

AZ ATOMMAGOK STATISZTIKUS ELMÉLETÉRŐL

GOMBÁS PÁL r. tag

Előadta a Fizikai Állandó Bizottság 1951 december 12-én tartott ülésén

1. Bevezetés. — 2. A statisztikus magmodell. — 3. A Ritz-féle eljárás a nukleonok sűrűségeloszlásának és a magok energiájának meghatározására. — 4. Eredmények. — 5. Diszkusszió.

1. Bevezetés

Az atommagok statisztikus elmélete kb. két évtizedes multra tekint vissza. Elsőnek 1933-ban *Majorana*¹ alkalmazta a statisztikus elméletet atommagokra, aki csak néhány kvalitatív — de nagyon is lényeges — eredményt ért el. Az atommagok statisztikus elméletének további fejlődéséhez a legfontosabb alapokat egyrészt *Heisenberg*², másrészt *Weizsäcker*³ vetették meg, mégpedig *Heisenberg* a kicserélődési energiának különféle potenciálokra való explicit kiszámításával, *Weizsäcker* pedig a kinetikus energiakorrekciónak az u. n. inhomogenitási korrekciónak a bevezetésével. A további számítások⁴ azután ezeken az alapokon történtek, általában oly módon, hogy a nukleonok közti vonzási energiát többnyire a $-\alpha e^{-\beta r_{ij}}$ vagy a $-\alpha e^{-\beta r_{ij}^2}$ alakban tételezték fel, ahol r_{ij} két nukleon egymástól való távolságát jelenti. *Flügge*⁵ munkájának kivételével mindezeket a számításokat igen leegyszerűsített feltevésekkel vitték keresztül általában olyan módon, hogy a nukleonok sűrűségeloszlására igen leegyszerűsített feltevéseket tettek, sőt a legtöbb esetben a sűrűséget — elhanyagolva az inhomogenitási korrekciót — teljesen konstansnak tételezték fel. Ilyen szempontból *Flüggenek* már említett munkája lényeges haladást jelentett, amennyiben ebben a nukleonok sűrűségeloszlására vonatkozóan semmiféle egyszerűsítő feltevés nem szerepel, hanem a sűrűségeloszlás és a magenergia a könnyű magokra egészen Si^{28} -ig a Ritz-féle eljárással lett meghatározva. Mindezeknek a számításoknak közös vonása, hogy ezekkel az eljárásokkal az atommagok energiájára, attól függően, hogy a szabadon választható empirikus paramétereket hogyan választották meg, vagy a könnyű magokra, vagy a nehéz magokra adódtak a tapasztalattal egyező eredmények. Így pl. *Flügge* munkájában, ahol az empirikus paraméterek a könnyű magok adataiból lettek meghatározva, az energia már a *Flügge* által tárgyalt legnehezebb mag esetében, Si^{28} -nál, az empirikustól 12^o/o-al tér el. Kivételt képeznek természetesen azok a munkák, melyeknek célja egy a tapasztalattal minél jobban egyező energiaformulának a meghatározása, amely 3—4, vagy esetleg még több empirikus paramétert tartalmaz; ilyen formulával ter-

mészszerűen az empirikus eredményeket a legkönnyebb magoktól a legnehezebbekig a tapasztalattal szinte tökéletes megegyezésben lehet leírni.⁶ Mindez azonban inkább az empirikus adatoknak formulákkal való leírása, nem pedig a tapasztalati tényeknek általánosabb törvényszerűségekre való visszavezetése, aminek következményeképpen ezek a számítások ebből a szempontból tekintve csak kisebb érdeklődésre tarthatnak igényt, amivel természetesen nem akarjuk ezeknek az eljárásoknak rendkívül nagy heurisztikus értékét kétségbevonni.

Jelen dolgozat célja a magok energiájának a statisztikus elmélet alapján való számítása az általános energia-minimumelvből a Ritz-féle eljárással, mindennemű önkényes feltevés nélkül. A nukleonok között egy skaláris Yukawa-féle kölcsönhatási potenciált veszünk fel és feltételezzük, hogy a neutron-proton, neutron-neutron és proton-proton közti kölcsönhatási energiának csak a nukleonoknak egymástól való távolságától függő része egyenlő és a következő alakú

$$J(r_{ij}) = -\gamma \frac{e^{-r_{ij}/r_0}}{r_{ij}}, \quad (1)$$

ahol r_{ij} két részecskének egymástól való távolsága, r_0 a π -mezonok Compton-féle hullámhossza és γ egy szabadon választható paraméter. Ha a π -mezonok tömegére, M_0 -ra, a Powell és munkatársai által mért értéket⁷ választjuk, amely 285 elektrontömeggel egyenlő, akkor nyerjük, hogy

$$r_0 = \frac{h}{2\pi M_0 c} = 1,355 \cdot 10^{-13} \text{ cm}, \quad (2)$$

ahol h a Planck-féle állandó és c a fénysebesség.

Az egész elméletben γ az egyetlen szabadon választható paraméter, amelynek alkalmas megválasztásával a magok energiájára a legkönnyebb magoktól a legnehezebbekig a tapasztalattal igen jól egyező eredmények adódnak. Eltekintve a legkönnyebb magoktól, a tapasztalattól való eltérés kisebb mint 7%. Az igen könnyű magok esetében, amelyeknél a magenergia a tömegszámnak nem monoton függvénye, a statisztikus elmélet természetesen ezen erősen ingadozó empirikus értékeknek csak egy középértékét tudja adni. Ugyancsak igen jó közelítéssel adja az elmélet a stabilis izobárok elhelyezkedését a tömegszám-rendszám diagrammban.

Hogy az itt kifejtendő statisztikus elmélet, amely természeténél fogva elsősorban a nehéz magokra alkalmazható, könnyű magok esetében is ilyen jó eredményeket szolgáltat, annak a körülménynek tulajdonítható, hogy két korrekciót vezettünk be. Mégpedig először is korrigáltuk a nukleonok kicserélődési kölcsönhatását, mégpedig oly módon, hogy a részecskéknak önmagukkal való kicserélődési kölcsönhatásából származó energia eltűnjön. Másodszor pedig a kinetikus energiát is módosítottuk, mégpedig oly módon, hogy a statisztikus kinetikus energia a He^4 mag esetében és könnyebb magok esetében átmegy az exakt hullámmechanikai kifejezésbe. Ezen korrekciókkal

elértük, hogy a könnyű magok statisztikus energiakifejezése a hullámmechanikait jól approximálja és az empirikus eredményeknek jó középértékét adja.

2. A statisztikus magmodell

A következőkben röviden áttekintjük a statisztikus magmodell alapjait⁸; mégpedig további fejtegetéseinket egy nehéz magra vonatkoztatjuk, melyben a neutronok száma N , a protonok száma Z , melynek tömegszáma tehát $A = N + Z$. A statisztikus magmodell azon feltevésen alapszik, hogy a mag térfogatát dv nagyságú térfogatelemekre lehet felbontani, melyekben a potenciál praktice konstans és amelyek még sok nukleont tartalmaznak, melyeket szabad nukleongáznak lehet tekinteni a hőmérséklet abszolút nulla pontján. Attól a nehézségtől, hogy ez a feltétel a mag szélén a kisszámú nukleon miatt nem teljesíthető, eltekinthetünk, mivel a mag széle az energiaszámítás szempontjából aránylag kis jelentőséggel bír. Célunk a nukleonok sűrűségeloszlását, ill. a mag energiáját a stabil egyensúlyi helyzetben meghatározni. Ez az energia minimumelve alapján oly módon történik, hogy meghatározzuk a mag energiáját, mint a neutronsűrűség ϱ_n és protonsűrűség ϱ_p függvényét és meghatározzuk azokat a sűrűségeloszlásokat, amelyekkel az energia, $E(\varrho_n, \varrho_p)$ minimummal bír. ϱ_n -re és ϱ_p -re a következő mellékfeltételek állnak fenn:

$$\int \varrho_n dv = N \quad \text{és} \quad \int \varrho_p dv = Z. \quad (3)$$

Ezenkívül ϱ_n -nek és ϱ_p -nek még a következő feltételeket kell teljesíteni. Először is mindkét sűrűségeloszlásnak a magtól nagy távolságban gyorsan el kell tűnnie. Másodszor pedig ϱ_n - és ϱ_p -hez, mint a magtól való távolság függvényéhez a magcentrumban vont érintők iránytangenseinek szimmetria okokból el kell tűnniök. Első feladatunk az $E(\varrho_n, \varrho_p)$ függvény meghatározásában áll, amit tagonként végzünk el.

Először is a nukleonok kicserélődési kölcsönhatásából származó kicserélődési energiával foglalkozunk, amely a magot összetartja. Ez három részből áll, mégpedig a neutronoknak protonokkal, a neutronoknak neutronokkal és a protonoknak protonokkal való kicserélődési kölcsönhatásából származó energiagtagokból, melyeket rendre E_A^{np} -, E_A^{nn} - és E_A^{pp} -vel jelölünk. A nukleonok közti kölcsönhatási energiának a koordinátáktól függő részét mind a három esetben az (1) alakban vesszük fel. Az E_A^{np} energia számításánál a neutronok és protonok közti kicserélődési kölcsönhatásról feltételeztük, hogy az egy Majorana típusú kölcsönhatás. Az egyenlő részek közti kölcsönhatás számításánál fel kell tételezni, hogy a részecskék kölcsönhatása a spintől függ, mégpedig két részecske közti kölcsönhatás esetében ezt a függést az (s_1, s_2) alakban tételeztük fel, ahol s_1 és s_2 a két részecskére vonatkozó Pauli-féle spin-operátort jelenti. Ennek a spintől való függésnek a feltételezésével azt érjük el, hogy a $J(r_{ij})$ kölcsönhatásból származó közönséges (nem kicserélődési) energia eltűnik, és csak a kicserélődési energia marad meg. A közönséges energiának eltűnése

feltétlenül szükséges, mert ez az energia az összenergiának a tömegszámtól való teljesen helytelen függéséhez vezetne.⁹

A kicserélődési energiának a számítása eléggé körülményes, de elemi úton elvégezhető.¹⁰ A következő jelöléseket vezetve be

$$\omega_n = (3\pi^2 \rho_n)^{1/3} r_0, \quad \omega_p = (3\pi^2 \rho_p)^{1/3} r_0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} f(\omega_n, \omega_p) = \frac{1}{24\pi^3} \Big\{ & 3(\omega_n^3 \omega_p + \omega_n \omega_p^3) - \omega_n \omega_p + \\ & + \frac{1}{4} \left[1 + 6(\omega_n^2 + \omega_p^2) - 3(\omega_n^2 - \omega_p^2)^2 \right] \ln \frac{1 + (\omega_n + \omega_p)^2}{1 + (\omega_n - \omega_p)^2} - \\ & - 4(\omega_n^3 + \omega_p^3) \arctg(\omega_n + \omega_p) + 4(\omega_n^3 - \omega_p^3) \arctg(\omega_n - \omega_p) \Big\} \end{aligned} \quad (5)$$

így nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} E_A^{np} &= -\frac{4\gamma}{r_0^4} \int f(\omega_n, \omega_p) dr, & E_A^{nn} &= -\frac{\gamma}{r_0^4} \int f(\omega_n, \omega_n) dr, \\ E_A^{pp} &= -\frac{\gamma}{r_0^4} \int f(\omega_p, \omega_p) dr. \end{aligned} \quad (6)$$

A statisztikus tárgyalás következményeképpen E_A^{nn} és E_A^{pp} a neutronoknak, ill. protonoknak önönmagukkal való kicserélődési energiáját is tartalmazza, melynek természetszerűen semmiféle fizikai realitás nem tulajdonítható és amely könnyű magok esetében számottevő hibához vezet. Ezt a hibát durván oly módon korrigálhatjuk, hogy a részecskéknak önönmagukkal való kicserélődéséből származó energiáját egy részecske átlagos kicserélődési energiájával E_A^{nn}/N -el ill. E_A^{pp}/Z -vel egyenlőnek tételezzük fel és az energiakifejezésből levonjuk. A korrekció tehát abban áll, hogy E_A^{nn} -t és E_A^{pp} -t az $1 - \frac{1}{N}$ ill.

$1 - \frac{1}{Z}$ faktorokkal szorozzuk meg. Amint látható, az így korrigált energiák $N=1$, ill. $Z=1$ esetében eltűnnek, ahogy annak lennie is kell; a korrekció tehát ebben az esetben exakt. Mivel a korrekció csak könnyű magokra lényeges, tovább egyszerűsíthető. Ha ugyanis könnyű magok esetében a stabilis izotópokra szorítkozunk, akkor $N=Z=A/2$. Ebben az esetben tehát a fentebb megadott két korrekciófaktor helyett az $1 - \frac{2}{A}$ közös korrekciófaktort vezethetjük be, melyet nehezebb magok esetében is megtarthatunk, minthogy ezeknél az egész korrekció jelentésszerűtlen.

A kicserélődési energiával egyensúlyt tartó leglényegesebb pozitív energiát a neutronok és protonok Fermi-féle nullponti energiája, melyre a következő kifejezés adódik

$$E_K = \kappa_K \int (\rho_n^{5/3} + \rho_p^{5/3}) dr, \quad (7)$$

ahol κ_k a következő univerzális állandó

$$\kappa_K = \frac{3}{40} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{M}. \quad (8)$$

M egy nukleon tömege, amelyet egy neutron és proton tömegének algebrai középértékével vettünk fel egyenlőnek. A következők szempontjából megemlítiük, hogy az E_K energia kizárólag a Pauli-elv következménye; a Pauli-elv nélkül, tehát a Bose statisztika esetében E_K egyáltalán nem lépne fel.

E kinetikus energia mellett *Weizsäcker*¹¹ szerint még egy kinetikus energiatagot, az u. n. inhomogenitási korrekciót kell figyelembe vennünk, amely onnan származik, hogy a nukleonokat nem lehet teljesen szabadnak tekinteni, vagyis hogy a nukleonok sajátfüggvénye nem pontosan síkhullám. Ezt az energiát *Weizsäcker* szerint a következő alakban lehet előállítani.

$$E_I = \kappa_I \int \left[\frac{1}{\varrho_n} \left(\frac{d\varrho_n}{dr} \right)^2 + \frac{1}{\varrho_p} \left(\frac{d\varrho_p}{dr} \right)^2 \right] dr, \quad (9)$$

ahol κ_I a következő univerzális állandó

$$\kappa_I = \frac{h^2}{32\pi^2 M}. \quad (10)$$

Amint könnyen meggyőződhetünk E_I a részecskéknek Schrödinger-féle kinetikus energiája abban az esetben, ha az összes részecskék a legmélyebb energiaállapotban foglalnak helyet, s ennek megfelelően a részecskék sajátfüggvényei azonosak. Tehát ha csak E_I -t vennénk figyelembe, a Pauli-elvet teljesen elhanyagolnánk. A Pauli-elvet a statisztikus tárgyalási módban az E_K energiával vesszük figyelembe, amely éppen onnan származik, hogy egy kvantumállapotba, vagyis fázistércellába legfeljebb két neutron és két proton lehet elhelyezni. Innen azonnal látható az is, hogy abban az esetben, ha az E_I és az E_K energiát egyszerre vesszük figyelembe, hibát követünk el, mert a legmélyebb energiaállapotban helyetfoglaló két neutron és két proton kinetikus energiáját kétszer vesszük számításba, mert ez egyrészt a hullámmechanikai kifejezésben E_I -ben, másrészt a statisztikus tárgyalási mód következményeképpen E_K -ban is benne foglaltatik.¹² A legjobban nyilvánul meg a hiba két neutron és két proton esetében, tehát a He^4 mag esetében. Minthogy ebben az esetben a két neutron és két proton a legmélyebb energiaállapotban foglal helyet, nem kell a részecskéket magasabb energiaállapotba emelni, ami azt jelenti, hogy E_K -nak el kellene tűnnie. Ugyanez volna természetesen a helyzet egy olyan mag esetében, melyben a részecskék száma 4-nél kisebb. Nagyobb részecskeszám esetében ez a hiba nem jelentős. Ezt a hibát egészen durván oly módon lehet korrigálni, hogy E_K -ból levonjuk két neutronnak és két protonnak az átlagos kinetikus energiáját, minek következtében a statisztikusan számított kinetikus energia $N=2$, $Z=2$ esetre eltűnik, amint annak lennie is kell; a korrekció tehát ebben az esetben

exakt. Ekkor természetesen még azt a kikötést kellene tennünk, hogy a statisztikusan számított kinetikus energia négy-nél kisebb összrészecskeszám esetére is eltűnjön, ami azonban a mi esetünkben jelentéktelen, minthogy számításainkat olyan magokra, melyekben az összes részecskék száma négy-nél kisebb, semmiesetre sem terjeszthetjük ki. Ahelyett, hogy E_K -nak a neutronokra és protonokra vonatkozó részére külön korrekciókat vezetnénk be, ugyanolyan okoknál fogva, melyeket a részecskéknek önmagukkal való kicserélődési energiájának korrigálásánál már kifejtettünk, E_K mindkét részére egy közös korrekciót vezetünk be, amely abban áll, hogy E_K -ból négy nukleon átlagos kinetikus energiáját levonjuk, vagyis E_K -t az $1 - \frac{4}{A}$ korrekciófaktorial megszorozzuk.

Végül még a protonoknak elektrosztatikus Coulomb-féle kölcsönhatásából számított energiáját, E_C -t és a Coulomb-kölcsönhatás következtében fellépő kicserélődési energiát, E_R -t kell meghatároznunk, melyekre a következő kifejezések adódnak

$$E_C = \frac{e^2}{2} \iint \frac{q_p(\mathbf{r}) q_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \quad (11)$$

és

$$E_R = -\kappa_R \int q_p^{4/3} d\mathbf{r}, \quad (12)$$

ahol κ_R a következő univerzális állandó

$$\kappa_R = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} e^2 \quad (13)$$

és e a pozitív elemi töltés. E_C -ben a protonoknak önmagukkal való elektrosztatikus kölcsönhatásából származó energiája is bennfoglaltatik, ezt kompenzálja a protonoknak önmagukkal való kicserélődési energiája, amelyet E_R tartalmaz. Ez a kompenzáció a hullámmechanikában teljes, a statisztikus elméletben azonban csak részleges. De az ezekből az önkölcsönhatásokból származó energiák csak kis protonszámok esetében számottevőek E_C -hez, ill. E_R -hez képest. Kis protonszámok esetében azonban $E_C + E_R$ az összenergiához viszonyítva jelentéktelen. Ezért az ezen önkölcsönhatásokból származó energiák pontosabb korrekciójától eltekinthetünk.

A mag összenergiájára tehát a következő kifejezést nyerjük

$$E = E_A^{np} + \left(1 - \frac{2}{A}\right) (E_A^{nn} + E_A^{pp}) + \left(1 - \frac{4}{A}\right) E_K + E_J + E_C + E_R. \quad (14)$$

A (6), (7), (9), (11) és (12) kifejezések behelyettesítése után innen E -t mint q_n és q_p függvényét nyerjük.

3. A Ritz-féle eljárás a nukleonok sűrűségeloszlásának és a magok energiájának meghatározására

Miután E -t mint a ϱ_n és ϱ_p sűrűségeloszlások függvényét meghatároztuk, feladatunk a fentebb említett minimumprobléma megoldásában áll, ami azt jelenti, hogy meg kell határoznunk azokat a sűrűségeloszlásokat, amelyek az energiát minimummá teszik. Ezt a feladatot a Ritz-féle eljárás segítségével oldjuk meg, ami azt jelenti, hogy a sűrűségeloszlások, ϱ_n és ϱ_p számára a határfeltételeket kielégítő függvényeket veszünk fel, amelyek több, a minimumelvől meghatározandó variációs paramétert tartalmaznak. ϱ_n és ϱ_p -t a következő általános alakban célszerű felvenni

$$\varrho_n = \varrho_{n0} e^{-a_n^2 \xi^2} \left(1 + \sum_{i=1}^k c_{ni} \xi^{2i} \right)^3, \quad \varrho_p = \varrho_{p0} e^{-a_p^2 \xi^2} \left(1 + \sum_{i=1}^k c_{pi} \xi^{2i} \right)^3, \quad (15)$$

ahol a mag középpontjától való távolság r helyébe a $\xi = r/r_0$ dimenzió nélküli változót vezettük be, a_n, a_p továbbá a c_{ni} és c_{pi} együtthatók variációs paraméterek, melyek az energia minimumelvéből lesznek meghatározva. ϱ_{n0} és ϱ_{p0} normálási együtthatók, melyek értékét a (3) normálási feltételből nyerjük. Amint (15)-ből látható, ϱ_{n0} és ϱ_{p0} a neutron-, ill. protonsűrűségek a mag középpontjában. Amint továbbá látható, a (15) kifejezések a ϱ_n és ϱ_p -re vonatkozó fentebb említett két feltételt is kielégítik, melyek szerint először is ϱ_n -nek és ϱ_p -nek magtól a nagy távolságban el kell tűnnie, másodszer pedig ϱ_n és ϱ_p kezdeti érintői iránytangenseinek szintén el kell tűnnie. Ez az utóbbi feltétel azáltal lesz teljesítve, hogy ϱ_n -ben és ϱ_p -ben ξ -nek, tehát r -nek csak páros hatványai szerepelnek. A ϱ_n és ϱ_p kifejezésében a polinom a harmadik hatványon szerepel, ami a (7) és (12) integrálok kiszámítása szempontjából szükséges, mivel a (7) és (12) kifejezésben az integrandusban $\varrho_n^{3/2}$ és $\varrho_p^{3/2}$, ill. $\varrho_p^{4/3}$ áll.

Az itt véghezvitt első közelítésben az összes c_{ni} és c_{pi} együtthatókat nullával tettük egyenlővé, továbbá feltételeztük, hogy $a_n = a_p = a$, ami azt jelenti, hogy a neutron- és protonsűrűséget egymással arányosnak tételeztük fel és csak annyiban tekintettük őket különbözőknek, amennyiben a neutronok és protonok száma egymástól különböző. Az első közelítésben tehát ϱ_n és ϱ_p a következő alakú

$$\varrho_n = \varrho_{n0} e^{-a^2 \xi^2}, \quad \varrho_p = \varrho_{p0} e^{-a^2 \xi^2}, \quad (16)$$

ahol

$$\varrho_{n0} = \frac{Na^3}{\pi^{3/2} r_0^3}, \quad \varrho_{p0} = \frac{Za^3}{\pi^{3/2} r_0^3}. \quad (17)$$

A (16) függvényeknek az energiakifejezésbe való behelyettesítése után a mag energiáját E -t mint az a variációs paraméter függvényét nyerjük. Feladatunk annak az a -értéknek meghatározása, amely E -t minimummá teszi. Ez az a -érték felel meg a stabilis egyensúlyi állapotnak és az ezzel az a -val számított E érték, melyet E_0 -al jelölünk, a mag energiája az egyensúlyi állapotban.

A számítások keresztülviteléhez még a szabadon választható γ paraméter értékét kell meghatároznunk. Ezt úgy választottuk meg, hogy a legstabilabb izobárokban a következőkben meghatározandó energiái a legkönnyebb magoktól a legnehezebbekig a lehető legkisebb eltérést mutassák az empirikus értékektől. γ számára a következő értéket választottuk,

$$\gamma = 66,24 e^2,$$

mellyel ez a követelmény igen kielégítő módon teljesül.

4. Eredmények

Az előző pontban meghatározott energiaminimum még A -nak és Z -nek a függvénye: Egy megadott $A = N + Z$ értékre meghatározott E_0 energiaminimum tehát még Z -nek a függvénye; e függvény adja az izobárok energiáját. Egy izobár-sornak energiaértékei egy bizonyos Z értéknél minimumot mutatnak, melynek ezen izobár-sor legstabilisabb eleme felel meg. Az egyes A tömegszámokhoz tartozó legstabilisabb izobárokat a következő egyenletből lehet meghatározni

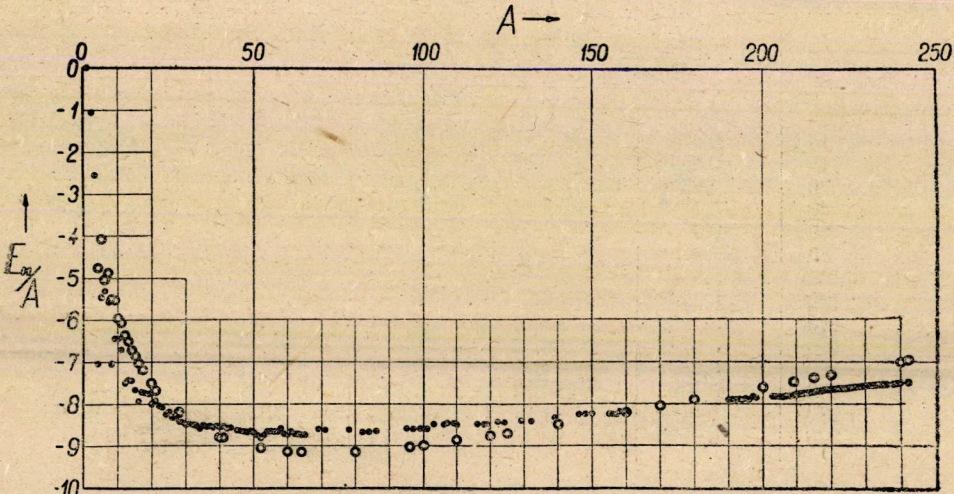
$$\left(\frac{\partial E}{\partial Z} \right)_A = 0, \quad (18)$$

ahol az A index a zárójel mellett azt jelenti, hogy a differenciálásnál A -t konstansnak kell tekinteni. Innen Z és A között egy összefüggést nyerünk, melyből minden A értékhez meg lehet határozni a legstabilisabb izobár rendszámát; az ily módon meghatározott rendszámok, melyeket Z_{eff} -el jelölünk, természetesen nem egész számok. A legstabilisabb izobárok energiáját azután úgy határoztuk meg, hogy A konstansul tartása mellett az $E_0(A, Z)$ energiát azon egészszámú Z értéknél vettük, mely Z_{eff} -hez legközelebb áll. Ezen Z_{eff} -értékek lekerekítése következményeképpen az egészen könnyű magok energiagörbéjében — ahol az izobár-sorok egyes tagjai közti energiadifferenciák relatíve nagyok — ingadozások mutatkoznak, mégpedig a legstabilisabb izobárokban egy részecskére eső átlagenergiája, E_{00}/A , az egymásután következő A értékeknél nem esik egy síma görbére, hanem páros tömegszám esetében kissé mélyebben, páratlan tömegszám esetében kissé magasabban fekszik, mint azt a görbe monoton menete kívánná.

Az $a \cdot Z_{eff}$ és E_{00}/A értékek több magra az 1. tabellában vannak összeállítva. Összehasonlításként a megfelelő legstabilisabb izobárokra Z és E_{00}/A empirikus értékeit¹³ is megadtuk. A teljesebb áttekintés céljából az elméleti és empirikus adatok A függvénye gyanánt az 1. ábrán grafikusán is fel vannak tüntetve.¹⁴ Amint látható, az elméleti értékeknek a kísérleti értékekkel való egyezése úgy a kötési energiák, mint a rendszámok esetében nagyon jó.

Az izobárok energiája Z függvénye gyanánt a könnyű izobárok esetében $A = 16$ -ra és nehéz izobárok esetében $A = 200$ -ra a 2. ill. a 3. ábrán látható.

A két függvény összehasonlítása mutatja, hogy az energiaminimum nehéz izobárok esetében egészen lényegesen laposabb, mint könnyűeknél. Hogy $A=200$ esetén az energiaminimum $Z=85$ és 86 között, tehát egy kb. 1%-al nagyobb Z értéknél fekszik, mint az 1. táblában megadott Z érték, az arra vezethető vissza, hogy az utóbbi Z értéket (18)-ból egy $(N-Z)/A$ szerinti sorfejtéssel és a harmad- és negyedrendben kicsiny tagok elhanyagolásával nyertük.



1. ábra. Az egy részecskére eső átlagenergia E_{00}/A , mint a tömegszám A függvénye azon magokra, amelyek energiája megadott A esetén a legmélyebb;

- számított értékek,
- empirikus értékek stabilis magokra,
- ⊙ empirikus értékek instabilis magok esetén.

Ezekután még a nukleonok sűrűségeloszlásával és ezzel kapcsolatban a magrádiusz kérdésével szeretnénk foglalkozni. A teljes nukleonsűrűséget, ϱ -t, a következő kifejezéssel lehet előállítani

$$\varrho = \varrho_n + \varrho_p = \varrho_0 e^{-\alpha^2 \xi^2},$$

ahol

$$\varrho = \varrho_{n0} + \varrho_{p0} = \frac{Aa^3}{\pi^{3/2} r_0^3}$$

a teljes nukleonsűrűséget jelenti a mag középpontjában. A 2. táblában a különböző tömegszámokra megadott ϱ_0 értékekből látható, hogy ϱ_0 $A \approx 60$ -tól a legnehezebb magokig csak kevésbé változik.

A nukleonsűrűség ϱ mint r függvénye egy haranggörbe, és itt felmerül a kérdés, hogy egy ilyen sűrűségeloszlás esetében hogyan lehet a kísérleti magrádiuszokkal összehasonlítható megrádiuszokat definiálni. Logikusan úgy kellene eljárni, hogy a magrádiusz R gyanánt azon r értéket definiáljuk, amelynél ϱ elegendő nagy értéket kezd felvenni. Ekkor természetszerűen

1. TÁBLÁZAT

A számított rendszámok és magenergiák összehasonlítása a kísérleti értékekkel. Ott, ahol a legstabilisabb izobár a kísérleti adatok hiánya miatt nem állapítható meg, az összes stabilis izobárok rendszámait adtuk meg; az instabilis magok rendszámait zárójelbe tettük. Az energiák MeV egységekben vannak megadva.

A	Elméleti értékek			Kísérleti értékek	
	a	Z_{eff}	$-E_{00}/A$	Z	$-E_{00}/A$
4	1,2610	1,96	4,769	2	7,05
5	1,1090	2,45	4,098	2	5,48
6	1,1036	2,94	5,039	3	5,32
8	1,0250	3,90	5,516	4	7,039
10	0,9740	4,87	5,972	5	6,443
15	0,8894	7,26	6,871	7	7,671
20	0,8399	9,62	7,498	10	7,999
40	0,7179	18,89	8,788	18	8,556
60	0,6463	27,90	9,126	28	8,752
80	0,5958	36,67	9,130	34; 36	—
100	0,5547	45,21	8,984	42; 44	—
120	0,5237	53,53	8,759	50; 52	—
140	0,4959	61,64	8,494	58	—
160	0,4723	69,52	8,209	64; 66	8,202
180	0,4501	77,19	7,907	72; 74	—
200	0,4323	84,63	7,610	80	—
220	0,4150	91,83	7,308	86	7,669
240	0,3995	98,78	7,014	96	7,496

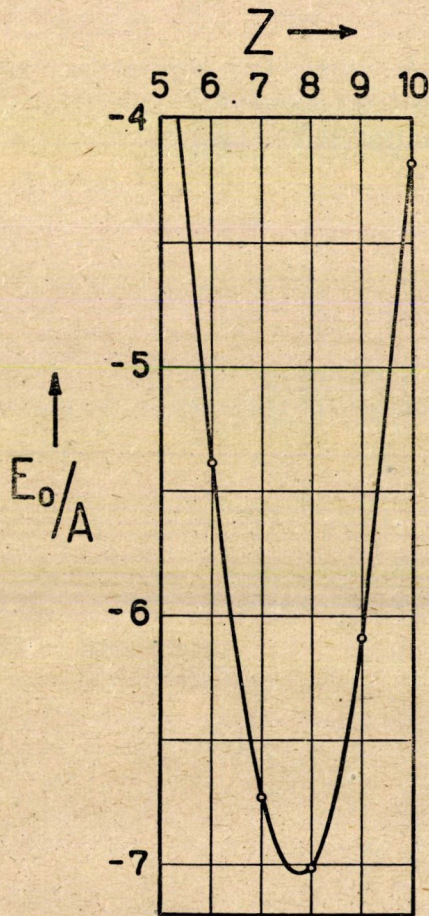
2. TÁBLÁZAT

Magrádiuszok és nukleonsűrűségek a mag-középpontban. Az R magrádiuszt r_0 -egységekben fejeztük ki, a ρ_0 magsűrűségek a mag középpontjában pedig $1/r_0^3$ egységekben vannak megadva. Az itt megadott elméleti Z értékek a Z_{eff} -hez legközelebb álló egész számok.

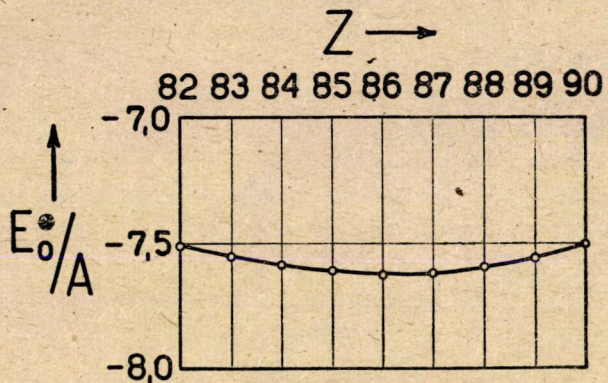
A	Elméleti értékek			Kísérleti értékek
	Z	ρ_0	R	R
4	2	1,44	1,34	1,67
10	5	1,66	2,03	2,26
20	10	2,13	2,56	2,85
40	19	2,66	3,26	3,59
60	28	2,91	3,74	4,11
80	37	3,04	4,17	4,52
120	54	3,10	4,88	5,18
160	70	3,03	5,54	5,70
200	85	2,90	6,13	6,14
240	99	2,75	6,76	6,53

minden azon múlik, hogy az „elegendő nagy értéket” hogyan definiáljuk. Egy megfelelő magrádiuszhoz jutunk, ha ezt azon golyó sugara gyanánt definiáljuk, melyen kívül egy az összes magokra nézve konstans, 1 nukleon nagyságrendű nukleon-mennyiség foglal helyet. Ez a definíció formulában kifejezve tehát a következő

$$\int_R^\infty \rho 4\pi r^2 dr = n, \quad (19)$$



2. ábra. Az egy részecskére eső átlagenergia E_0/A , mint a rendszám Z függvénye az $A=16$ izobárok esetében



3. ábra. Az egy részecskére eső átlagenergia E_0/A , mint a rendszám Z függvénye az $A=200$ izobárok esetében

ahol n egy 1 nagyságrendű szám. Mivel ρ nagyobb r értékeknél igen meredeken esik le zérusra, az R radiusz n -től nem függ nagyon érzékenyen. Így pl. $A=120$, $Z=54$ esetében $n=1$ -el $R=4,63 r_0$, és $n=1/2$ -el $R=4,88 r_0$. Mi n -re az $1/2$ értéket választottuk és ezzel a 2. tabellában összeállított értékeket nyertük.

Az így nyert magrádiuszokat az empirikus magrádiuszokkal hasonlítjuk össze, melyeket a következő formulával

$$R = 1,42 A^{1/3} 10^{-13} \text{ cm} = 1,05 A^{1/3} r_0 \quad (20)$$

lehet előállítani¹⁵ és melyeket több magra a 2. tabellában adunk meg.

Mivel az empirikus magrádiuszok α -részekkel, protonokkal és neutronokkal való szórási kísérletekből, továbbá az α -bomlásból lettek meghatározva és a magrádiuszoknak fentebb adott elméleti definíciója ezekkel a kísérleti eljárásokkal nem függ szervesen össze, az elméleti és empirikus magrádiuszok összehasonlításánál óvatosan kell eljárunk. A számított értékeknek az empirikus értékekkel való jó egyezése természetesen véletlen és arra vezethető vissza, hogy n számára az $1/2$ értéket választottuk. A lényeges az elméleti eredményekben az, hogy az elméleti rádiuszok A -tól praktice ugyanúgy függenek, mint az empirikusok, ami semmiesetre sem tulajdonítható véletlennek.

Hogy a kísérleti magrádiuszokkal közvetlenül összehasonlítható elméleti magrádiuszokhoz jussunk, az elméleti magrádiuszokat a kísérleti módszerekből kiindulva kellene definiálni. Így pl. elméletileg meg lehetne állapítani α -részeknek, protonoknak vagy neutronoknak a statisztikus magmodellen való szóródását és az így nyert eredményekből lehetne egy, a kísérleti magrádiuszokkal összehasonlítható magrádiuszt definiálni.

5. Diszkusszió

A variáció-számítás első lépésével nyert eredmények igen kielégítőek, különösen ha figyelembe vesszük, hogy az egész elméletben csak egy empirikus paraméter lett felhasználva és az egész eljárás önkényes feltevésektől mentes. Elsősorban az a kérdés vetődik fel, hogy a variáció-számítás következő lépése hogyan alakul és milyen eredmény várható ettől. A következő lépés a neutron- és proton-sűrűségnek egymástól független variációjában állna, ami a Coulomb-féle taszítási energiának a csökkenését, tehát az összenergiának a süllyedését eredményezi. Az összenergiának ez a süllyedése főképpen nehéz magok esetében — ahol a Coulomb energia nagy — lesz jelentős. A második közelítéstől tehát az összenergiának a süllyedése várható, mégpedig annál nagyobb mértékben, minél nagyobb az A . Tehát az energiagörbének az iránytangense $A \cong 60$ -tól a legnehezebb magokig terjedő szakaszon kissé kisebbedni fog. Ha az így nyert új energiagörbét nagyobb energiák irányában eltoljuk, ami a γ paraméter értékének kisebbitésével érhető el, akkor a számított energiagörbe az empirikus értékekkel még jobb egyezést fog mutatni.

A sűrűségeloszlásnak a magasabb közelítésekkel való további javítása azáltal érhető el, hogy a (17)-es leegyszerűsített kifejezések helyett az általánosabb (15)-ös kifejezéseket használjuk.

Az elméletnek egy további javítása esetleg abban állhatna, hogy a nukleonokat a mellékkvantumszám szerint csoportosítjuk és ily módon a kinetikus energiát korrigáljuk. A vonzási energiákat is lehetne még korrigálni, pl. azáltal, hogy figyelembe vesszük a nukleonoknak a korrelációból származó kölcsönhatását.¹⁶

Végül még arra is lehetne gondolni, hogy a nukleonok egy részét mint kész α -részeket építjük be a magba és az így beépített nukleonok százalékos arányát szintén a minimumelvből határozzuk meg.

E problémák megoldásaira vonatkozó részletes beszámolók az Acta Physica Hungarica-ban fognak megjelenni.

A numerikus számításokat *Kunvári Olga*, *Mágori Edit*, *Molnár Béla* és *Szabó Éva* tanársegédek végezték. Az ábrákat *Knapecz Géza* és *Zelenka László* tanársegédek készítették. Szíves közreműködésükért mindnyájuknak e helyen is hálás köszönetemet fejezem ki.

Műszaki Egyetem

Fizikai Intézete, Budapest.

IRODALOM

¹ E. Majorana, ZS. f. Phys. 82, (1933), 237.

² W. Heisenberg, Rapport du VIIIème Congrès Solvay, Paris, 1934.

³ C. F. v. Weizsäcker, ZS. f. Phys. 96, (1935), 431.

⁴ C. F. v. Weizsäcker, 1. c.; G. C. Wick, Nuovo Cimento Nr. 4, 1934; Rend. Accad. Lincei 19, (1934), 319; 21, (1935), 170; K. Nakabayasi, ZS. f. Phys. 97, (1935), 211; S. Flügge, ZS. f. Phys. 96, (1935), 459; E. S. Wang, ZS. f. Phys. 100, (1936), 736. További irodalmi adatokra vonatkozóan utalunk a következőkre: H. A. Bethe és R. F. Bacher, Rev. Mod. Phys. 8, (1936), 82; C. F. v. Weizsäcker, Die Atomkerne, Physik und Chemie und ihre Anwendungen in Einzeldarstellungen Bd. II, Akad. Verlagsges., Leipzig, 1937; L. Rosenfeld, Nuclear Forces, Monographs on Theoretical and Applied Physics Vol. I, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1948.

⁵ S. Flügge, 1. c.

⁶ V. ö. pl. C. F. v. Weizsäcker, 1. c.

⁷ W. Heisenberg, Theorie des Atomkerns, 161 o., Max-Planck Institut für Phys., Göttingen, 1951.

⁸ Az elmélet alapjait illetően utalunk pl. P. Gombás, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, 1—30 o., Springer, Wien, 1949.

⁹ V. ö. pl. H. A. Bethe és R. F. Bacher, Rev. Mod. Phys. 8, (1936), 82.

¹⁰ A kicserélődési energia kiszámítása lényegesen körülményesebb, de teljesen hasonló a kicserélődési energiának Coulomb-szerű potenciál esetén való számításához, v. ö. pl. P. Gombás, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen 23 és következő oldalak, Springer, Wien, 1949. Tudomásom szerint elsőnek a kicserélődési energiát az (1) típusú kölcsönhatási energiával Nakabayasi számította ki a fentebb idézett dolgozatában.

¹¹ C. F. v. Weizsäcker, 1. c.

¹² Mindezekre a kérdésekre vonatkozólag v. ö. *P. Gombás*, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, 110—116 o., különösen a 116 o. közepe, Springer, Wien, 1949.

¹³ *L. Rosenfeld* egy összeállításából, Nuclear Forces, Monographs on Theoretical and Applied Physics Vol. I, 501—528 o., North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1948.

¹⁴ Az ábrán további elméleti adatokat is megadtunk, melyek a tabellában nincsenek feltüntetve.

¹⁵ Erre vonatkozólag v. ö. *L. Rosenfeld*, Nuclear Forces, Monographs on Theoretical and Applied Physics, Vol. I, 22, 23 o., North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1948; továbbá *G. Gamow* és *C. L. Critchfield*, Theory of Atomic Nucleus and Nuclear Energy-Sources, International Series of Monographs on Phys., 8 és következő oldalak, Clarendon Press, Oxford, 1949.

¹⁶ Erre az energiára vonatkozólag Coulomb-kölcsönhatás esetében v. ö. *E. Wigner*, Phys. Rev. (2), 46, (1934), 1002, valamint *P. Gombás*, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, 27 és következő oldalak, valamint 96 és következő oldalak, Springer, Wien, 1949.