektorszorzással kapcsolatos az a kérdés, hogy két vektor közötti műveletekre vonatkozó milyen feltételek határozzák meg (esetleg egy állandó szorzótól eltekintve) a közönséges skaláris, illetve vektoriális vektorszorzást (vö. [31]).

A vektorszorzások a szorzás ismert tulajdonságai közül a disztributivitást tartják meg. Az előző §-ból azonban világos, hogy a disztributivitás magában nem elég, mert pl. az $x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$ művelet is disztributív. Kézenfekvő az a gondolat, hogy e művelet $x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$ értelmezésében az x_1 tengely kitüntetett szerepe az, amit ki kell zárni, hogy a szokásos vektorszorzásokhoz jussunk.

Valóban érvényes a

8. TÉTEL: *Egy állandó szorzótól eltekintve csak a szokásos skaláris és vektoriális szorzat tesz eleget az A és B vektorokat összekapcsoló*

$$A \cdot B \text{ és } A \times B$$

vektorműveletekre — melyek közül az elsőnek eredménye skalár, a másodiké vektor — kiszabott következő két feltételnek:

- a) rotáció-automorfizmus: *a tér forgásánál a skaláris művelet eredménye változatlan marad, a vektoriálisé együtt forog (a térben nincs kitüntetett irány),*
- b) disztributivitás: *összeget tagonként lehet szorozni, skaláris mennyiség kiemelhető a szorzatból.*

BIZONYÍTÁS: a)-ból világos, hogy a műveletek eredménye csak a két vektor nagyságától és a köztük bezárt szögtől függ. b)-ból látjuk, hogy

$$(39) \quad A \cdot B = |A| |B| E_A \cdot E_B, \quad A \times B = |A| |B| E_A \times E_B,$$

$$\text{ahol } E_A = \frac{A}{|A|}, E_B = \frac{B}{|B|}$$

az A , ill. B vektor irányába mutató egységvektorok. (E -vel mindig egységvektorokat fogunk jelölni.)

Még néhány elemi, geometriai megfontolásra lesz szükség, amelyeket részben SZELE TIBORTÓL vettem át (szóbeli közlés):

1. Ha A és B nem egyirányúak, akkor az $A \times B$ művelet eredménye egy, a nem egyirányú A, B vektorok síkjára merőleges vektor.
2. $X \cdot Y = 0$, ha $X \perp Y$.
3. $X \times Y = 0$, ha $X \parallel Y$.

(39) értelmében ezen állításokat elég egységvektorokra bizonyítani, pl.

$$2'. E_1 \cdot E_2 = 0, \text{ ha } E_1 \perp E_2$$

és

$$3'. E \times E = 0.$$

1. BIZONYÍTÁSA: Legyen C egy, az A, B vektorok síkjára merőleges vektor. Az $A \times B$ vektor mindenesetre előállítható az A, B és C által feszített koordináta-rendszerben:

$$A \times B = aA + bB + cC.$$

Az A, B, C vektorhármast C körül π -vel elforgatva, ez átmegy a $(-A), (-B), C$ vektorhármásba, tehát a) miatt

$$(-A) \times (-B) = a(-A) + b(-B) + cC = -aA - bB + cC.$$

De b)-ből

$$(-A) \times (-B) = A \times B,$$

tehát

$$-aA - bB + cC = aA + bB + cC,$$

ami csak akkor lehetséges, ha

$$a = 0, b = 0, A \times B = cC,$$

tehát az $A \times B$ vektor az A, B vektorok síkjára merőleges és ezt kellett kimutatni.

2'. BIZONYÍTÁSA: Az $E_1 \perp E_2$ vektorpárt E_2 körül π szöggel elforgatva a $(-E_1), E_2$ párt kapjuk, tehát a) és b)-ből

$$E_1 \cdot E_2 = (-E_1) \cdot E_2 = -E_1 \cdot E_2 \text{ azaz } E_1 \cdot E_2 = 0.$$

következik és ez éppen a 2' állítás.

3'. BIZONYÍTÁSA hasonló: b)-ből nyilvánvaló, hogy $E \times E$ iránya csak E -ével (vagy $(-E)$ -ével) eshetik össze:

$$E \times E = kE.$$

Mivel azonban az E vektor π -vel elforgatva $(-E)$ -be kerül a) miatt egyúttal

$$(-E) \times (-E) = k(-E) = -kE,$$

de b) értelmében

$$-kE = (-E) \times (-E) = E \times E = kE,$$

tehát

$$k = 0, E \times E = 0, \quad \text{qu. e. d.}$$

Most már eljuthatunk feltételeinkből a (7) függvényegyenlethez, melynek megoldásából eddigi eredményeink alapján következik a 8. tétel.

Vezessük be a

$$(40) \quad E_A \cdot E_B = f(\varphi),$$

illetve a

$$(41) \quad E_A \times E_B = f(\varphi) E_{A \times B}$$

jelöléseket, ahol φ az E_A és E_B vektorok bezárta szög

$$(E_A, E_B) \angle = \varphi$$

és az $E_A, E_B, E_{A \times B}$ vektorok merőleges jobbrendszert alkotnak. (A (40) és (41) képletekben szereplő $f(\varphi)$ nem ugyanaz, de a következőkben azonos relációkat fogunk róluk kimutatni, úgyhogy a közös jelölés kényelmesebb lesz.) Legyen továbbá E_1, E_2, E_3 három komplanáris vektor és szögeik:

$$(E_1, E_2) \angle = \varphi - \psi, \quad (E_1, E_3) \angle = \varphi + \psi,$$

tehát

$$(E_1, E_2 + E_3) \angle = \varphi.$$

Akkor a b) disztributivitásból adódó

$$E_1 \cdot (E_2 + E_3) = E_1 \cdot E_2 + E_1 \cdot E_3,$$

ill.

$$E_1 \times (E_2 + E_3) = E_1 \times E_2 + E_1 \times E_3 \quad [(E_1 \times E_2) \parallel (E_1 \times E_3)]$$

-ből

$$(7) \quad 2f(\varphi) \cos \psi = f(\varphi + \psi) + f(\varphi - \psi)$$

következik. E függvényegyenlet általános megoldása pedig, mint az I. 5. § 1.-ben láttuk (minden további feltétel nélkül):

$$f(\varphi) = a \cos \varphi + b \sin \varphi \quad \left(f(0) = a, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = b \right).$$

Ha már most a skaláris műveletet vizsgáljuk, akkor (39) és (40) értelmében a fenti 2. segédteletből

$$b = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f(\varphi) = a \cos \varphi$$

$$A \cdot B = a |A| |B| \cos(A, B) \angle ;$$

a vektoriális műveletre pedig (41), 3', és (39) révén

$$a = f(0) = 0, \quad f(\varphi) = b \sin \varphi,$$

$$A \times B = b |A| |B| \sin(A, B) \angle E_{A \times B}, \quad (A \perp E_{A \times B} \perp B)$$

qu. e. d.

Ebből hasonló tételek következnek a kvaterniószorzásra is ([31], vö. [27], [4]).

IRODALOM

- [1] D'ALEMBERT, J.: *Mémoire sur les principes de mécanique*, Hist. Acad. sci. Paris, 1769 (1778), 279—287.
- [2] CAUCHY, A. L.: Cours d'analyse de l'École Polyt. 1. *Analyse algébrique*, Paris, 1821, p. 103. Oeuvres (2), 2, Paris, 1897, 98—105, 220.
- [3] LOBACHEVSKIJ, N. I.: *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Berlin, 1840, § 36.
- [4] FROBENIUS, G.: Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, *Journal für reine und angew. Math.*, 84 (1897), 1—63.
- [5] JENSEN, J. L. W. V.: Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.*, 30 (1906), 179—193.
- [6] KACZMARZ, ST.: Sur l'équation fonctionnelle $f(x) + f(x+y) = \varphi(y)f\left(x + \frac{y}{2}\right)$, *Fund. Math.*, 6 (1924), 122—129.
- [7] KLEIN, F.: *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Berlin, 1928, VI. § 1.
- [8] CACCIOPOLI, R.: L'equazione funzionale $f(x+y) = F[f(x), f(y)]$, *Giornale di Battaglini*, (3), 66 (1928), 1—6.
- [9] PICARD, É.: *Leçons sur quelques équations fonctionnelles avec des applications à divers problèmes d'analyse et de physique mathématique*, Paris, 1928, 1950.
- [10] FRÉCHET, M.: Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités en chaîne, *Bull. Soc. Math. de France*, 60 (1932), 242—280.
- [11] KHINTCHINE, A.: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Ergebnisse d. Math.*, II. 4. Berlin, 1933.
- [12] VRANCEANU, G.: *Leçons de géométrie différentielle*, I., Bucarest, 1947, 65—77.
- [13] ACZÉL, J.: On mean values, *Bulletin of the Am. Math. Soc.*, 54 (1948), 392—400.
- [14] ACZÉL, J.: Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Comm. Math. Helv.*, 21 (1948), 247—256.
- [15] ACZÉL, J.: Sur une équation fonctionnelle, *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sci.*, 2 (1948), 257—262.
- [16] ACZÉL, J.: Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bull. de la Soc. Math. de France*, 76 (1949), 59—64.
- [17] TAMARI, D.: Caractérisation des semi-groupes à un paramètre, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 228 (1949), 1092—1094.
- [18] GOŁĄB, S.: Sur les objets géométriques non différentiels, *Bulletin Acad. Polon. Sci. Cl. Sci. Math. Nat. A*, 1949, 67—72.
- [19] RYLL-NARDZEWSKI, CZ.: Sur les moyennes, *Studia Math.*, 11 (1949), 31—37.
- [20] KNASTER, B.: Sur une équivalence pour les fonctions, *Colloquium Math.*, 2 (1949), 1—4.
- [21] ACZÉL, J.: Über einparametrische Transformationen, *Publ. Math.*, 1 (1950), 243—247.
- [22] ACZÉL, J.: Függvényegyenletek az alkalmazott matematikában, *MTA. III. Osztály Közleményei*, 1 (1951), 131—142.
- [23] ACZÉL, J., KALMÁR, L., MIKUSINSKI J. G.: Sur l'équation de translation, *Studia Math.*, 12 (1951), 112—116.
- [24] СЕВАСТЬЯНОВ, Б. А.: Теория бегущих случайных процессов, *Усп. Мат. Наук*, 6 (1951), б. 6 (46), 47—99.
- [25] JÁNOSSY, L., RÉNYI, A., ACZÉL, J.: On composed Poisson distributions, I., *Acta Math. Hung.*, 1 (1950), 209—224. (Magyarul: *MTA III. Osztály Közleményei*, 1 (1951), 315—328.)

- [26] RÉNYI, A.: On composed Poisson distributions, II., *Acta Math. Hung.*, 2 (1951), 83—98.
- [27] RICHMOND, D. E.: Complex numbers and vector-algebra, *Amer. Math. Monthly*, 58 (1951), 622—628.
- [28] ACZÉL, J.: Többváltozós függvényegyenletek, I., *Mat. Lapok*, 2 (1951), 99—117.
- [29] ACZÉL, J.: Többváltozós függvényegyenletek, II., *MTA. AMI. Közleményei*, 1 (1952), 311—333.
- [30] ACZÉL, J.: On composed Poisson distributions, III., *Acta Math. Hung.*, 3 (1952), 219—224.
- [31] ACZÉL, J.: Bemerkungen über die Multiplikation von Vektoren und Quaternionen, *Acta Math. Hung.*, 3 (1952), 309—316.
- [32] SZÁSZ, P.: Neue Bestimmung des Parallelenwinkels in der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln. *Acta Sci. Math.*, 14 (1952), 247—251.
- [33] SZÁSZ, P.: A hiperbolikus trigonometria új síkbeli előállítása a klasszikus segéd-eszközökkel, *MTA. III. Osztály Közleményei*, 3 (1953), 527—533.
- [34] ДОБРУЩИН, Р. А.: Обобщение уравнения Колмогорова для Марковских процессов с конечным числом возможных состояний, *Мат. Сборник*, (75), 33 (1953), 567—596.
- [35] ACZÉL, J.: Grundriss einer allgemeinen Behandlung von einigen Funktionalgleichungstypen, *Publ. Math.* 3 (1953), 119—132.
- [36] BAKER, G. A.: Einstein-numbers, *Amer. Math. Monthly*, 61 (1954), 39—41.
- [37] ACZÉL, J.: Lösung der Vektor-Funktionalgleichung der homogenen und inhomogenen n -dimensionalen einparametrischen „Translation“, der erzeugenden Funktion von Kettenreaktionen und des Stationären und nicht-stationären Bewegungsintegrals, *Acta Math. Hung.*, 6 (1955), 131—141.
- [38] ACZÉL, J., VARGA, O.: Bemerkung zur Cayley-Kleinschen Maßbestimmung, *Publ. Math.*, 4 (1955), 3—15.
- [39] ACZÉL, J.: Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff I, *Publ. Math.*, 4 (1955), 33—42.
- [40] ACZÉL, J., HOSSZÚ, M.: On transformations with several parameters and operations in multidimensional spaces, *Acta Math. Hung.*, 7 (1956), 327—338.

A Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem
Matematikai Intézete